



Grundriß

der

bestimmenden und rechnenden Krystallographie.



Grundriß

der

bestimmenden und rechnenden

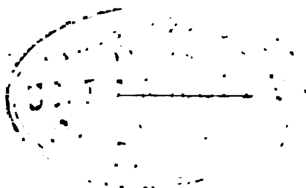
Krystallographie

nebst

einer historischen Einleitung

von

Fr. Aug. Quenstedt,
Professor zu Tübingen.



Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten und 8 Tafeln.

Tübingen, 1873.
Verlag der H. Laupp'schen Buchhandlung.

Druck von H. Laupp in Tübingen.

Vorrede.

Seit Jahren trug ich mich mit dem Gedanken herum, aus der Weiß'schen Deductionslehre nicht blos die Möglichkeit von sechs Krystallsystemen zu begründen, was schon in meiner „Methode der Krystallographie 1840" geschah, sondern auch zu zeigen, wie sich daran zugleich der einfachste Weg zur Winkel- und Axenrechnung knüpfe. Doch nahmen die petrefactologischen und andere Arbeiten fortwährend mich so viel in Anspruch, daß ich nur die Mußestunden gleichsam zur Erholung dazu verwenden konnte. Vor allem war es dabei nothwendig, die Linear- und Punktmethode, sowie die Flächen- und Kugelprojection gegen einander abzuwägen, und ihre reciproken Verhältnisse ins gehörige Licht zu stellen. Denn wenn auch von den heutigen Krystallographen die Wichtigkeit der Projection immer mehr erkannt wird, so neigen sie sich doch nur zu oft der Kugeldarstellung zu, die allerdings eine vortreffliche Uebersicht gewährt, aber für die Bestimmung und Entwickelung der Zonen lange nicht die Wichtigkeit und Bequemlichkeit der Flächendarstellung erreicht: wie der Schiffer durch weiten Ocean zum Mercator greift, wenn er sein unsichtbares Ziel in bestem Cours erreichen will, so muß auch der Krystallograph zunächst sich auf der Ebene und nicht auf der Kugelfläche ergehen. Die Ebene ist sein Mercator, hat er hier Zonenpunkte und Sectionslinien fixirt, dann kennt er wie der Schiffer sein Terrain ohne Rechnung. Wie leicht es nun aber ist, das Bild der Ebene auf die Kugelfläche überzutragen, wurde wiederholt gezeigt. Selbst Mathematiker werden diesen Zusammenhang zwischen beiden Projectionsweisen nicht ohne Wohlgefallen verfolgen.

Um die Probleme von allen Seiten zu erfassen, wurde ein historischer Ueberblick gegeben, woraus hervorgeht, wie eine Menge Neuerungen nur eine andere Darstellung längst bekannter Gesetze waren, die alle wie Radien auf Weiß zurückführen: man war dem Vater der

Krystallkunde an mathematischer Darstellung überlegen, aber in der Tiefe der Anschauung hat er es allen zuvorgethan. Seine Gedanken und Lehrsätze durften nur in eine etwas andere Form gebracht und etwas einfacher abgeleitet werden, so ließen sie die populärste Anwendung zu. Ich war bemüht, mit den einfachsten algebraischen Rechnungen die Hauptformeln hinzustellen, und in den eleganten Cosinus- und Tangentenformeln namentlich den reciproken Zusammenhang nachzuweisen, in welchem die Seiten- und Kantenwinkel zu einander stehen, so daß es schließlich für den **Geübten** ein Leichtes ist, alle nach der aufgestellten Regel aus dem Gedächtniß zu entwickeln. Der **Anfänger** mag sich mit den Resultaten begnügen, doch wird auch er in der die Krystallentwickelung begründenden Darstellung so viel Populäres und Leichtverständliches finden, daß ihm der Weg zum tiefern Verständniß damit angebahnt ist, welcher nicht im Rechnen sondern im Construiren liegt. Das Heer von Winkeln darf ihn wenig berühren. Den Schwerpunkt legte Weiß mit Recht auf die Zonenaxen: sie strahlen alle von einem Punkte aus wie wirkende Kräfte, die im gegenseitigen Zusammenhange von Resultanten stehen. Nach dem Kantenzonengesetze ergibt sich ihr Werth durch einfache Addition, und mit Hilfe der Projectionsebene kann ich sofort sämmtliche Schnittlängen hinschreiben, welche eine beliebige Fläche an ihnen macht. Drei beliebige Längsstrahlen bestimmen ein Tetraid, und damit hätte man die allgemeine Rechnung beginnen und dann zu den besondern Fällen herabsteigen können. Doch schlug ich lieber den anschaulichern Weg vor, und begann mit den besondern Fällen, denen dann allmählig die nöthige Allgemeinheit gegeben wurde.

So hoffe ich wird auch diese Arbeit sich einige Freunde erwerben, und zu der endlichen Einsicht führen, daß die zahllosen Messungen und Rechnungen, trotz ihrer Mühe, doch nur Werth haben, wenn sie in ihrem nothwendigen Zusammenhang erfaßt werden. Auf ein paar Minuten mehr oder weniger kommt es überhaupt bei der Zonenlehre nicht an: das Wesen liegt in der Entwickelung. Das darzuthun, war meine Absicht.

Tübingen, Juni 1873.

Quenstedt.



Geschichtliche Einleitung.

Als die Griechischen Helden vor den Mauern Trojas ankamen, setzte sich in jener schauerigen Nacht das Eis um die Schilder:

Σακέεσσι περιτρέφετο κρύσταλλος Homer Odyss. 14. 477;

und *ἡ Κρύσταλλος καὶ τὸ Ἀμέθυστον* (Krystall und Amethyst) werden zu Siegelringen verschnitten (*σφραγίδια ποιεῖται*), berichtet Theophrast (310—225 a. Chr. *περὶ τῶν λίθων* §. 30). So wurde der Name des vergänglichsten Körpers auf den unvergänglichsten wegen seiner äußern Aehnlichkeit übergetragen.

Die Klarheit des Bergkrystalls führte die alten Philosophen zeitig auf die himmlische Feuchtigkeit, weil diese die wenigsten Erdtheile in sich berge (Seneca † 66 p. Chr. Quaestion. natur. III. 25) und Plinius (Histor. natur. 37. 10) konnte auf das Bestimmteste behaupten (Nos liquido affirmare possumus), daß der Krystall nur auf den unzugänglichsten Alpenpässen erzeugt werde, wo die Leute an Seilen hängend ihn hervorzögen. Jener fleißige Schriftsteller, der seinen Wissensdrang beim Ausbruch des Vesuvs (79 p. Chr.) mit dem Tode bezahlen mußte, machte zugleich die erste sachliche Bemerkung (lib. 37. 9). »Quare sexangulis nascatur lateribus; non facile ratio inveniri potest: eo magis quod neque mucronibus eadem species est, et ita absolutus est laterum laevor, ut nulla id arte possit aequari«; d. h. weshalb er in sechswinklichen Säulen wachse, davon kann nicht leicht der Grund gefunden werden, um so mehr, weil dabei seine Spitzen nicht einmal dieselbe Gestalt beibehalten, und die Glätte der Seiten so vollendet ist, daß keine Kunst ihr gleich zu kommen vermag. Ja bei den Indischen Diamanten (lib. 37. 15) wird auf die anschaulichste Weise ein Dihexaeder beschrieben: »laterum sexangulo laevore turbinatus in mucronem: aut, quo »magis miremur, duabus contrariis partibus, ut si duo turbines »latissimis suis partibus jungantur«, d. h. durch die sechswinkliche Glätte der Seiten in eine Spitze gekräuselt, oder, was wir noch mehr bewundern, an beiden entgegengesetzten Enden, wie wenn zwei Kreisel mit ihren breitesten Theilen unter einander verbunden werden. Und

aus dieser Form wird schon ganz richtig auf eine Verwandtschaft des Adamas mit dem Crystallus geschlossen (quadam crystalli cognatione), wie noch heute das Volk gewisse kleine Bergkrystalle (Böhmische, Marmaroscher) mit Diamanten verwechselt.

Um **Krystall** und **Iris** drehte sich wesentlich die erste Krystallkunde. Als in Deutschland Albertus Magnus († 1280) die Aufmerksamkeit wieder auf Steine (de Mineralibus. Venetiis 1495 nach 1262 geschrieben) lenkte, so erklärte er die sechsseitigen Säulen des Iris, welche zwischen dem Rhein und Trier in großer Menge gefunden würden, aus dem Druck des Nebengesteins, sicut foramina apum in medio posita hexagona efficiuntur. Aber die Kälte mache das Eis in hohen Bergen so trocken, daß ex illo sicco coagulat glaciem in crystallum. Est autem lapis siccissimus, quod sua indicat secabilitas (Sprödigkeit) maxima. **Megenberg** (1309—1374, das Buch der Natur 1350 ed. Pfeiffer pag. 441) sagt: Cristallus der stain wirt auz eis, wan daz verhertt in viel jâren. jedoch widerspricht das Solînus. Iris haizt der regenpog. Der stain geleicht einer cristallen und ist sehseklot. Er folgte dabei nur dem Albertus, aber „daz der stain form und ir gestalt ist von sunderleicher stern kreften“ (l. c. pag. 428), war seine eigene Meinung. Auch **Langii** speculum lapidum 1533 sahe nicht viel. **Agricola** (de natura fossilium 1546 Basileae 1657 pag. 619) von Chemnitz weiß uns dagegen aus eigener Anschauung von Verziehungen jeglicher Art zu erzählen, wie die großen aus kleinen zusammengesetzt seien; wie einer breiten Seite oft eine schmale gegenüber liege; wie gewöhnlich Spitze (mucro) klein und reliquum corpus angulatum groß; aber am Blocksberge (Blochebergi) hingen an den Felsen Exemplare, woran dem entgegen mucro est magnus, corpus exiguum. Seinem Inhalte nach sei jedoch crystallus nicht glacies, sed magis succus frigore densatus. Von der Kälte konnte er sich also auch noch nicht ganz frei machen. Seine übrige Krystallkenntniß war dagegen äußerst dürftig. In der Einleitung heißt es zwar: nonnullae sunt fissiles (spaltbar), ut lapis specularis (Gyps), ut magnetis (Talk), qui ex crustis constat .... quaedam sunt angulatae. vel ergo triangula nascuntur figura, ut gemmae quaedam: vel quadrata, et tesseris simili, ut androdamas (Kalkspath?) et pyritae ...: vel quinquangulis, cujus figurae est basaltes Misenus ... vel sexangula figura, ut crystallus. vel pluribus angulis, ut pangonius; aber das war fast alles. Die übrigen äußern mehr zufälligen Gestalten wurden viel besser hervorgehoben.

Encelius (de re metallica 1557) von Saalfeld ziehe ich als Mineralogen dem Agricola noch vor, er ist kurz, bündig, übersichtlich, klar, und hat ebenfalls viel gesehen, wie das argentum rude coloris rubri rot güldenerz beweist, woran er so neue Formen erkannte, daß er hinzu setzte: ita natura geometriam exercuit sub terrae visceribus, mirabili opifico. **Conrad Gesner** (de rerum fossilium, lapidum et gemmarum

maxime, figuris .... 1565) in Zürich fügte seinem kleinen Buche Holzschnitte bei, worin aber außer dem Würfel vom Pyrites und Salz nur die Bergkrystallformen eine Rolle spielen. Ja das merkwürdige Bild (fol. 21), was ihm Kenntmann in Torgau von den Meißnischen Basaltsäulen zusandte, zeigt die verwirrten Vorstellungen jener Zeit: die drei- bis siebenseitigen Säulen werden nach Quarzart mit pyramidalen Enden gezeichnet, ihre gedrängte Stellung erinnerte ihn an die Bienenwaben des Albertus, worauf auch der Mathematiker Cardanus († 1570 in Rom) hinwies. Nur die Deutung des Pangonius machte ihm zu schaffen, er bildet dafür links unter den Basaltsäulen ein Granatoeder ab, welches er freilich nicht ganz richtig (fol. 25) dodecagonum Crystallum, Ein zwölffeckechter Cristall, nennt. Hervorzuheben ist die Stelle (fol. 16): Saxum durum, magnas rupes faciens, est circa Thermas Caroli quarti, et prope Elnbogen oppidum, candidis veluti tesselis immixtis varium, Val. Cordus, womit offenbar auf die bekannten Carlsbader Feldspäthe hingedeutet wird. So ließen sich noch eine Reihe von Männern aufführen. Aber wir eilen zu dem großen Dänen

Nicolaus Steno (1638—1687), der in Florenz ebenfalls an den Crystall der Alten anknüpft, aber mit seiner wenn auch kleinen geologischen Abhandlung (de solido intra solidum naturaliter contento 1669 ed. secunda 1763 pag. 35) eine neue Epoche beginnt, der erste Anlauf zu einer wirklichen Krystallographie: »crystallus besteht aus zwei sechskantigen Pyramiden mit zwischenliegender ebenfalls sechskantiger Säule, „daher nenne ich angulos solidos extremos und intermedios (End- „und Zwischenkante); wie plana extrema und intermedia (End- und „Zwischenflächen); planum baseos steht senkrecht auf die Zwischenflächen, „planum axis (Axenebene) est sectio, in qua est axis crystalli, qui „componitur ex axibus pyramidum, et axe columnae. Wie ein „Krystall entstehe, ist zweifelhaft, aber wie ein gebildeter fortwachse, „sicher. Nicht etwa nach Art der Pflanzen von innen, sondern lediglich „durch Anlagerung kleinster von einem Fluidum herbeigeführter Theile, „namentlich an den Enden, was die nie fehlenden Querstreifen auf den „Zwischenflächen beweisen. Daher können sich auch Höhlen darin bilden, „welche einen Theil des Fluidums einschließen, das bald reine Luft, „bald Luft mit Wasser ist. Die causa efficiens ist nicht hohe Kälte, „sondern ähnlich einer magnetischen Kraft, die noch hinter dem Papiere „die Eisentheile mit sich zieht. Folglich haben die Krystalle sich nicht „nur bei dem Anfange der Dinge gebildet, sondern bilden sich noch „immer fort, wodurch — in plano axis laterum, et numerum, et „longitudinem varie mutari non mutatis angulis (l. c. pag. 69) — „zwar die Zahl und Länge der Seiten sich mannigfach verändern, aber „**ohne Veränderung der Winkel.**“ Letzteres bildet den Angelpunkt der Krystallographie, welcher hier zum ersten Mal sicher hervorgekehrt wird. So ist also der Bergkrystall, den Weiß mit vielem Glück an die Spitze

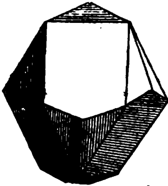
seines Mineralsystemes stellte, zum Ausgangspunkte der wissenschaftlichen Mineralogie überhaupt geworden. Aber als wäre Steno schon Meister der schwierigeren Formen, greift er den

Eisenglanz (Ferrum l. c. 42) heraus, woran gerade Toskana mit der Insel Elba so reich ist. Es wird hier erst gar nicht leicht, den Anschauungen zu folgen, wir müssen zum Verständniß die characteristischen Zeichnungen von Romé de l'Isle (Cristallographie 1783 IV. tab. 2 fig. 34—40) aufschlagen. Die Mannigfaltigkeit der verzogenen Gestalten ist auf tria genera zurückgeführt:

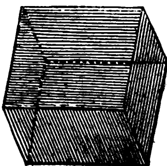
„**secundum genus** wird von 12 Ebenen umschlossen, deren 6 ge„streifte extrem und fünfseitig, deren 6 intermediäre aber „glatt und dreieckig sind. Umgekehrt wie beim Crystallus „werden durch Auflagerung auf die intermediären die ex„tremen Flächen allmählig dreiseitig, die intermediären „dagegen fünfseitig, und dabei rechte Winkel mit ihren „nachbarlichen bildend, welche rechten Winkel endlich er„setzt werden durch je zwei ebenfalls glänzende Dreiecke, „deren Basen mit dem Fünfseit rechtwinklich zusammen„fallen, so daß auf diese Weise das



„**tertium genus** mit 24 Flächen zum Vorschein kommt, schon „durch seine Dicke allein das Wachsthum verrathend, „während primum genus planum est, blos in der „Mitte etwas erhaben und an den Rändern verdünnt „ist. Alles das kann man durch Abstumpfung eines „Würfels genau nachmachen — ad unguem repre„sentari. Die Glätte der Fläche sah ich einst so voll„kommen, wie nie bei einem Krystalle mir glückte." Ueber die Bestimmtheit der Darstellung müssen wir staunen, da das Eisenglanzrhomboeder mit 86° in den Endkanten dem Würfel allerdings so gleicht, daß selbst noch Hauy lange dadurch getäuscht wurde, und dieser Meister sogar gesteht, wie es das einzige Mal gewesen sei, wo er sich durch das Vorurtheil vom bloßen Augenschein habe verführen lassen (Traité de Miner. 1801. ed. Weiss IV. pag. 61). Die Streifung, welche bei der Crystalli materia diaphana auf den Zwischenflächen, bei der ferri materia opaca an den Extremen vorkommt, schien die verschiedene Art des Wachsthums, dort nach der Länge, hier nach der Breite, ganz besonders zu bestätigen. Nun kam ihm aber noch ein drittes zu Händen, die



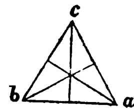
Marcasitae materia (Schwefelkies) mit dreierlei Streifungen auf den „stets rings ausgebildeten Würfeln." Da sie keine Ansatzfläche hätten, so müßten sie frei zwischen drei Strömungen gebildet sein, was zu erklären nicht schwer scheine. Er nenne sie cubos, obwohl die Gleichheit sämmtlicher Flächen nur bei wenigen beobachtet würde. Leider bricht er dann plötzlich ab, und verschiebt



das Andere auf eine spätere ausführlichere Dissertation, die nicht bekannt geworden ist. In Beziehung auf Zeit fügt er noch hinzu, daß die crystalli post, die cubi ante productionem stratorum gewachsen sein müßten: er unterscheidet damit schon scharfsinnig die Einschlüsse von Ausscheidungen.

Vom **Kalkspath** (l. c. 47 Selenitides romboidales) wird ausdrücklich bemerkt, daß er sich blättere und in andere corpora rhomboidea zertheilt werden könne, worauf bekanntlich Hauy später seine Decrescenzen gründete. Das war also der Beginn der neuen Epoche in der Krystallographie.

Die **fünf Platonischen Körper** (Τίμαιος, Uebersetz. von Susemihl §. 112), Tetraeder, Oktaeder, Würfel, Icosaeder, Dodecaeder, welche schon lange vor Plato die Köpfe der **Pythagoräer** beschäftigten, gaben einen zweiten Impuls. Man trug die Formen auf die vier Elemente über, und dachte sich die Atome des Feuers tetraedrisch, der Luft oktaedrisch, des Wassers icosaedrisch und der Erde cubisch; so blieb dann für das Himmelsgewölbe nur noch die Quinta essentia (Quintessenz!) seu materia coelestis, das Dodecaeder, übrig. Es ist nun köstlich, wie die griechischen Männer philosophirten: wird Wasser (Icosaeder) von Feuer (Tetraeder) oder Luft (Oktaeder) zerstört, so muß bei dem Zusammentreten der Theile **Ein Körper** von Feuer und **Zwei** von Luft entstehen, weil eben $20 = 4 + 2 . 8$, d. h. Icosaeder hat so viel Flächen, als ein Tetraeder und zwei Oktaeder zusammen genommen. **Plato** ging eigentlich noch weiter und zerlegte die gleichseitigen Dreiecke durch Diagonalen in sechs rechtwinkliche, deren Hypotenusen die doppelte Länge der kleinern Kathete haben (Τίμαιος §. 111), und kam dann auf die sechsfache Zahl kleinerer Dreiecke, also $120 = 24 + 2 . 48$, das machte das Bild zwar noch verwickelter, aber interessanter. Die Sache ging aus derselben Ideenassociation hervor, wie bei unsern neuern Chemikern die sogenannten Structurformeln. Jedenfalls liegt darin schon der Keim für die Nothwendigkeit von sechs Krystallsystemen, denn durch Knicken der acht Flächen des Luftatoms längs der Kanten jener congruenten Dreiecke geht unmittelbar der krystallographische 48flächner hervor. Denken wir uns jetzt die drei Axen abc rechtwinklich, so können sie gleich aaa, halbgleich aac und ungleich abc sein. Dasselbe gilt für drei schiefwinkliche Axen (Rhomboederkanten), weil die Symmetrie entweder von der Gleich- und Ungleichheit der Axen oder der Axenwinkel, oder beider abhängt. Das auseinander zu setzen würde aber jetzt zu weit führen, ich will daher blos mit dem göttlichen Plato „alle Gaben unserer Freundschaft zum Preise setzen, wenn uns Jemand „zu widerlegen und ausfindig zu machen im Stande ist, daß es sich „nicht also verhalte" (Τίμαιος §. 109). Denn das Symmetriegesetz läßt sich mit gleicher Nothwendigkeit folgern, wie die möglichen Formen im



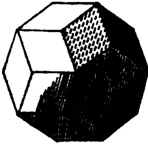
Raume, und ich habe es immer bedauert, daß die alten Griechen auf die Deduction von Oktaid, Hexaid, Dodecaid &c. nicht verfielen, was apriorisch gar nicht so fern lag. Die Krystallographie würde dann bei den Gelehrten ganz andere Wurzeln geschlagen haben.

Der Zauber, welcher namentlich auch auf der Schönheit jener fünf Körper beruht, ergriff beim Wiederaufleben der Wissenschaft sogar die Künstler. Schon Marx (Geschichte der Krystallkunde 1825. pag. 25) macht in dieser Beziehung auf einen alten Folianten aufmerksam: Perspectiva Corporum Regularium, Das ist, Ein fleyssige Fürweysung, wie die Fünff Regulirten Cörper, ... durch einen sonderlichen, newen, behenden und gerechten weg, der vor nie im Gebrauch ist gesehen worden, gar Künstlich in die Perspectiva gebracht, Und darzu ein schöne Anleytung, wie auß denselbigen Fünff Körpern ohn Endt, gar viel andere Cörper, mancherley Art und Gestalt, gemacht und gefunden werden mügen. Allen Liebhabern der freien Kunst zu Ehren, durch **Wentzeln Jamitzer**, burgern und goldtschmid mit Göttlicher hülff an Tag geben. 1568. Es waren das Anfänge unseres Deductionsweges, welchen schon Archimedes (287—212 a. Chr.) betrat, wornach noch heute die Polyeder mit zwei- und dreierlei Seitenflächen Archimedische heißen (Hohl, Die Lehre von den Polyedern 1842. pag. 234). Natürlich kamen darunter auch einzelne abgeleitete Krystallgestalten vor, allein das war nicht der Natur abgelauscht. „Er gibt auch eine Zusammensetzung des Oktaeders aus kleinen Oktaedern, und zeigt die dabei sich ergebenden tetraedrischen Zwischenräume" (Kobell, Geschichte der Mineral. 1864. pag. 6), griff also Guelmini und Hauy vor.

Johannes Keppler 1571—1630, auf der Tübinger Hochschule in den alten Lehren der Philosophen wohl unterrichtet, suchte am Himmel und in der Erde deren Wahrheit zu bestätigen. Die Gesetze der Planetenbewegung waren eine erste Frucht jener tiefsinnigen Speculation: Cubus et Dodecaedron ex primariis hieß er Mares, Octaëdron et Icosiëdron ex secundariis dagegen Feminae, weil Würfel das Oktaeder und Dodecaeder das Icosaeder gleichsam wie Männer die Frauen umarmten, d. h. erstere in letztere eingeschrieben werden konnten, während Tetraëdron, vereinsamt wie ein Coelebs oder Androgynos, sibi ipsi inscribitur (Harmonices mundi libri V. 1619. pag. 58). Mit anderen Worten: wie der Würfel die Ecken des Oktaeders, so stumpft das Dodecaeder die Ecken des Icosaeders ab. Man könnte hierein schon die Idee der Ableitung legen, und jedenfalls ist hervorzuheben, daß nur das erste, nirgends das zweite Paar bei Krystallen gefunden wird, während E. de Beaumont in den Gebirgszügen der Erdkugel und damit wohl auch an den Himmelskörpern das zweite nachweisen zu können meinte und Pentagonalsystem (Epochen der Natur 1861. pag. 229) nannte. Keppler ging nun auch wirklich, wie schon Archimedes, weiter: er stumpfte die Ecken der fünf Körper ab, und bekam so Cubus truncus, Octaedron

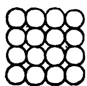
truncum etc. Trat dabei Mann und Weib ins Gleichgewicht, so entstanden Cuboctaedron und Icosidodecaedron. Er schritt dann sogar zum Rhombicuboctaedron, Verbindung von Granatoeder-Würfel-Oktaeder, welchem das Rhombicosidodecaedron, Verbindung von Triacontaeder-Icosaeder-Dodecaeder im Pentagonalsystem entspricht. Durch die Bienenzellen, wie es ausdrücklich (de nive 752) heißt, gerieth er nämlich auf den Rhombus solidus (Granatoeder), welchem der Rhombus solidus triacontaedricus, das dreißigflächige

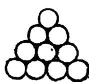
Triacontaeder gegenübersteht. Wie an jenem drei Rhomben ihren stumpfen, so strecken an diesem fünf Rhomben ihren scharfen Winkel nach außen; dann füllen je fünf mit den stumpfen Schenkeln die Lücken, und zwischen durch läuft die **Zona** ex decem Rhombicis composita. Wir lesen hier zum ersten Mal das Wort Zone, was später bei Weiß so fruchtbar wirkte. Keppler leitete nicht aus Zonen ab, sondern nach Archimedischer Methode schaute er nur auf die Ecken, worin die Summe der Seitenwinkel stets weniger als 4 R betragen muß. Was am Himmel sollte natürlich auch in der Erde gelten: formatrix facultas est in visceribus Terrae, quae faeminae praegnantis more ... perpetuo ... in gemmis et fossilibus exprimit quinque corpora regularia Geometrica (Harmon. pag. 161). Wie später R. Boyle so zog schon er Erkundigung bei den Steinschleifern ein: Ajunt gemmarii, Naturalia in Adamantibus inveniri Octaedra; perfectissimae et limatissimae formae (de nive sexangula in C. Dornavii Amphitheatrum 1619. pag. 756); in den königlichen Gemächern von Dresden sahe er einen mit Silbererz geschmückten Tisch, woraus ein halbes Dodecaeder von Haselnußgröße gleichsam hervorblühte; und unter den Bildern von Bauhin's historia fontis Bollensis (ed. Förter 1602. pag. 53) bemerkte er eine von fünf Dreiecken umschlossene Ecke, die er für den Theil eines Icosaeders nahm. Gerade Kieß, der „Hans in allen Gassen", wie ihn Henkel (Pyritologia 1725. pag. 733) in seiner derben Sprache nannte, mußte die Leute zu den Platonischen Körpern hinführen, denn derselbe fand sich als Tetraeder (Kupferkies, Fahlerz), Würfel, Oktaeder, Dodecaeder, Icosaeder. Während in Wirklichkeit nur die ersten drei mit den Platonischen Körpern übereinstimmen, glaubte es Werner (Emmerling, Lehrb. Mineral. 1796. II. 290) auch noch von den beiden letzten, und Romé Delisle (Cristallographie 1783. III. 234) sagt beim Marcassite »l'icosaèdre régulier, l'inverse du »dodécaèdre à plans pentagones, est un des cinq polyèdres régu- »liers de la Géometrie«, meint sogar noch das Triacontaèdre à plans rhombes (Gebrochenes Pyritoeder mit Würfel) hinzufügen zu dürfen. Erst Hauy (Traité de Minér. 1801. ed. Weiss IV. 95) setzte die Sache in das gehörige Licht. Als daher Elias Camerarius (Ephemerides Nat. Curios. 1715. Centurio III. 15) aus dem Lias δ von Boll ein Cuboctaeder



beschrieb, war er zwar verwundert, daß Natura singulari modo geometrizat, aber das Viereck bezeugte ihm den ersten Körper ex tribus primariis, den Cubum; das Dreieck den ersten ex duobus secundariis, das Octaedron non separatim, sed mixtim auf gut Keppler'sche Art. Nach dem Dodecaeder, Tetraeder und Icosaeder suchte er zwar vergeblich, doch pro cubis glaubte er das quadratum salis (Steinsalz) und pro triangulis das Octaedron aluminis (Alaun) zur Erklärung nehmen zu dürfen: Ideen, die später vorzugsweise Linné verfolgte. Schon Candalla hatte 1602 das Cubo-Octaeder Exoctaedron genannt, was auch den Mathematiker Kästner (Commentationes Soc. Götting. 1785. VI. 8) beschäftigte.

Einen weitern Anstoß, als müßte der große Astronom alles aus dem Aether herab holen, gab der **Schnee** (Strena seu de Nive sexangula 1619), ein „Neujahrsgeschenk" an seinen Gönner Wackherius à Wackenfels, der gern über Nihil (Nichts) philosophiren hörte. Scherzhaft führte er daher die kleine Arbeit ein: nam si à Germano quaeras Nix quid sit, respondebit Nihil, si quidem Latine possit. Ich habe nie eine Arbeit aus jener Zeit mit größerem Wohlgefallen gelesen, denn sie zeigt ein tiefes Verständniß der Sache. Daß gerade Schnee und Krystall sechsseitig sein mußten, führte schon zu vielen Meinungen. Theophrastus Paracelsus († 1541 zu Salzburg) ließ nicht blos die sieben Metalle von den sieben Planeten herabkommen, sondern auch die Steine (wie Megenberg pag. 2) von den Sternen. „Aber von Crystallen und Beryllen ist zu wissen, daß sie geboren werden auß den Schneesternen, von denen der Schnee kompt." Ueberdieß galten Kreis und Kugel schon den alten Philosophen als die vollkommensten Formen auf der Ebene und im Raume, wie Cardanus auf die Bienenzellen und Kugelhaufen, so kam auch Keppler darauf zurück, und fügte noch als weitern Beweis die Körner der Granatäpfel hinzu. Denken wir uns nämlich Kugeln in einem Viereck über einander gelagert, so wird im Raume jede Kugel von sechs andern begrenzt, vier in der Ebene des Papieres, eine oben und eine unten: erit ordo cubicus, et compressione facta fient cubi. Die Kugelberührung (coaptatio) findet hier am sparsamsten Statt; am zahlreichsten aber, wenn wir die folgende Reihe darüber und darunter in die Zwischenräume legen, dann kommen wie in der Ebene 4, so unten und oben noch je 4, also zusammen 12 zur Berührung, durch allseitigen Druck entständen Rhombendodecaeder. Legen wir dann die Kugeln in ein Dreieck übereinander, so wird jede Kugel von 8 andern begrenzt, 6 in der Ebene des Papiers, eine oben und eine unten: durch passenden Druck entständen sechsseitige Säulen mit sechsseitigen Endflächen. Würden wir dagegen die folgende Reihe darüber und darunter wieder in die abwechselnden Zwischenräume legen, so berührten wieder 6 in der Ebene





des Papieres, ferner je drei oben und unten, wir hätten nochmals 12 Berührungskugeln. Zur vollständigen Raumausfüllung seien daher blos Cubus, Prisma und Rhombus solidus vorhanden. Vortrefflich beschreibt er dann, wie man im Oktaeder drei gleiche Axen ziehen könne, wie durch Abstumpfung der Würfelecken ein vollständiges Oktaeder herauskomme, und wie im Granatoeder die 3, 4 und 6 stecke. Mit Drei-, Vier- und Fünfecken ließen sich die regulären Körper zusammensetzen, mit Sechsecken nicht mehr. Vielleicht habe die Natur gerade diese wegen ihrer Schönheit gewählt (solum decentia hac invita), denn auffallend sei es, daß auch die Crystalli omnes sexangulae seien, cum Adamantes Octaedrici sint rarissimi. Aber trotzdem gesteht der große Mann, daß in Beziehung auf die Nothwendigkeit der Form noch manche Dunkelheit herrsche. Viel zuversichtlicher handelte später

E. Bartholinus (de figura nivis 1661), der durch Druck der sechs äußern Kugeln gegen die innere den Stern erklären wollte. Verdienter machte sich derselbe durch die »Experimenta Crystalli Islandici disdiaclastici 1670.« Isländische Einwohner hatten nemlich das klare Mineral aus dem »Roerfiord« (Rödefiord) nach Kopenhagen geschickt, woran die Doppelbrechung des Lichtes das große Dioptricae arcanum, spectaculum in terris plana novum, zum ersten Mal wahrgenommen wurde. Wie schon der Name disdiaclasticus andeutet, so zerbrach es immer in dieselben »Rhomboides«, und als er mittelst Lampenflamme und Glasrohr (l. c. pag. 4) auf kleine Stücke blies, so verwandelten sie sich in lebendigen Kalk. Bekanntlich ist das die älteste Erwähnung des Löthrohrs. Die Messung des stumpfen Seitenwinkels gab 101°, darnach die Berechnung der Kante 103° 50′. Damit waren nun auch die Physiker auf Krystalle gewiesen, und der große Optiker **Huygens** (Traité de la Lumière .... dans l'étrange refraction du cristal d'Islande 1690. Opera reliqua 1728. I. 39) wandte sich der »miranda refractio« zu. Seiner geringen Härte nach möchte er ihn lieber Talcum als Crystallum nennen, obgleich auch in crystallo duplex esset refractio, freilich evidens minus (Opera I. 46), wie er durch prismatische Schliffe erkannte. Er maß nun den Winkel von Neuem, und fand die Kante 105°, und darnach die berechnete Seite 101° 52′, kam also der Wahrheit (105° 5′) schon bis auf 5 Minuten nahe. Dann halbirte er den stumpfen Winkel der Seiten, und nannte die entsprechende Ebene **Hauptschnitt** (sectio praecipua), welche bekanntlich durch die Axe geht. **Axis** crystalli aequaliter inclinata versus tria latera 45° 24′. Ja der scharfsinnige Mann bemerkte schon das Zwillingsblatt parallel dem nächsten stumpfen Rhomboeder, was er aber als zweiten Blätterdurchgang parallel den stumpfen Kanten deutete. Es verräth sich bekanntlich durch Regenbogenfarben, patet ex coloribus Iridis per totum planum diffusis, etsi duo fragmenta adhuc cohaereant (Opera pag. 72). Die Blättrigkeit zu erklären, werden auch runde Atome angehäuft. Natürlich konnte er da-

bei nicht die Kepplerschen Kugeln, sondern nur Revolutionsellipsoide (Corpuscula sphaeroidea) anwenden, wie die gleichkantige Ecke ABCD zeigt. Parallel der Ebene wird dann jedes Sphäroid von sechsen gepreßt, während es in der darunter folgenden Schicht nur je drei berührt, also die Theilchen da nicht so gehalten seien, folglich leichter ablösen, also blättern müßten. In der Kante dagegen berührt es je vier, die Theilchen trennten sich also nach der ersten stumpfern Rhomboederfläche nicht so leicht. Die Hauptecke des Rhomboeders könne man zwar leicht abschleifen, aber am schwersten poliren, weil da die Spitzen der Sphäroide hervorragen, und wenn man mit einem Messer kratzen wolle, so erscheine der Krystall durissima, sobald man vom Scheitel D der Pyramide herabfahre, in der entgegengesetzten Richtung schneide man ihn leicht »fere ut sqammas piscium.« Ich pflege die Sache mit groben Schrotposten klar zu machen: thürmt man dieselben zu einer vierseitigen Pyramide auf, so bleiben in der Basis Löcher von vier Kugeln begrenzt. Bei dem Aufthürmen kommt auf jedes Loch oben und unten je eine neue Kugel, also sind die Zwischenräume von sechs Kugeln begrenzt (sechsseitige Räume). Jede Kugel wird daher in der Würfelfläche von vier Zwischenräumen und vier Kugeln umgeben. Bauen wir uns dagegen eine dreiseitige Pyramide, so entstehen in der Basis dreiseitige Zwischenräume, und jede Kugel wird von sechs Zwischenräumen und sechs Kugeln umgeben. Schreiten wir nun weiter zum Aufthürmen, so kann nicht in jegliche, sondern nur in die abwechselnden Löcher eine neue Kugel gelegt werden, und zwar derartig abwechselnd, daß jeder Hohlraum von acht (= 3 + 3 + 1 + 1) Kugeln begrenzt wird (achtseitige Räume). Haben wir daher einen Haufen gleicher Kugeln, so wird jede innerhalb liegende von 12 Kugeln, 6 sechsseitigen und 8 achtseitigen Räumen begrenzt. Die sechsseitigen Zwischenräume kommen auf der Würfelfläche, die achtseitigen auf der Oktaederfläche zum Vorschein. Daher haben die Seiten der vier- und dreiseitigen Pyramide dasselbe Ansehen. Nimmt man dagegen aus den Kanten der vierseitigen Pyramide eine Kugel weg, so sieht man oben und unten in den sechsseitigen, links und rechts dagegen in den achtseitigen Raum hinein. Durch allseitigen Druck müssen daher die Kugeln sich zu Granatoedern gestalten, wobei die 6 vierkantigen Ecken in die sechsseitigen Zwischenräume, die 8 dreikantigen in die achtseitigen hinausgepreßt werden. Es gewähren solche leicht anzustellenden Versuche jedenfalls einen Einblick in den wundervollen harmonischen Bau der Krystalle, und bereiten uns auf die Hauy'schen Decrescenzen vor.

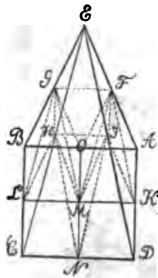


Spath ist zwar eine alte deutsche Bezeichnung für die Blättrigkeit gewisser Steine, und kommt schon bei Megenberg (Buch der Natur pag. 453) vor: Nitrum haizt spat, ... ist weizlot und durchsihtich, ... und darumb macht man in für die venster an den häusern ... sam in Dürgen

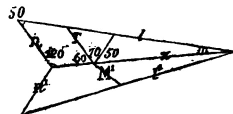
(Thüringen); allein die Messungen der Winkel, um auch hier die Constanz nachzuweisen, lieferten einen wesentlichen Fortschritt. Als Leeuwenhoek (Arcana Naturae 1695. pag. 133) Gyps für sein Mikroskop zubereiten wollte, konnte er keine Stücke mit rechten Winkeln zu Stande bringen, sondern er bekam stets geschobene Tafeln mit 112° und 68°. Die Blättchen der Tafeln wurden so dünn, daß mehr als Hundert erst crassitiem capilli nostri gaben. Es erinnerte ihn an das »vitrum Muscovicum« (Glimmer vom Ural): Newton (1642—1727 Optice 1706. pag. 185) wurde durch seine Lehre von der Farbe dünner Körper nun sogar in den Stand gesetzt, die Dicke zu berechnen, sie mußten so dünn wie buntfarbige Seifenblasen sein. Damit war das Wesen des inneren Gefüges für immer begründet, nur der äußere Formenwechsel machte noch fast unübersteigliche Schwierigkeiten.

Die **Chemikalien**, welche durch Lösung im Wasser und nachheriger Verdunstung oft so leicht in Krystallen erhalten werden, ließen den einmal gefundenen Faden nicht wieder entwischen. Zwar hatte schon Agricola (de re metallica 1550. lib. XII) die Bereitung von Salz, Alaun, Salpeter und Vitriol ausführlich beschrieben, aber von den Formen heißt es meist nur concrescit in cubos. Boetius de Boot (Gemmarum et lapidum historia 1609) hielt es schon für wahrscheinlich, daß Krystall und Edelsteine a sale angularem formam habere. Der gelehrte Jesuit Athanasius **Kircher** (Mundus subterraneus 1664. II. pag. 6) bewies solche Krystallbildung nicht blos durch Experimente, sondern meinte, daß das salem Naturae, chaoticae aquarum moli indutum, allmählig drei andere Salzarten, nitrum, alumen, vitriolum erzeuge, die als Bildnerinnen der Steine und Gemmen überhaupt angesehen werden müßten, entsprechend den Kepplerschen Ideen. Die l. c. pag. 24 abgebildeten Krystallformen beziehen sich jedoch ausschließlich nur auf sechsseitige Bergkrystalle. Dagegen verstand der Holländer Anton v. **Leeuwenhoek** (1632—1723, Epistolae seit 1685) durch seine mikroscopischen Präparate chemischer Lösungen die Aufmerksamkeit noch mehr zu fesseln: hier sehe man die Formen werden! Die zierlichsten Oblong- und Rhombenoktaeder (Anatomia pag. 8 u. 32), Säulen, Tafeln, Dihexaeder (Observat. de fig. Salis pag. 119) im buntesten Gemisch erregten die Bewunderung des Beschauers. Freilich blieb dabei der Phantasie ein großer Spielraum, auch dem Leeuwenhoek stacken die Dihexaeder im Kopfe, wie schon der Alumen (l. c. 123) beweist, wo solche regulär sechsseitigen Pyramiden gar nicht vorkommen können: allein mit Lapidarschrift war nun dargethan, daß Natur aus Flüssigkeiten augenblicklich mathematische Körper zu gestalten im Stande sei. Natürlich lag dabei der Gedanke nahe, daß die größeren Krystalle aus kleinern sich aufbauten. **Gahrliep** (Ephemer. Nat. curios. 1691. Dec. II. Ann. X. Observ. V. pag. 20) hatte bei den bekannten Treppenkrystallen des Salzes gefunden, daß sie gar zierlich Obelisci ad instar e trabeculis quadratis exactissime ad normam

quasi et regulam exasciatis aut dedolatis aufgebaut seien, unten hohl und oben mit einem Würfel endigend, wie seine beiden Abbildungen vortrefflich darlegen. Besonders deutlich waren aber die vierseitigen Pyramiden, wie sie aus den Alaunfabriken von Tolfa im Kirchenstaate hervorgingen. An ihnen entwickelte der Arzt und Mathematiker **Gulielminus** (Guglielmini 1655—1710. De salibus Dissertatio epistolaris 1707) seine Theorie und zeigte, daß jede in 6 ähnliche Pyramiden und 4 Tetraeder zerlegt werden könne. Denn man dürfe nur die Basis ABCD viertheilen, und darauf die vier Pyramiden (KMNDJ, LMNCH, KMOAF, BLMOG) errichten, so bezeichnen deren Spitzen die horizontalen Endkanten der 4 zwischenliegenden Tetraeder (FJKM, HJMN, GHLM, FGOM). Als Rest bleibt das Gipfeloktaeder (FGHJEM), eine Hälfte nach oben (E) und die andere nach unten (M) kehrend. Es bauten sich daher die großen Pyramiden aus kleinen auf, zwischen welchen blos Tetraedrische Zwischenräume lägen. Sales distinguimus in **primigenios** et **derivatos.** Seine vier Grundformen boten nun die bekannten Salze: den Würfel das Kochsalz; das Oktaeder der Alaun; das dreiseitige Prisma der Salpeter; das rhomboidische Parallelepiped der Vitriol, dessen Winkel er auf 100° bestimmte. Solche exacten Darstellungen mußten natürlich befördernder auf die Wissenschaft wirken, als eine Menge verschwommener Angaben, woran jene Zeit so reich ist. Nur mathematische Köpfe waren dazu berufen. Die gewöhnlichen Mineralogen, namentlich Chemiker, sahen mit Verwunderung drein, und schüttelten auch wohl den Kopf. Selbst der berühmte **Woodward** († 1728) konnte sich vom Krystall noch nicht losschälen; da er Quarz so gewöhnlich als Gangmittel fand, so mußte derselbe die Formen bedingen: Iron concreting with crystal determines it to rhomboid figure; Tin to a quadrilateral pyramide; lead to a cubick .... there is all Spar more or less of Crystall. Nach Geoffroy (Hist. Acad. Roy. 1716. pag. 8) bedurfte es nicht einmal der Lösung, sondern der »suc cristallin« schwamm in Blättchen herum, die sich an passenden Orten zusammen fanden. Scheuchzer nannte die Crystallographie zwar curiosissimam, aber auch ita difficillimam, quae ingenia subtilissimorum etiam philosophorum ita torsit, ut ad hunc usque diem sese ex variarum rerum circa hanc materiam occurrentium labyrinthis extricare non potuerint. Sie treibe den Mineralogen förmlich den Schweiß aus. Bourguet meinte daher, Natur habe es mit ihrer Geometrie wohl nicht so genau genommen, als unsere Mathematiker. Interessant ist in dieser Beziehung eine Correspondenz mit Cappeller (Ephem. Acad. cur. Vol. IV. 1734): dieser klagt, daß zu wünschen wäre, die Geometer gingen endlich einmal über ihre 5 regulären und 9 abgestumpften Körper hinaus, und



zeigt, daß die latera pyramidum sibi opposita, semper reddunt angulum solidum 75 graduum in omnibus lapidibus Crystalli verae, was unmöglich durch reguläre Tetraeder erzeugt werden könne; jener entgegnet dem, quod formatio corporum qualitercunque regularium, ut est v. g. Crystallus nunquam ab aliquo Geometra per pura principia Geometriae demonstrari possint .... figuras Crystallorum Salium integrantes vocavi Proteos, die integrirenden Formen seien wandelbar wie ein Proteus! Gulielmini war auch Philosoph, denn er leitete in Platonischer Weise von den Spitzen der Krystalle die Schärfe, von den stumpfen Winkeln die Süßigkeit ꝛc. ab. **Lang** (Historia lapidum figuratorum 1708) in Luzern ging gleich auf diese Ideen ein: Sal est corpus durum angulare, in aqua facile liquabile et sapiditate donatum. Auf Pag. 6 stellte er dann nach **Lister** (de Fontibus medicatis Angliae 1684) und Gulielmini die wichtigsten formbildenden Salze zusammen, worunter besonders das Bittersalz $\dot{M}g\ddot{\bar{S}}\dot{H}^7$ (Fig. 555 etc. unius et ejusdem Nitri Calcarii variae Figurae), welches Lister in den Quellen von Epsham (daher Epsomer Salz) fand, und Linné später fälschlich Natron nannte, sich durch Richtigkeit auszeichnet. Lang weiß uns viel Neues vom Krystall zu erzählen: von den Einschlüssen, von der tunica subviridi (Chloritanflug), dem „Chrystalhembdt" der Schweizer, worunter gerade die klarste und reinste Masse verborgen sei. Er spricht von reifen und unreifen Formen, der Granatus Helveticus dodecalateron (zwelffeggige granaten) im Glimmerschiefer des St. Gotthardts wird vortrefflich abgebildet, sammt dem Selenites Rhomboidalis pellucidior, cujus minimae partes rhomboidales sunt, ohne an die Gleichheit mit Doppelspath zu erinnern, was doch schon Huygens that. Schwer ins Gewicht fiel um diese Zeit auch die Messung von de la **Hire** (Histoire Acad. Roy. 1710. 314) an den Gypszwillingen über dem pierre de plâtre von Paris, den er wegen seiner Weichheit und Blättrigkeit, wie Huygens pag. 9 den Doppelspath, mit Talc verglich, und Talc de plâtre nannte. Auch bei ihm fand sich mittelst Betrachtung von Eisendraht une espèce de duplication de refraction (l. c. 351). Die krummen äußern Linien mußten natürlich die Genauigkeit der Messungen sehr stören, welche in dem großen Dreieck zln 120°, 50°, 10° gab. Beim Abheben dünner Blättchen zeigten sich Bruchlinien, die mit der Mittellinie z des »fer de fleche« 60° und 50° machten, also blieben für den mittlern Winkel des muscheligen mit dem faserigen Bruche (66° 14′) noch 70° über, für denselben, welchen Leeuwenhoek pag. 11 schon näher auf 68° bestimmte. Er dachte sich also das Ganze aus lauter solchen kleinen Dreiecken zusammengesetzt, und bemerkt ausdrücklich, que chaque triangle élementaire d'une lame superieure ne répond pas exactement à ceux de la lame inferieure,

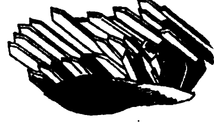


weil bekanntlich faseriger T und muscheliger M' Bruch nicht in eine Flucht fallen, sondern sich an der Zwillingsgrenze unter 170° 45' schneiden. Auch Cappeller (Prodromus Crystallographiae 1723), der nach Leeuwenhoek'scher Manier eine Reihe mikroskopischer Präparate abbildete, gibt hin und wieder von Mineralien schon Winkel an, und besonders gute Figuren, worunter Granatus tetraicosahedricus bereits ein deutliches Leucitoeder darstellt (tab. III. fig. 18). Zuckerkrystalle (III. 6); Alaunoktaeder (III. 10); Spineloctaeder (III. 13); theils mit abgestumpften Kanten, Rubini Orientales genannt; Diamant-Granatoeder (III. 14) tota gemma globosam quodammodo affectat figuram, ita ut .... plusquam 12 hedris comprehendi videatur; die trefflichste Hyacinthform (III. 15) Hyacinthus dictus, dodecaëdricus; Vesuviankrystalle (III. 16) freilich noch Hyac. octodecahedricus genannt; Zirconkrystallisation (III. 17) mit zwei quadratischen Säulen, Hyac. hexadecahedricus; und vieles andere. Als besonderer Sachkenner in jener Zeit wird

Henkel (Pyritologia oder Kieshistorie 1725) verehrt. Als Sächsischer Bergrath hatte er allerdings viel gesehen, aber in der Krystallographie ging er mit dem großen Haufen. Höchstens kam es zu einer Zählung der Flächen: Tetraedros, Pentaedros (dreiseitiges Prisma mit Endflächen), Cubicus, Rhomboides (geschobene Säulen mit Endflächen), Octaedros, Decaedros (Oktaeder mit abgestumpfter Ecke). Beim Dodecaedros werden drei Körper gemalt, ein Dihexaeder, ein Hyacinthkörper und ein Oktaeder mit sechs Würfelflächen, was eigentlich 14 Flächen gegeben hätte, allein es kam ihm ja nur darauf an, daß „denen „Schülern durch Beaugenscheinigung derer Figuren einige halblebendige „Begriffe von der Sache selbst beygebracht werden." Originel war die Schrift in allen Beziehungen, und es hat nicht leicht einer dem an sich trockenen Stoffe so viel Leben eingeflößt, wie er. Als daher

Linné (1707—78. Systema Naturae sive tria regna Naturae 1735) auf drei Bogen Imperialfolio mit zuversichtlicher Schärfe die neue Eintheilung gab, nannte derselbe einzig und allein seinen großen Vorgänger mit Namen: »Quartzum, e quo originem duxerit, maxime dubitarunt »Mineralogi. Hinc summus Mineralogus Excell. HENCKEL: O »Silex! Silex! quis te generavit?« Figuram obtinet ipsissimam verissimamque Nitri, dem Nitrum dankt er zweifelsohne seine Gestalt, lautete das neue Orakel. Nitrum stecke in den Formen des Topas, Rubin, Amethyst, Sapphir, Smaragd, Beryll, Diamant, Kalkspath, Bleiglanz, Gyps. Für Muria blieben dann die tessulata hexaedra, für Alumen die tessulata octaëdra, und für Vitriolum die rhomboidea dodecaëdra. Dahinter steckte eben Gulielmini pag. 12. Aber glückliche Zeiten, wo so Weniges zum Systeme genügte! Doch die Sache vermehrte und änderte sich schnell! **Köhler's** Dissertation, Crystallorum generatio 1747 in den Amoenitates Academicae Bd. 1. pag. 454, zeigt das deutlich. Dort heißt es: Crystalli quartzosae pleraeque Nitri

(Salpeter) gaudent figura; Crystalli spatosae Natri (Bittersalz pag. 13), hierbei hatte er offenbar sechsseitige **Schwerspathtafeln** im Sinn, wie seine fig. 5 beweist. Da diese immer aufwachsen, so paßt die Beschreibung vorzüglich: Sal figura columnari tetraëdra lateribus alternis angustioribus, apicibusque alterne compressis, was das tetraedrische Dach bezeichnet. Aliae figuram habent Aluminis, ut Adamas, der oben 1735 noch bei Nitrum steht. Ein vortrefflicher Dreikantner von Kalkspath aus dem Asbest von Sahlberg wird Cryst. subnitriformis spatosa acaulis, später 12ëdrum, Scalenis 12, genannt. Zum Muria Steinsalz gehört eine Gruppe gelber Flußspathwürfel, Cryst. muriaeformis spatosa aggregata alba etc. etc. Es handelt sich bei allen immer nur um oberflächliche Bestimmung äußerer Formen, die sich natürlich gar bald ins Unendliche vermehrten. Mineralogisch wurden 4 Genera unterschieden (Cryst. gener. pag. 457):



1) Crystalli salinae in aqua solubiles;

2) Cr. lapideae saepe pellucidae, in igne non fumantes;

3) Cr. sulphureae seu pyriticosae et arsenicales, quae in igne dant fumum olentem;

4) Cr. metallicae, uti Plumbeae, Ferreae, Argenteae etc. quae in igne funduntur.

Linné ließ sich alles, was er fand, in Holz schneiden, wie der Brief von 1775 an R. de l'Isle (Cristallogr. Préface pag. XXI) zeigt, war also auch der Erfinder unserer Krystallmodelle. Aber förmlich geisttödtend wurden die Benennungen, wie sie namentlich durch **Hill** (The History of Fossils 1748. fol. I. 153) in England aufkamen. Den Quarz theilte dieser in drei Ordnungen, 9 Geschlechter und 38 Species: Macrotelostyla, Polyedrastyla, Ellipopachystyla, Pangonia, Arthrodia etc. sind einige Geschlechtsnamen; beim Gyps wurden es Leptodecarhombes, Ischnambluces, Oxuciae, Sanidia etc.; beim Kalkspath Triexahedria, Enneahedria, Tripentaedria etc. Letzteres war eine kurze sechsseitige Säule mit dem nächsten stumpfen Rhomboeder, was später Linné Natrum dodecaëdrum, prismate hexaedro, pyramidibus triedris, planis omnibus pentagonis nannte. Wurde die Säule lang, so hieß derselbe Krystall Pentahedrostyla. Diexahedria hießen die freien Dreikantner, Linné's Natrum Hyodon (Schweinszähne der Bergleute in Dannemora), Hexapyramides dagegen die Aufgewachsenen. Linné stand lange ziemlich allein, denn die Landsleute **Waller** (Mineral-Riket 1747) und **Cronstedt** (Försök til Mineralogie 1758) huldigten der Chemie. Das Resultat seiner krystallographischen Forschungen ist in der XII. Auflage des Systema naturae 1768 mit 39 Krystallfiguren, die aus den beigefügten Netzen besonders klar werden, dargelegt: vorn Quarz und hinten Vitriol. Das Hauptgewicht liegt lediglich auf der Zahl und Form der Flächen, von Kantenwinkeln wird nie gesprochen. Aber die

Vorrede beginnt auch mit der Entschuldigung: »Lithologia mihi cristas non eriget«, denn die Steine, welche einst meine Lieblinge waren, habe ich bei Seite gelegt. Da trat unerwartet ein würdiger Nachfolger auf,

Romé **Delisle** (1736—1790. Essai de Cristallographie 1772), der durch den Meister angeregt, im Sinne des Meisters fortwirkte. Die Form der Seiten und deren Winkel blieben noch die Hauptsache, und bei dem von de la Hire gemessenen Gypse ahnte er schon den Zwilling: paroît produit par deux moitiés retournées en sens contraire d'un sélénite rhomboidale (Essay pag. 137). Das angefügte Tableau Cristallographique beginnt mit dem

1) Prisme hexaëdre und schreitet dann zum Pr. tétraëdre, Pr. octaëdre, Pr. ennéaëdre (Tourmalin) etc.;

2) Tesseres cubiques zerfallen hauptsächlich in cube rectangle, c. obliquangle à 6 Rhombes égaux und à 4 Rhomboides et 2 Rhombes;

3) Tesseres octaedres haben 8 triangles équilatéraux und 8 isosceles, aber dann wird noch alles mögliche damit vermischt;

4) Tesseres tétraedres;

5) Tesseres Rhombéales. Zu allen diesen 5 Körpern gesellen sich dann Pyramiden, die als zutretende Flächen behandelt werden. Den Schluß machen die vereinzelten Dodécaedre, Icosaedre und Icositesseraedre (Leucit). Das Bestreben nach systematischer Anordnung leuchtet an vielen Stellen hervor. Aber noch bilden bei ihm wie bei **Werner** (Von den äußerlichen Kennzeichen der Fossilien 1774. pag. 192) Basaltsäulen die größten bekannten Krystalle, so verschleiert war der Blick vor kaum 100 Jahren. War Werner auch kein Krystallograph, so faßte er doch seine sechs besondern Arten von Grundgestalten klar ins Auge, und bezog sich dabei ausdrücklich auf die Darstellung von Linné:

1) das Zwanzigeck (Dodecaedron), welches aus 12 regelmäßigen fünfseitigen Flächen unter einerley Winkel zusammengesetzet ist, meinte er im Schwefelkies zu erkennen (Aeußere Kennzeichen 167);

2) das Achteck beim würflich crystallisirten Fluß, Bleiglanz, Eisenglanz, Zinnober ꝛc., rautenförmig crystallisirten Kalkspath, spätigen Eisenstein;

3) die Säule (Prisma), aus einer unbestimmten Zahl vierseitiger mit einander gleichlaufenden Seitenflächen bestehend, kommt am häufigsten vor;

4) Pyramide, läuft aus einer unbestimmten Zahl dreiseitiger Seitenflächen in einer Spitze schief zusammen;

5) Tafel; 6) Keil. Die Veränderung der Grundgestalten geschieht durch Abstumpfung, Zuschärfung und Zuspitzung der Kanten und Ecken. Alles das wird mit vielem Geschick und breiter Ausführlichkeit logisch zusammengestellt, aber zu einer Kenntniß des Gesetzes kommt es nicht. Selbst nicht bei Delisle, so sehr dessen Fortschritte (Cristallographie ou

Description des formes propre à tous les corps du règne minéral 1783. 4 Bände) zu bewundern sind. Man möchte sagen, alles sei da und verzeichnet: die regulären Körper bis zum 48flächner und dazu die Zwillinge (Macle de l'octaèdre régulier, produit par une agrégation différente des deux moitiés). Wenn ein Krystall einspringende Winkel zeige, so sei er nicht einfach, sondern bestehe aus deux moitiés retournées d'un même cristal, und heiße dann **Macle** (Bd. I. 93). Am Bavenoer Feldspath hatte schon Pater **Pini** (Mémoires sur de nouvelles cristallisations de feldspath 1779 pag. 34) und an Alpinischen **Saussure** (Voyages dans les Alpes 1779 I. 52) darauf die Aufmerksamkeit gelenkt. Um die schwierigen Formen in Thon nachahmen zu können, mußte Lermina (Cristall. II. 460) die Winkel messen, aber nicht die Kanten, sondern die Seiten, wovon Bd. IV tab. VIII eine ganze Reihe verzeichnet sind. Erst **Carangeot** (Bd. IV pag. 26) erdachte ein Goniomètre, das später sogenannte Anlegegoniometer (tab. VIII fig. 50). Damit war der Höhepunkt der Linné'schen Betrachtungsweise erreicht. Es werden nun zwar 6 formes primitives principales unterschieden, und an die Spitze der Tafeln gestellt, nemlich: 1) tétraèdre; 2) cube; 3) octaèdre; 4) parallélepipède rhomboidal; 5) octaèdre rhomboidal; 6) dodécaèdre à plans triangulaires (Dihexaeder), welchen die formes secondaires sich unterordnen (Bd. I pag. 73), aber das blieb doch noch weit vom glücklichen Ziele. Der anspruchslose Mann, da er nicht Mathematiker war, wurde von der Akademie ignorirt. **Buffon** (Hist. nat. des Minér. 1783. 10) hielt auf die Beständigkeit der Krystallformen nichts, meinte sogar thöricht genug, sie entständen im Schooße der Erde par le mouvement des molécules organiques, wozu ihn die Petrefacten verleiteten. Allein der »Pline françois« wird in der lehrreichen Table des Auteurs von Isle (Bd. III. 573) glänzend widerlegt, non omnia possumus, omnes. Wie wenig Delisle auf die blättrigen Brüche hielt, zeigen die spöttischen Worte (Bd. I Préface pag. XXVII) »Des Novateurs en Cristallographie, qu'on peut nommer Cristalloclastes (brise-cristaux), s'imaginent avoir fait une grande découverte en nous annonçant qu'il n'y a point de troncatures, que la Nature ne tronque point«, welche wahrscheinlich auf Bergman und namentlich Hauy gemünzt waren, dessen erste Arbeit über die Structur des Granats die Academie am 21. Febr. 1781 approbirte. So lag der Todeskeim schon im ersten Aufblühen, die Sache mußte eben anders angegriffen, auf die Ideen von Huygens und Gulielmini zurückgegangen werden. Der berühmte Chemiker

Torbern **Bergman** (1735—1784. N. Acta reg. Soc. Upsal. 1773 Vol. I pag. 150 und Opuscula Phys. Chem. 1780 Vol. II pag. 1) lieferte den ersten Beitrag zum Fortschritt, ohne jedoch scharf auf die Winkelgröße Rücksicht zu nehmen. Er ging vom Kalkspathrhomboeder als Primitivform aus, stellte dasselbe nach der Hauptaxe aufrecht, und dachte sich unten und oben Rhomben von gleicher Größe aufgelegt, so entsteht na-

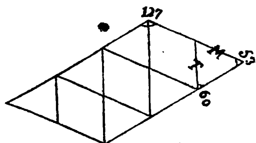
türlich eine sechsseitige Säule mit rhomboedrischen Enden. Halte man mit dem Aufbauen ein, sobald die Säulenflächen Rhomben geworden seien, so entständen nur dodecaedra, quae Granatis sunt propria (Granatoeder). Das ist nun zwar nicht richtig, denn aus dem Kalkspathrhombus, 101 1/2° angenommen, kann nie ein Granatoederrhombus 109 1/2° werden, aber darauf kam es ihm wie dem Delisle nicht an. Jetzt stellte er das Granatoeder, was er gut beschreibt, nach seiner viergliedrigen Axe aufrecht, und bekam dann durch Auflagern gleicher Rhomben eine quadratische Säule mit oktaedrischen auf die Kante aufgesetzten Endflächen, forma granatica in aliam facile migrat, quae Hyacinthos repraesentat. Ließen wir beim Kalkspathkerne die aufgelagerten Rhomben nach einem gewissen Gesetze abnehmen (decrescentia), so entständen die Dentes suilli (Dreikantner). Den Kern darin bemerkte zuerst sein Schüler Jahn, denn wolle man jene Dentes schief gegen die scharfen Endkanten theilen, so gehe das nicht, es gehe nur gegen die stumpfen gemäß der Lage des Kernes. Stumpfe man die Endkanten einer sechsseitigen Säule des Granatoeders ab, so entständen 12 Pentagone, die beim Kalkspath und Pyrites vorkämen. Er drang also noch nicht weiter als Linné und Delisle ein, die ebenfalls sich lediglich durch die Fünfecke bestechen ließen. Erst der Abt

Hauy (Essai d'une théorie sur la structure des Cristaux 1784) erkannte diese Fehler. Eine sechsseitige Säule mit Geradendfläche von Kalkspath hatte sich zufällig bei Defrance von einer Druse abgelöst, und zeigte auf der Bruchfläche den bekannten Glanz »poli de la Nature« (l. c. pag. 10). Wir sehen also auch hier immer wieder dieselbe Entdeckung machen, welche Steno, Huygens, Jahn ꝛc. schon erwähnten. Ja in einer dünnen Broschüre (Westfelds mineralogische Abhandlungen 1767 pag. 41) kann nicht oft genug die Verwunderung ausgedrückt werden, warum bei den Andreasberger „Kalchspathen sich die kleinen rautenförmigen Stücke in Krystalle „von einer andern bestimmten Bildung zusammen fügen. Was konnte „schon gebildete rautenförmige Stücke bewegen, ein gewisses Gesetz anzu„nehmen, nach welchem sie sich in einen Krystall zusammenzogen?“ Aber Hauy dachte nun weiter darüber nach, und nach verschiedenen Versuchen zu Haus (Traité de Cristallogr. 1822. I pag. 32) erhielt er »un rhomboide parfaitement semblable au Spath d'Islande, et qui occupoit le melieu du prisme.« Er griff nun nach andern Formen, deren surface est composée de douze plans pentagones, und fand den gleichen Kern. Um dieselbe Zeit las er Bergman's richtige Ansicht über die Entstehung der Dreikantner, und so wurde es ihm klar, daß alles das durch Aufwachsen von Materie auf den Kern des Spaths entstanden sein könnte. Wie das Steinsalz den Cubus zu Molecülen hatte, so fand er beim Flußspath (Spath phosphorique) das Oktaeder. Er griff dann zum Schwerspath, zum Gyps und fand überall einen Kern. Aber wie die Natur uns verführen kann, zeigte gleich der

Kalkspath: er schlug von der horizontalen Endkante zq der sechsseitigen Säule den blättrigen Bruch aorm ab, drehte ihn um 180° herum, so daß Linie mr nach ao, und ao nach mr fällt, und fand, daß das Säulenflächenstück zqrm vollkommen mit der Geradendfläche aodd einspiegelte, die Kante mußte also durch den Blätterbruch gerade abgestumpft werden, oder der blättrige Bruch mit der Axe 45° machen. Daraus wurde es möglich, den halben stumpfen Winkel des Rhombus auf 50° 46′ 6″ 30‴ zu berechnen! Aus dieser Annahme ging die Invertirung der Rhomboeder hervor, d. h. die Kanten- und Seitenwinkel des Hauptrhomboeders vertauschten sich mit den Kanten- und Seitenwinkeln des ersten schärfern Rhomboeders. Ferner war der stumpfe Winkel des Scalenoederdreiecks von 101° 32′ 13″ dem Rhombenwinkel gleich, und die scharfen Endkanten 104° 28′ 40″ dem Rhomboederwinkel. Aber dennoch war die Sache nicht wahr, und verstieß schon gegen das einfachste Symmetriegesetz, da ungleiche Flächen, wie End- und Seitenflächen, von einer dritten nicht gleich geschnitten werden können. Hauy liebte es, bei allen diesen Formen nicht Delisle, sondern seinen Lehrer **Daubenton** zu citiren, der während seiner Vorlesungen 1779 im Saale des Collége Royal das Manuscript eines Tableau méthodique des minéraux aufgelegt hatte, das 1784 wiederholt gedruckt vom Portier des Museums verkauft wurde. Hauy ging nun zum

Schwerspath (Spath pesant), wo die gelben Oblongoctaeder der Auvergne ihm ein passendes Material boten, und fand als Molécules constituantes und Noyau eine rhombische Säule mit Geradendfläche. Letztere, der deutlichste blättrige Bruch P, zeigte denselben Rhombus wie der Kalkspath von 101° 32′ 13″, damit war die Säule M/M bestimmt, deren gleiche Blätterbrüche etwas minder glänzten. Sie bildeten Rechtecke, die er hypothetisch als Quadrate nahm, d. h. die Seite des Rhombus war so lang als die Höhe der Säule, woraus er dann den Kantenwinkel d/d auf 76° 39′ 27″ berechnete! Schade, daß die Natur nicht nach dieser herrlichen Einfachheit geschaffen hat. Jetzt kam der

Gyps decaèdre Pfl, woran De la Hire zwischen fasrigem Bruch T und Zwillingsgrenze schon 60° gefunden hatte; da nun der Rhombus des Décaèdre 127° betrug, so mußten sich die Seiten des Molecüles verhalten

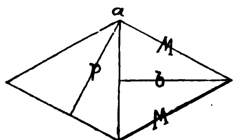


$$T : M = \sin 53 : \sin 60 = 12 : 13\tfrac{1}{78}.$$

Der Bruch wurde vernachlässigt. Ferner wurde die Kante l/l = 144° gefunden, woraus sich die Höhe auf 32 berechnete, und da 60 + 53 = 113, so mußte die Grundform eine rhomboidische Säule von 113° sein, mit den Verhältnissen der dreierlei Kanten 12 : 13 : 32, woraus sich für 2 Reihen Abnahme der Säulenwinkel f/f = 110 . 44 ergab, und

die Rückrechnung für den Rhombus auf P im Decaeder 127 . 22. Beim

Topas ging er von der Annahme aus, daß M/o = P/n = 136° sei

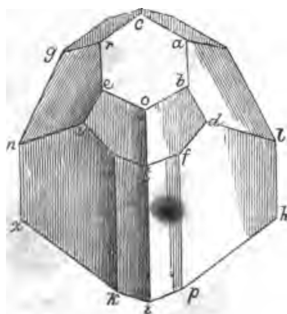


(M = a : b : ∞c, o = a : b : ½c, n = b : c : ∞a, P = c : ∞a : ∞b), und berechnete darnach die Säulenwinkel M/M = 124° 26′. Die Höhe h des integrirenden Molecüls war dann die mittlere Proportionale zwischen der großen Axe = 2b und dem doppelten Perpendickel p vom stumpfen Winkel a auf die gegenüberliegende Seite gefällt, also

$$2b : h = h : 2p, \quad h = 2\sqrt{b \cdot p}.$$

Da er nun b = 15 und p = 14 setzen konnte, so war das einfache Zahlenverhältniß ihm die Bürgschaft für die Wahrheit der Hypothese, und da ferner der Topas nur einen deutlichen Blätterbruch P hat, so ließ er sich in der Wahl der beiden andern Blätterbrüche durch die Brasilianischen Säulenflächen MM leiten. Während wir jetzt in den Beschreibungen hauptsächlich von den Kantenwinkeln ausgehen, und die Seitenwinkel nur nebenbei berühren, machte er es umgekehrt. Da heißt es also vom

Schneckensteiner Topas (Essay pag. 194): Développement. Quatre rectangles étroits, tels que tski, tfpi, qui sont le résidus des faces primitives du prisme. Quatre pentagones irréguliers sunzk, formant les quatre pans larges du prisme. Un exagone un peu irrégulier aboerc, qui remplace le sommet de la pyramide. Deux pentagones eungr, ayant leurs côtés égaux deux à deux, et leurs sommets n, situés sur les arètes nz. Quatre autres pentagones plus irréguliers bdfto, qui correspondent chacun à un pan étroit du prisme, et à une partie du pan large voisin. Dann werden die Flächen noch besonders hingezeichnet, ihre Winkel auf die Minute angegeben, was für jene Zeit ganz unerhört war.



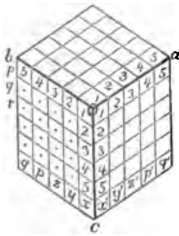
Die Art fand in Wien bei einem ausgezeichneten Mathematiker **Kramp** (Bekkerhinn und Kramp, Kristallographie des Mineralreichs 1793) gleich großen Widerspruch. Derselbe hielt es für reine Hypothese, und nahm gegen die französische Academie den de l'Isle warm in Schutz. Ein Beobachter habe von den **Seitenflächen** auszugehen (l. c. pag. 9), und vor allen deren Linien und Winkel (Seitenlinien und Seitenwinkel) zu messen, und daraus dann die Kanten (Rückenlinien) zu berechnen. Durch Zusammenstoßen der Rückenlinien entstehe der körperliche Winkel (Ek). Die Seitenflächen von den Rückenlinien abgezogen und um zwei vermehrt gäben die Zahl der Ecken. Das Goniometer sei nur ein Nothbehelf, der Mathematiker werde immer lieber die Länge der Rückenlinien

messen, und sei dann seiner **Minuten** gewiß. Wenn trotzdem die Messungen nicht immer mit einander stimmten, so liege darin der Beweis, daß die Natur in der Erzeugung von Winkeln einen Spielraum habe, der beim Kalkspath $1\frac{1}{2}^0$ betrage (l. c. 414). Das Abstumpfen der Kanten sei nur eine Unvollkommenheit der Krystalle, bei weiterem Fortwachsen würden sie vollkommen, und da gäbe es 5 große Geschlechter: Tetraedron; Parallelepipedon, wozu auch der Würfel gehöre; Octaedron; Dodekaedron (Dihexaeder); das reguläre sechsseitige Prisma. Es sei zwar einerlei, ob sich ein Krystall durch Anlagerung neuer Materie oder durch Abstumpfung der Kanten verändere, aber letztere Anschauung sei für geometrische Betrachtung bequemer. Geschehe die Ansetzung neuer Krystallmaterie in vollkommen gleichen Schichten, wie z. B. beim Quarz, so spricht (l. c. 19) er von einem Aequator, Pol, und einer Axe des Krystalls. Er benutzt sogar schon die Kugelprojection (l. c. 427 tab. 8 fig. 4), um die Doppelbrechung des Kalkspaths zu erklären, der Name »Hiodon« (Swintand) für das spätere Scalenoeder ist ihm ganz geläufig. Auch gibt er eine für jene Zeit ganz practische Formel (l. c. 407), um zu berechnen, welche neuen Ecken durch bestimmte Abstumpfungen gegebener Ecken entstehen. Nach mathematischer Manier geht er dabei von der 5seitigen Pyramide aus, nimmt aber beim Schwefelkies das Icosaeder und Dodecaeder regulär, bemerkt jedoch schon bei letzterm (l. c. 413), daß der Rechnung zufolge nach den Angaben von de l'Isle das reguläre Dodecaedron nicht die Mutter des Markasitwürfels sein könne. Er dachte sich nämlich das Pyritoeder als den unvollkommenen Körper, aus welchem durch Anlagerung von Materie der vollkommnere Würfel hervorgegangen sein müsse. Mit Vergnügen durchfliegt man schon die Rechnungen (l. c. 407), wie aus dem Tetraeder durch Abstumpfung der Kanten Würfel, dann Granatoeder, Oktaeder, Leucitoeder ꝛc. entstehen. Ueberall schaut der gewandte Mathematiker durch, der gegen die einseitige chemische Behandlung kämpft, aber dennoch zum Fortschritt nichts Wesentliches beigetragen hat.

Da die **Hexaide** allein durch drei Schnitte parallel den drei Blätterbrüchen in lauter ähnliche Körper (Molecüle) getheilt werden können, die den Raum gleichmäßig erfüllen, so ging Hauy bei seiner Theorie mit Vorliebe von diesen aus. Finden sich daher in irgend einem Minerale drei Blätterbrüche, die sich wie bei Kalkspath, Schwerspath, Gyps ꝛc. in drei Kantenrichtungen schneiden, so muß natürlich stets eine Primitivform und ein „integrirendes Molecül" von der gleichen Gestalt gefunden werden können. Acht Hexaide sind nach dem Symmetriegesetz möglich, und damit wären die Krystallsysteme dagewesen. Aber soweit durchschaute es der große Meister noch nicht. Daß Kalkspath sich leicht zertheilen lasse, also gleichsam aus lauter kleinen Rhomboederchen bestehe, war freilich lange vor ihm bekannt; Huygens hatte es sogar schon durch Anhäufung ellipsoidischer Atome pag. 10 zu erklären gesucht: aber

daß diese merkwürdige Eigenschaft sich bei den verschiedensten Mineralen wiederhole und zur scharfen Rechnung benutzt werden könne, war neu, und wurde auch sofort von der französischen Akademie (Histoire de l'Académ. Roy. 1781 pag. 52) anerkannt. Da die Sache ganz allgemein gilt, so machen wir sie uns am leichtesten mit

Würfeln oder Kugeln klar. Wären nebenstehende Würfelchen, in die wir uns nach den Axen abc orientiren, Salz oder Bleiglanz, so bekämen wir auf den **Kanten** durch Herausnahme einer Reihe (12345 . . . x) auf der Kante oc eine Granatoederfläche a : b : ∞c; durch Herausnahme zweier 1 . . . . x und 2 . . . . y) einen Pyramidenwürfel a : 2b : ∞c. Auf den **Ecken** durch Herausnahme von 1 das Oktaeder a : b : c; durch Herausnahme von zweien 1 und 2 längs a das Pyramidenoktaeder 2a : b : c; durch Herausnahme von dreien 1 2 2 das Leucitoeder a : 2b : 2c, vorausgesetzt, daß die beiden 2 längs b und c genommen sind; durch Herausnahme von vieren 1 2 2 3, und zwar 1 2 3 längs a, und 1 2 längs b, den Achtundvierzigflächner 3a : 2b : c. Alles das ist so elementar, daß man zur Erklärung kein Wort verlieren darf. Aber Hauy faßte die Sache nicht so einfach: er nahm die Würfel nicht weg, sondern thürmte sie drauf, zur Marter des Anschauungsvermögens, und nannte das



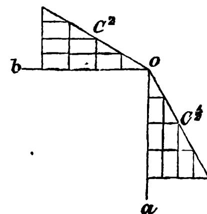
Decrescenzen. Die Decrescenzen auf den **Kanten** sind am verständlichsten und zerfielen in décroissemens en largeur, en hauteur und mixtes. Die Decrescenz um eine Reihe ^1c gibt das Granatoeder, und soll heißen, daß wir links von der Würfelkante c bei der Aufschichtung weiterer Würfelchen auf ao stets je eine Reihe weglassen. Der

Aufriß parallel aob gibt dann nebenstehende Treppe, die auf beiden Seiten gleich ausfällt, daher einer Fläche a : b : ∞c gehört. Eine Decrescenz c^2 um zwei Reihen in die Breite läßt natürlich bei jeder folgenden Schicht zwei Reihen weg, es erscheint dann die Treppe unserer zweiten Figur oben mit dem Ausdrucke

$$c^2 = a : 2b : \infty c.$$

Will ich dagegen zwei Reihen in die Höhe bezeichnen, so muß ich $c^{1/2}$ schreiben, denn jetzt laufen umgekehrt die doppelten Höhen läng[illegible], wir haben daher

$$2a : b : \infty c = c^{1/2}.$$

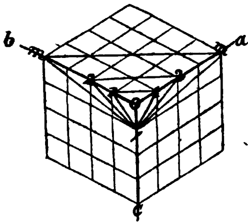


Daraus folgt dann von selbst die gemischte Decrescenz

$$c^{2/3} = 3a : 2b : \infty c,$$

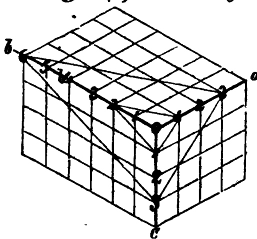
d. h. zwei Reihen in der Breite und drei in der Höhe. Auf der

Ecke o läßt sich die Sache viel schwieriger durch Aufthürmen klar machen. Die Decrescenzen



gehen hier entweder der Diagonale oder einer Zwischenlinie (décr. intermédiaires) parallel. Das Zeichen $\overset{1}{o} = a : b : c$ bedeutet die Decrescenz um 1 Reihe parallel der Diagonale; $\overset{2}{o} = 2a : 2b : c$ um 2 Reihen; $\overset{m}{o} = ma : mb : c = a : b : \frac{1}{m}c$, wo m jede ganze und gebrochene Zahl bedeuten kann. Man versinnlicht sich das auf aob durch die Diagonalschnitte 1 1, 2 2, 3 3, die alle durch den Punkt 1c gehen. Der über o gestellte Index soll andeuten, daß auf aob die Decrescenzen Statt finden, während o^m die Abnahme rechts auf aoc und $^m o$ links auf boc bezeichnet. Läge dagegen der Rand der Decrescenzen in einer

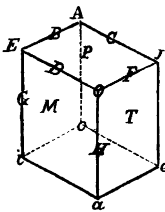
Zwischenlinie, z. B. von 1 nach 2, so würde das mit $a^1 b^2$ bezeichnet werden, und construirte man nach dieser Richtung eine dreireihige Decrescenz in die Breite, so hätte die Fläche das Symbol



$$(\overset{3}{o}a^1b^2) = 3a : 6b : c = a : 2b : \tfrac{1}{3}c.$$

Denn ich darf die Linie 1 2, nur dem Zeichen $\overset{3}{o}$ gemäß nach 3...6 rücken, um den Kantenschnitt vor Augen zu legen.

Mit dem Princip vertraut ist es nun leicht, sich in die Hauy'sche Bezeichnungsweise zu finden, und sie auf die Kantenschnitte der 8 möglichen Hexaide zurückzuführen, welche von ihm (Traité de Minér. 1801 ed. Weiss I pag. 182) schon alle aufgeführt werden. Da jedoch die Menge der Buchstaben immerhin eine große ist, so systematisch er sie auch stellen mochte, so setzte er doch an die Spitze jedes Systemes die Primitivform. Das allgemeinste war die schiefe rhomboidische Säule: für die Flächenzeichen wählte er PMT, was an PriMiTiv erinnern sollte; für die Ecke die Vokale AEJO, und wenn er hemiedrische Formen hatte, sind für die Gegenecken die kleinen Buchstaben aeio; für die Kanten BCDFGH die sechs ersten Consonanten. Da nun für die Stellung des Indexes 4 Punkte existiren, links rechts und oben unten, so konnte die Lage jeder Fläche angegeben werden: H^2 war eine Decrescenz von zwei Reihen in die Breite rechts auf T, der Kantenschnitt muß also 2F : D : ∞H sein; ^2H war dagegen eine links auf M, also F : 2D : ∞H; $\overset{2}{D}$ eine auf P, $\underset{2}{D}$ eine auf M; G^2 eine auf M, denn man muß sich immer der Kante gegenüber denken. O^2 ist eine Decrescenz um zwei Reihen nach der Diagonale Ja (a dem A gegenüber gedacht), daher 2F : 2H : D; $\overset{2}{O}$ auf P, daher 2D : 2F : H

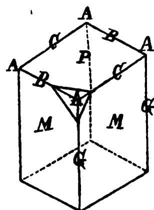


$= D : F : \frac{1}{2}H$. Eigentlich sollte er schreiben $(\overset{2}{O}D^1F^1)$, allein bei der diagonalen Lage nimmt man D^1F^1 als selbstverständlich an. Bei der intermediären Lage, z. B. nach einer Linie D^1F^2, d. h. wo der Decrescenzrand einer Linie $1D : 2F$ parallel geht, muß es angegeben sein. Es wird eine Fläche

$$\overset{3}{O}D^1F^2 = D : 2F : \tfrac{1}{3}H = 3D : 6F : H.$$

Ein besonderer Uebelstand bei letztern intermediären Decrescenzen ist ihre Dreideutigkeit, worauf schon Weiß (Abh. Berl. Akad. 1816 pag. 286) aufmerksam machte. Hauy gab z. B. beim Schwefelkies die Flächen an:

$$f = ({}^{3/2}AG^2C^1) = C : 2G : \tfrac{2}{3}B = \tfrac{1}{2}C : G : \tfrac{1}{3}B$$
$$s = ({}^{2}AG^2C^1) = C : 2G : \tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2}C : G : \tfrac{1}{4}B$$
$$n = ({}^{5/3}AC^1G^3) = C : 3G : \tfrac{5}{3}B = \tfrac{1}{3}C : G : \tfrac{1}{5}B$$



Es sind das die bekannten drei Achtundvierzigflächner 1 2 3, 1 2 4, 1 3 5, allein es ließe sich das noch auf zweierlei andere Weise geben. Wollte ich den Axenschnitt $1C : 2B : 3G$ ausdrücken, so wäre derselbe:

$$(A^1G^3B^2) = ({}^{1/2}AC^1G^3) = (\overset{\frac{1}{3}}{A}C^1B^2),$$

denn alle drei Symbole führen zu demselben Resultate $C^1B^2G^3$. Es ist das immerhin ein Uebelstand für ein Zeichen.

Aber Hauy blieb nun nicht einmal bei den Hexaiden stehen, sondern da er an Flußspath einen oktaedrischen Blätterbruch fand, so mußte das Oktaeder Primitivform werden, so wichtig war ihm die Darstellung des Kerns, und Delisle (Cristallographie III. 586) hatte insofern nicht Unrecht, wenn er voraus verkündigte, die nachfolgenden Arbeiten desselben würden einen traité complet de Cristallotomie bilden. Spaltet man nemlich das Oktaeder nach seinen vier Blätterbrüchen, so kommen 6 ähnliche Oktaeder und 8 zugehörige Tetraeder, welche alle eine ihrer Ecken im Mittelpunkte des großen Oktaeders haben. Die gegenüberliegenden Ecken der 6 Oktaeder fallen dagegen in die 6 Ecken, und die Basen der 8 Tetraeder in die 8 Flächen des Hauptoktaeders. Das war schon die Gulielminische Idee pag. 12. Man macht das durch Einzeichnung von Dreiecken leicht klar.



Das mittlere Dreieck auf jeder Fläche bildet die Basis des Tetraeders, was wieder durch Abstumpfen der Ecken im Kern ein Oktaeder gibt. Theile ich daher die 16 Dreiecke nochmals, so gehören von den 64 Dreieckchen abwechselnd die lichten den Tetraedern, die dunkeln den Oktaedern. So ins Unendliche fortfahrend kann ich den Flußspath aus lauter parallelen Oktaederchen zusammengesetzt denken, mit welchen tetraedrische Zwischenräume abwechseln. Da nach der ersten Theilung der Inhalt der 8 Tetraeder nur $\frac{1}{4}$ von dem der 6 Oktaeder beträgt, wie aus der Viertheilung des großen Oktaeder-

dreiecks folgt, so sind, wenn man die 6 Oktaeder als integrirende Molecüle nimmt, 3 Theile erfüllt und 1 Theil leer. Bei der zweiten Theilung macht sich das Verhältniß schon anders, denn da jedes der 6 Oktaeder wieder 6 neue Oktaeder und 8 Tetraeder geben muß, ein jedes der 8 Tetraeder ein Oktaeder und vier Tetraeder, so bekomme ich

$6 \cdot 6 + 8 = 44$ Oktaeder und $6 \cdot 8 + 4 \cdot 8 = 80$ Tetraeder, d. h. oktaedrische Masse verhält sich zu den tetraedrischen Zwischenräumen, wie

$$44 : \frac{80}{4} = 11 : 5,$$

was sich bei weiterer Zertheilung immer mehr dem Verhältniß 2 : 1 nähert (Traité I. 466). Das Spiel der Decrescenzen ist zwar jetzt noch schwieriger zu begreifen, aber man sieht doch leicht ein, wenn ich ein solch schwarzes Oktaederchen von den Spitzen wegnehme, so entsteht eine kleine Würfelfläche; eine Reihe von den Kanten weggenommen gibt Granatoeder; kurz man darf statt der Decrescenzen nur die Kantenschnitte nehmen, wie das später Bernhardi machte, um alle Körper sofort hervorzubringen. Das **Granatoeder** war eine dritte Form, welche so vollkommen beim Granat und so deutlich 6fachblättrig bei der Blende vorkommt. Schon Maraldi (Mémoir. Acad. Roy. 1712 pag. 297) hatte an den Waben, die nach der Meinung des alten Pappus (4. Jahrh. nach Chr.) bei den Bienen geometrische Fähigkeiten voraussetzten, die Winkel der Rhomben auf 109° 28′ und 70° 32′ bestimmt. Dieses zierliche Gefäß vom kleinsten Umfange klaubte nun der »Cristalloclast« aus den »grenats volcanisés de Pompéia« (Leucit) heraus! Er konnte es ferner in drei Rhomboeder von 120°, die ihre Spitzen gegen den Mittelpunkt kehren, theilen. Das Ganze zerfiel aber durch die sechs Blätterbrüche in 24 Tetraeder mit gleichschenklichen Dreiecken, die der scharfwinklichen Hälfte der Rhomben entsprechen und alle ihre Spitzen im Mittelpunkt haben. Diese harmonischen Verhältnisse entzückten ihn so, daß es die erste seiner veröffentlichten Arbeiten wurde, welche die Akademie »vers la fin de l'année 1780« approbirte. Die letzten Theile, in welche die Krystalle durch Spaltung zerfallen, nannte er molécules integrantes im Gegensatze zu den mol. soustractives, welche er zur Rechnung brauchte. Integrirende nahm er nur drei an:

Tetra-, Penta- und Hexaeder, 4-, 5- und 6flächner.

Letztere hätte er nicht einmal gebraucht, da die Hexaide durch einen Medianschnitt in zwei Pentaeder zerfallen. Allein einen solchen Hilfsschnitt wollte er nicht, er meinte sich eben immer ängstlich an die wirklich vorhandenen Blätterbrüche halten zu müssen. Beim Zerlegen der Oktaeder kam er natürlich stets auf zweierlei Molecüle, Oktaeder und Tetraeder, da letztere die größere Zahl bildeten (8) und am einfachsten waren, so sahe er die Minderzahl (6 Oktaeder) als Zwischenräume an. Alles das wurde im Traité de Minéralogie 1801, 4 Bd., mit einem

Atlas vorzüglicher Figuren, wobei ihm die Pariser mathematischen Schulen behilflich waren, weitläufig auseinander gesetzt. Die Behandlung fand freilich mancherlei Widerspruch.

Weiß, welcher mit Karsten zusammen den Traité verdeutschte, (Lehrbuch der Mineralogie, ausgearb. vom Bürger Hauy 1804. I pag. 364) setzte nicht blos seine dynamische Ansicht der atomistischen entgegen, sondern wob gleich in jene speculative Polemik die fruchtbringendsten Ideen: der Abstoßungswinkel, welcher eine bestimmte Krystallisation charakterisire, könne bald ein ebener, bald ein körperlicher sein. Als **ebener** wirke er blos nach zwei Richtungen, wie beim Baryt und Gyps, erzeuge zwei Blätterbrüche, worauf der dritte gleichsam erst aufgesetzt sei; als körperlicher würde er dreifach (Rhomboeder, Würfel) oder vierfach (Oktaeder). Den sechsfachen könne man entbehren, denn alle übrigen reducirten sich darauf ohne Zwang, namentlich auch das Rhomboidal-Dodecaeder. Als Kerngestalt dürfe nie die einfache vierseitige Pyramide, sondern nur die doppelte, das Oktaeder, angenommen werden; so wie für die dreifache das Hexaeder, nicht das Tetraeder, weil jede Krystallisationsrichtung bei völligem Gleichgewicht der Kräfte paralleler Flächen bedürfe. Die doppelt-dreiseitige Pyramide könne nie Kerngestalt werden, da sie sechs sich schneidende Flächenrichtungen besitze, die von einer dreifachen Repulsion nicht zu Stande kämen, und die wenn sie ursprünglich wären, nur die doppelte sechsseitige Pyramide oder das Triangulär-Dodecaeder zur Kerngestalt geben würden. Außer den primitiven gäbe es auch secundäre Krystallisationsrichtungen, namentlich durch „versteckte Blätterdurchgänge“ verrathen, die wesentlich zur innern Structur gehörten. Wie schon nach den Decrescenzen auf den Kanten die beiden Flächen gleich oder ungleich, auf den Ecken alle drei gleich, zwei gleich von dritten verschieden und alle drei ungleich von den hinzukommenden Flächen geschnitten würden, so sei das Phänomen kein zufälliges, sondern nothwendige Folge des Einen aus dem Andern. An Molecüle dürfe man gar nicht denken, schon die Spiegelung des Lichtes würde auf solchen Pseudoflächen ganz unmöglich sein. Im zweiten Bande (1804 pag. 711) wird auch an derben Stücken bewiesen, daß die Krystallisationen nur die Aeußerungen dessen seien, was im Innern alles schon da ist. Die **dreifachen** Abstoßungen werden am Kalkspath und Quarz erläutert (Idee des dreigliedrigen S.); die **zweifachen** am Topase, M und M die einen, n und n die andern, beide so gegeneinander gestellt, daß ihre Kanten sich senkrecht schneiden (Idee des zweigliedrigen S.). Die Flächen n und n stumpften ihre eigene Kante ab durch die Fläche P. Nun wirkten MM auf P, oder die zweite Hauptabstoßung, und diese gliche sich aus mit ihr durch die Flächen oo, noch weiter durch ss ($o = a : b : \frac{1}{2}c$, $s = a : b : \frac{1}{3}c$). Interessanter Weise sei o/P = 134 . 1 gerade so groß, wie die Neigung von n gegen die scharfe Kante der ersten Hauptabstoßung M/M, und n/P so groß als o/M. Endlich gleiche sich o und n noch durch x aus

($x = a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{4}c$). Auch der Feldspath habe zwei Hauptabstößungen P und M unter rechtem Winkel, und T/l unter 120°. Denn l sei mit T durchaus gleichwerthig. Am Schluß wird dann schon auf horizontale, vertikale und zwei schräge Zonen hingewiesen. Wie tief und anders Weiß die Sache schon damals erfaßte, zeigt der Zusatz zum Epidot (Bd. III. 1806. 140), der nicht blos richtig gestellt, sondern dessen Ausgleichungsflächen (d, z, q 2c.) aus dem Parallelismus von Kanten, also durch Deduction von vorhandenen Ebenen, bestimmt werden. Anders, mehr von der mathematischen Seite, griff Medicinalrath

Bernhardi (Gehlen, Journal Chem. Phys. Miner. 1807 Bd. IV. 230) in Erfurt die Sache an. Schon Werner habe zwischen einer repräsentativen und derivativen Bestimmungsart der Krystallisation unterschieden. Zu letzterer fand Hauy unstreitig das Princip. Aber gewiß sei, daß die verschiedenen Krystallgestalten oft weit einfacher aus einer Form folgten, die nach Hauy's Grundsätzen nicht die primitive sei: Hr. Dr. Weiß habe dieses schon einigermaßen vom Feldspathe gezeigt, und eben so verhielte es sich mit vielen andern, unter welchen er nur den Wolfram als ein ausgezeichnetes Beispiel nennen wolle, dessen Primitivform viel bequemer als ein irreguläres Oktaeder ru ($r = a : b : \infty c$, $u = b : c : \infty a$) mit quadratischer Basis dargestellt werde. Man könne mit Hauy alle Grundformen in regelmäßige und unregelmäßige eintheilen. Die regelmäßigen betreffend reiche eine einzige hin, ob man dazu den Würfel oder das regelmäßige Oktaeder wähle, sei ziemlich gleichgültig; Tetraeder und Rhombendodecaeder hätten dazu einige Unbequemlichkeit bei Bestimmung der Decrescenzgesetze. Die unregelmäßigen zerfielen wieder in Rhomboeder und unregelmäßige Oktaeder, denn alle bisher vorgekommenen völlig auskrystallisirten Substanzen ließen sich auf eine dieser beiden zurückführen. Hauy unterscheide zwar spitzige und stumpfe Rhomboeder, zwischen welchen der Würfel die Grenze mache, allein wenn man weiter nicht die Durchgänge der Blätter berücksichtige, so bliebe es gleichgültig, welche man für die Primitivform annähme. Wesentlicher seien dagegen die Unterschiede der unregelmäßigen Oktaeder. Man könne sie in fünf Abtheilungen bringen, nach der verschiedenen Gestalt der gemeinschaftlichen Basis der beiden Pyramiden:

1) Basis ein **Quadrat**, zur Construction zwei Data nöthig, wozu man die halbe Basis des Quadrats und die Höhe der Pyramide wähle;

2) Basis ein **Rechteck**;

3) Basis ein **Rhombus**, drei Data zu beiden erforderlich;

4) Basis ein **Rhomboid**, zu dessen Construction drei Daten, daher im Ganzen vier zu wissen nöthig. In diesen ersten vier Fällen seien die beiden andern Basen und alle vier Seitenlinien derselben gleich, dagegen dienten bei den

5) **drei Rhomboide** zu Basen, da man jedes Oktaeder in drei verschiedenen Richtungen als aus zwei Pyramiden zusammengesetzt ansehen

könne. Zur Construction bedürfe es sechs Data. (Da wir die Oktaeder nicht nach ihrer absoluten sondern relativen Größe betrachten, so brauchen wir heutiges Tages statt 2—6 nur 1—5 Daten.) Eine von diesen sieben Hauptformen dürfte in Zukunft noch eingehen, nämlich das Oktaeder mit rektangulärer Basis sollte auf das mit Rhombus zurückgeführt werden, doch sei das wegen des Staurolithes noch nicht möglich, wenn man nicht zu hypothetischen Krystallisationsflächen seine Zuflucht nehmen wolle. Nun deutlicher kann man nicht sprechen, und das ist im Juni 1807 gedruckt! Bernhardi verwarf zwar die Molecüle, allein zu den Axen gelangte er nicht, sondern blieb für die Flächenzeichen bei den Kantenschnitten stehen, welche er jedoch auf eine äußerst glückliche Weise verbesserte (Gehlen Journ. 1807 V. 155). Statt des einfachen Hexaides wählte er das Oktaid, bezeichnete die vier Flächen ganz in Haüyscher Art mit PRMT, die drei Ecken mit AEO und die sechs Kanten mit BCDFGH, und gab dann unbekümmert um die Molecüle blos an, in welchem Verhältnisse drei Kanten einer Ecke von der zu bezeichnenden Fläche geschnitten werden. Dabei machte er die höchst praktische Bemerkung, daß es zweckmäßiger sei, statt der ganzen Zahlen Brüche mit dem Zähler 1 einzuführen. Die Zahlen der Nenner wurden dadurch nicht nur kleiner, sondern er hatte dabei auch schon den Vortheil unserer Kantenzonenrechnung im Auge. Denn es verhält sich

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{5} = 15 : 10 : 6.$$

Um das Symbol dann noch weiter zu vereinfachen, ließ er den Zähler 1 weg, behielt blos den Querstrich bei, bis zuletzt auch dieser fiel. Ein Beispiel am regulären Systeme mag das klar machen:

$$10\overset{15}{A}6 = \tfrac{1}{3}\overset{\frac{1}{2}}{A}\tfrac{1}{5} = \overline{3\overset{\overline{2}}{A}5} = 3\overset{2}{A}5 = 3\overset{2}{\underset{6}{A}}5.$$

Der vierte Schnitt ergibt sich durch die bloße Addition, da 3 + 5 = 6 + 2 sein muß, wäre also 6 = x, so käme

$$3 + 5 = x + 2,\ x = 3 + 5 - 2 = 6.$$

Natürlich ließen sich auf diese Weise alle Flächen ausdrücken, denn um eine reguläre Oktaederecke müssen acht liegen:

$$3\overset{2}{\underset{6}{A}}5,\ 5\overset{2}{\underset{6}{A}}3;\ 2\overset{3}{\underset{5}{A}}6,\ 6\overset{3}{\underset{5}{A}}2;\ 2\overset{5}{\underset{3}{A}}6,\ 6\overset{5}{\underset{3}{A}}2;\ 3\overset{6}{\underset{2}{A}}5,\ 5\overset{6}{\underset{2}{A}}3.$$

Bernhardi führte das nun durch alle Systeme consequent durch (Gehlen Journ. V. 185—198; 492—564; 625—654). Weiß (Abh. Berl. Akad. 1816 pag. 294) widersprach dem, meinend, daß eine solche Zurückführung auf einfache Bruchformen bei x Quarz, welches die Rhomboederkanten nach Haüy im Verhältniß von $1 : \frac{1}{2} : \frac{5}{8}$ schneide, nicht möglich sei! Und doch darf man nur mit 5 dividiren, um zum gleichwerthigen Ausdruck $\frac{1}{5} : \frac{1}{10} : \frac{1}{8}$ von verlangter Eigenschaft zu kommen. Bernhardi (Schweigger, Journal Ch. Phys. 1823. VIII. 402) führte nun mit vernichtender Kritik seine mathematischen Hiebe nicht blos gegen Mohs und Hausmann, son-

dern auch gegen Weiß. Diesem mit seinen drei rechtwinklichen Axen abc mußte er zwar Einiges in Beziehung auf „Nebenzwecke“ zugeben, aber im „Hauptzwecke“ hielt er seine Methode hoch über alle: aus der **Kantenbezeichnung ließen sich die Axenschnitte ablesen.** Denn aus obigen Axenschnitten folge sofort

$$\frac{2a}{6+2} : \frac{2a}{6-2} : \frac{2a}{5-3} = \frac{a}{4} : \frac{a}{2} : a.$$

Ich darf nur unter 2a die Summe oder Differenzen der Zahlen setzen, wie später bewiesen wird. Freilich kam diese einfache Regel erst dem Bernhardi in Sinn, als Weiß schon viel früher (Abhandl. Berl. Akad. 1818 pag. 300) eine allgemeinere Bezeichnung aufgestellt hatte.

Mag uns auch der Weiß'sche Irrthum unbegreiflich erscheinen, so tritt gerade einem Bernhardi gegenüber dessen geniale Behandlung in ein um so glänzenderes Licht. Bernhardi (Gehlen Journ. 1808 VIII. 360) übte nicht blos Kritik, sondern er förderte auch, und griff sogar seiner Zeit vor, denn wir wollen der merkwürdigen Worte (l. c. 378) nicht vergessen: „Man macht sich eine unrichtige Vorstellung von der Kry„stallographie, wenn man glaubt, ihr Wesen bestehe in der Bestimmung „der primitiven und secundären Formen. Denkt man sich auf jede „Krystallisationsfläche eine senkrechte Linie gezogen, läßt alle diese Linien „in einem gemeinschaftlichen Punkte sich schneiden, bestimmt das Ver„hältniß dieser Linien trigometrisch, und gibt auf diese Weise die Lage „der Richtungen an, nach welchen sich die Theile mehr oder weniger „angezogen haben, so erhält man eine krystallographische Methode, die „der Theorie weit angemessener, aber in der Ausführung mit mehr „Schwierigkeiten verbunden sein würde.“ Neumann hat diese Idee später ausgeführt, für einen Mathematiker lag freilich die Sache seit Euler sehr nahe.

Hauy nahm von diesen Verbesserungen keine Notiz, in seinem Tableau comparatif des résultats de la Cristallographie, Paris 1809, worin die Fortschritte und Verbesserungen seit dem Erscheinen des Traité zusammengestellt werden, ist weder von Weiß noch Bernhardi die Rede, Feldspath und Epidot erscheinen noch in alter Weise. Der integrirenden Molecüle erwähnt er jedoch nicht mehr, und da die subtractiven selbstverständlich sind, so führt er nur noch die Primitivform auf. Wir dürfen uns darüber nicht verwundern: wenn z. B. auch Schwerspath und Cymophan einem Krystallsysteme angehören, so steckt in jenem ein Haufwerk von Prismes droits à bases rhombes, in diesem Prismes droits rectangulaires. Das ließ sich nach seiner Ansicht nicht vereinigen. Dagegen empfiehlt er für schärferes Erkennen der Blätterbrüche das Kerzenlicht.

Weiß trug seine neuen Ideen lange mit sich herum. Erst in der Dissertation (de indagando formarum crystallinarum charactere geometrico principali 1809), womit er sein neues Lehramt als ordentlicher Professor

der Physik in seiner Vaterstadt Leipzig antrat, bekommen wir einige Einsicht. Sie ist von Brochant de Villiers auch ins Französische übersetzt (Journal des mines 1811 Vol. 29. pag. 349 und 401). Zum ersten Mal wird hier die Wichtigkeit der Axen hervorgehoben: Axis vero linea est omnis figurae dominatrix, circa quam omnia aequabiliter sunt disposita. Eam omnia spectant, eaque quasi communi vinculo et communi inter se contactu tenentur l. c. 42 u. 44. Jene Linien seien nicht rein geometrisch, i. e. physice mortuas et ignavas, sondern nach ihnen wirken die Kräfte, welche die Form bilden. Daher bestehe das wesentlichste Kennzeichen in der Neigung der Fläche zur Axe, im Verhältniß des sinus (s) zum cosinus (c). Auch komme man dabei auf einfachere Zahlen, als bei Angabe der Kantenverhältnisse. Beim Kalkspath und Schwerspath hätten die Diagonalen der Rhomben das Verhältniß von $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, und beim Apatit die Neigung der Dihexaederfläche zur Axe $s : c = \sqrt{3} : \sqrt{2}$, wer sollte hierin nicht eine »consanguinitas« beider Minerale vermuthen? Sehr beachtenswerth sei es, daß sowohl Würfel wie Oktaeder in der Flächenneigung zur Axe $s : c = 1 : \sqrt{2}$ mit einander übereinstimmten. Nachdem (l. c. pag. 7) die regulären Krystallisationen von den »minus regularibus« abgeschieden, stellte er unter diesen die Rhomboeder an die Spitze, welcher Name schon im Lehrb. Miner. 1804. I. 73 für das Hauy'sche Rhomboid eingeführt wurde, und zeigte, wie mit s und c die Rechnungen eleganter würden. Hauy ging nämlich von der Diagonale $p : g = \sqrt{2} : \sqrt{3}$ aus, statt nun einfach die tg des Winkels $\frac{g}{p}$ zu schreiben, machte er große Umwege, die unbegreiflich sein würden, hätte es sich dabei nicht auch zugleich um das triangle mensurateur (Messungsdreieck) gehandelt. Wenn der Kalkspath $g : p = \sqrt{3} : \sqrt{2}$, so hatte $s : c = 1 : 1$; der Quarz $g : p = \sqrt{15} : \sqrt{13}$, dagegen $s : c = \sqrt{5} : \sqrt{8}$ 2c., die Zahlen $s : c$ waren also einfacher! Vortrefflich wird nun die Abtheilung der Rhomboëdra simplicia, ternis tantum planis (plana duo parallela pro uno numerantur) von den rhomboëdris duobus unterschieden, die sich so unter einander verbinden, daß daraus ein dodecaëdron bipyramidale planis triangulis aequicruriis aequalibus et similibus hervorgeht, wozu Quarz, Buntblei, Apatit, Smaragd, Nephelin gestellt wird. Von den Rhomboedern seien nun aber die übrigen Parallelepipede so verschieden, daß sie völlig getrennt, und durch Oktaeder ersetzt werden müßten. So kommt zuerst (l. c. 30) die Reihe an ein Oktaeder mit congruenten gleichschenklichen Dreiecken und quadratischer Basis, zu welchen sich die Parallelepipeda rectangula et basi quadrata gerade so verhielten wie der Würfel zum regulären Oktaeder. Sodann wird in der ersten lateinischen Vorlesung de Charactere geometrico principali formarum crystallinarum octaedricarum pyramidis rectis basi rectangula ob-

longa, d. h. über das Oblongoktaeder gesprochen, und damit schon der Typus des zweigliedrigen Systems festgestellt. Namentlich wird auch das dritte zugehörige Paar hervorgehoben, nachgewiesen, wie die octaëdra basi rhombo davon abgeleitet werden können, wie die »axis lucifer« (optische Axe) des Bernhardi von der Krystallaxe beim Schwefel nicht abweiche. Nur Feldspath, Epidot, Axinit, Gyps und Kupfervitriol werden für die zukünftige Beschreibung aufgespart.

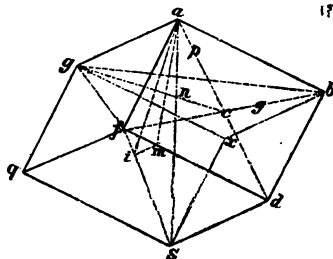
Endlich trat am 14. December 1815 in der Berliner Akademie die „Uebersichtliche Darstellung der verschiedenen natürlichen Abtheilungen der Krystallsysteme" ans Licht. Was Hauy in seinem Essay und Traité vereinzelt erkannt hatte, schließt sich hier zu einem nothwendigen Ganzen. Die Arbeit befriedigt uns für alle Zeiten, und wohl durchdacht und vollendet bleibt sie ein unvergängliches Monument deutschen Tiefsinns. Hier hören wir nun zum ersten Male die passenden Bezeichnungen gleichgliedriges, 4 gl., 2 und 2 gl., 2 + 1 gl., 1 und 1 gl., 3 und 3 gl., und 6gliedriges System. Granatoeder, Leucitoeder, Pyramidenwürfel, Pyramidenoktaeder, Pyramidengranatoeder, Pyramidentetraeder, Tetraeder, Oblongoktaeder und andere vortreffliche Bezeichnungen ergeben sich wie von selbst. Tetraedrische, Pentagondodecaedrische und gedrehte Hemiedrie werden uns klar gemacht, die drei- und sechsgliedrigen Systeme auf vier, und die übrigen auf drei rechtwinkliche Axen bezogen.

Das äußerste, wozu Hauy in systematischer Beziehung gelangte, enthält sein Mémoire sur une loi de la Cristallisation appellée loi de symetrie Mémoir. du Muséum d'hist. nat. 1815. I. 81. 206. 273. 341), das später auf Anrathen von Leonhard Dr. Hessel ins Deutsche übersetzte (Hauy's Ebenmaaßgesetz der Krystall-Bildung 1819), worin gezeigt wird, daß die Decrescenzgesetze gleiche Kanten und Ecken der „Urformen" in gleicher Weise treffen müssen.

Feldspath war das Lieblingsmineral unseres Weiß, und an ihm, als einem der schwierigsten Systeme, hat er hauptsächlich seine Theorie dargestellt. Gleich in der Uebersetzung des Traité 1804 II. pag. 711 weist er nach, wie unpassend die Wahl der Primitivformen PMT sei, man müsse von PMTl ausgehen. In Schweigger's Journal für Chem. und Phys. 1814 X. 223 werden die Carlsbader Zwillinge in wahrhaft meisterhafter Weise dargestellt: Hauy dachte sich nämlich bei Zwillingsbildungen ein Individuum nach der sogenannten Zwillingsebene halbirt, und beide Hälften dann um 180° gegeneinander verdreht, was er **Hemitropie** oder hemitropische Krystalle nannte. Weiß machte dagegen die feine Bemerkung, daß man bei diesem Feldspathzwillinge mit solcher Halbirung nicht zu Stande käme, denn die parallel M gesprengten Stücke verhielten sich wie links und rechts, man müsse zwei Individuen spalten, um dann aus ihren Hälften einen **linken** und einen **rechten** Zwilling zusammensetzen zu können. Auch sei das Gemeinhaben irgend einer einzelnen Fläche wie etwa M ganz unwesentlich, „die Grenze sei eben zackig,

oder überhaupt wie und wo sie wolle; das constante bleibe: Gemein„schaft (Parallelismus) gewisser Richtungen, umgekehrte Lage gewisser „andern." Dann kam 1815 (Abh. Berl. Akad. pag. 336. Tabelle) die Begründung des 2 + 1gliedrigen Systems mit dem Feldspath an der Spitze, und mit der „krystallographischen Fundamentalbestimmung des Feldspathes" (Abh. Berl. Akad. 1816 pag. 231) begann die neue Art der

Rechnung. Haüy, und nach ihm Bernhardi, ging vorzugsweise von äußern Linien, den Kanten, Weiß dagegen von innern den Axen aus. Norm war für jenen das Rhomboeder: er zog im Rhombus abdf die horizontale Diagonale bf und die schiefe ad, und setzte deren Hälften $bc = g$ und $ac = p$. Dann war $af = \sqrt{g^2 + p^2}$. Das Perpendikel am auf df gefällt gibt uns die Höhe des besagten Rhombus abdf, daher für den **ebenen Winkel**



$$am \,.\, df = ac \,.\, bf = p \,.\, 2g \text{ oder}$$

$$am = \sqrt{\frac{4g^2p^2}{g^2 + p^2}} \text{ und}$$

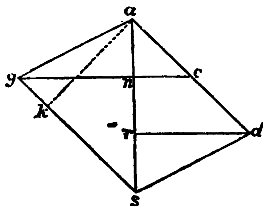
$$fm = \sqrt{(af)^2 - (am)^2}$$

$$= \sqrt{g^2 + p^2 - \frac{4g^2p^2}{g^2 + p^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{g^4 - 2g^2p^2 + p^4}{g^2 + p^2}}.$$

Dreieck bfg von drei horizontalen Diagonalen umschlossen ist gleichseitig, daher steht gc senkrecht auf $bf = 2g$, und $gc = \sqrt{4g^2 - g^2} = \sqrt{3g^2}$. Legen wir jetzt durch gad einen

Hauptschnitt, so wird, da $ac = cd$ ist, Axe as durch die Perpendikel gn und dr in drei gleiche Theile getheilt, denn $rs = an$, und



$$ra : na = dr : cn = ad : ac = 2 : 1.$$

Folglich $gn = \frac{2}{3}(gc) = \sqrt{\frac{4}{3}g^2}$,

$$cn = \sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}, \text{ und}$$

$$an = \sqrt{(ac)^2 - (cn)^2} = \sqrt{p^2 - \tfrac{1}{3}g^2},$$

$$as = \sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

Das Perpendikel ak senkrecht auf gs findet sich wieder aus dem Quadratinhalt des Rhomboides, denn es ist

$$ak \,.\, gs = gn \,.\, as = \text{Inhalt des Rhomboides adsg. Folglich}$$

$$ak = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}g^2(9p^2 - 3g^2)}{4p^2}} = \sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{p^2}}.$$

$$kg = \sqrt{(ag)^2 - (ak)^2} = \sqrt{g^2 + p^2 - \frac{3g^2p^2 - g^4}{p^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{p^4 - 2g^2p^2 + g^4}{p^2}},$$

$$ak : kg = \sqrt{3g^2p^2 - g^4} : g^2 - p^2.$$

Für den **Zickzackkantenwinkel** der Flächen abdf mit dfqs muß mi senkrecht auf df gezogen werden, dann fällt der sinus ai in den Hauptschnitt afsx, und es wird ai = ak, daraus folgt

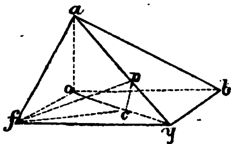
$$am : ai = \sqrt{\frac{4g^2p^2}{g^2 + p^2}} : \sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{p^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{4p^2}{g^2 + p^2}} : \sqrt{\frac{3p^2 - g^2}{p^2}},$$

$$am : im = \sqrt{\frac{4p^2}{g^2 + p^2}} : \sqrt{\frac{4p^2}{g^2 + p^2} - \frac{3p^2 - g^2}{p^2}} = 2p^2 : g^2 - p^2.$$

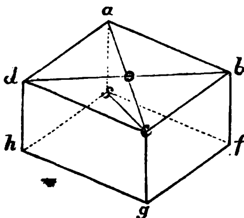
Beispiel. Beim stumpfen Rhomboeder des Kalkspathes wurde an = cn = 1 angenommen, folglich $ac = \sqrt{2}$, $ag = \sqrt{5}$, d. h. $p = \sqrt{2}$ und $g = \sqrt{3}$. Gibt

$$af : fm = 5 : 1 \text{, ctg fam} = \cos : \sin = \sqrt{25 - 1} : 1$$
$$= \sqrt{24} \ldots\ldots 11^0\ 32'\ 13'' \ldots\ldots 101 . 32 . 13$$
$$am : im = 4 : 1 \text{, tg ami} = \sin : \cos = \sqrt{16 - 1} : 1$$
$$= \sqrt{15} \ldots\ldots 75^0\ 31'\ 20' \ldots\ldots 104 . 28 . 40$$
$$ak : kg = 3 : 1 \text{, ctg kag} = \cos : \sin = 3 : 1$$
$$= 3 \ldots\ldots 18^0\ 26'\ 6'' \ldots\ldots 108 . 26 . 6$$

Schon diese kleine Rechnung der Kanten und Seiten der Rhomboeder machte so viel zu schaffen. Nun kamen fünferlei Decrescenzen auf der Hauptecke, den obern und untern Seitenecken, End- und Seitenkanten, nebst vier intermediären, und dann war man erst mit den einzelnen Körpern fertig, worauf dann die Formeln für die Winkel der formes composées folgten. Es waren das äußerst mühselige und zum Theil schwerverständliche Arbeiten. Wollte man z. B. den Winkel ay eines **Dreikantners**, welcher über der schiefen Diagonale ad (durch n Decrescenzen in der Breite auf den Kanten ab und af) entsteht, suchen, so mußte vor allem der triangle mensurateur (Messungsdreieck) fpc des halben Winkels angebracht werden. Zu dem Ende zog er die Axe ao, und senkrecht dagegen die horizontale Ebene byfo, sowie durch fc die Ebene fcp senkrecht gegen ay. Dann war fc = g und das Dreieck pcy dem aoy ähnlich. Auf weiten Wegen gelangt man endlich zu der Formel



$$\frac{fc}{pc} = \frac{\sqrt{4(n+1)^2g^2 + \frac{1}{3}(2n-1)^2(9p^2 - 3g^2)}}{\sqrt{9p^2 - 3g^2}}$$



Hauy führte seine Rechnungen eigentlich nur mit dem Rhomboeder durch; bei den andern Parallelepipeden schrack er vor der Complicität der Formeln zurück. Erst im Traité de Cri-

stallographie 1822. 2. Bd. ging er etwas weiter. Nur vorstehende **schiefe Rhombsäule** wurde noch als Beispiel der Behandlung ausgezeichnet. Er konnte hier die Primitivform ag so wählen, daß die Linie cs senkrecht auf cg und as stand, sie entsprach dann der Weiß'schen Axe a, während cg = as = 1 die Axe c darstellte, auf deren Ebene die Linie bd senkrecht steht.

Weiß legte dem Feldspathe die Axen $a : b : c = \sqrt{13} : \sqrt{13 . 3} : \sqrt{3}$ zu Grunde, das setzte eine Säule von 120° voraus. Die Rhomboidfläche $o = a' : \frac{1}{2}b : c$ machte gegen P und T den gleichen Winkel von 123° 59′ 16″, die Fläche $n = a : \frac{1}{4}b : c$ stumpfte den rechten Winkel P/M gerade ab. Daraus folgte dann wieder, daß die Rhomboidflächen o/o sich unter dem Winkel der Dachkanten des Schwefelkieses schnitten 126° 52′ 11″. Denn es gehe vorn

$n = a : c : \frac{1}{4}b$ daher $\sin : \cos = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} : \frac{1}{4}b$, und hinten

$o = a : c : \frac{1}{2}b$ daher $\sin : \cos = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} : \frac{1}{2}b$; o habe also den doppelten sin von n. Die allgemeine Formel für die Schiefendfläche $P = a : c : \infty b$ gegen die Säulenfläche $T = a : b : \infty c$ sei $\sin : \cos = a\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} : bc$, und aus jedem beliebigen Axenausdrucke $ma : nb : pc$ könne man sofort die Neigung der Flächen gegen jede beliebige Axe abc lesen, z. B. $\frac{mnab}{\sqrt{m^2a^2 + n^2b^2}} : pc = \sin : \cos$.

Es beruht eben auf dem rechtwinklichen Dreiecke, aus dessen rechtem Winkel das Perpendikel auf die Hypotenuse gefällt den sin bildet. Das drei- und sechsgliedrige System (Abh. Berl. Akad. 1816. pag. 318) wurde auf 3 + 1 Axe bezogen, wo der allgemeinste Ausdruck der Fläche lautete:

$$\begin{array}{c} \gamma c \\ \frac{a}{1} : \frac{a}{n} : \frac{a}{n-1} \\ \frac{2s}{n+1} : \frac{2s}{2n-1} : \frac{2s}{n-2} \end{array}$$

Die scharfe Kante des Dreikantners läuft, wenn n größer als 2 ist, von γc nach $\frac{2s}{n+1}$, daher

$$\cos = \frac{\gamma c . \frac{2s}{n+1}}{\sqrt{\gamma^2 c^2 + \frac{4s^2}{(n+1)^2}}} = \frac{2\gamma cs}{\sqrt{(n+1)^2\gamma^2c^2 + 4s^2}} \text{ und } \sin = \frac{a}{n-1}$$

Da ferner $2s = a\sqrt{3}$ ist, so kommt

$$\cos : \sin = \gamma c(n-1) : \sqrt{\tfrac{1}{3}(n+1)^2\gamma^2c^2 + a^2}.$$

Das Rechnen der Winkel an den einfachen Körpern sank mit diesen Zeichen zu einem einfachen Ablesen herab!

Die Theorie des **Epidotsystems** folgte April 1819 (Abh. Berl. Akad. 242), wo die vollständige Uebereinstimmung mit Feldspath bewiesen wird, sobald man den Krystall wendet. Das Kantenzonengesetz pag. 253 ist nicht blos allgemein bewiesen, sondern auch namentlich für die Verticalzone stetig angewendet, und für die Ableitung der Flächen wie d = a : $\frac{1}{4}$b : c pag. 263 eine allgemeine Formel entwickelt, zugleich eine Bezeichnung der Zonenaxe αa; $\beta b + \gamma c$ vorgeschlagen. Zum Schluß werden einige ganz praktische Rechnungsformeln hinzugefügt, die auch für das 2gliedrige System Geltung haben. Darauf folgt eine „allgemeine Bezeichnung der Krystallflächen des sphäroedrischen Systemes" (l. c. 270), das hauptsächlich auf der Anwendung des Kantenzonengesetzes beruht, aber noch durch einen viel allgemeinern Lehrsatz, die Theilung des Dreieckes (l. c. 277) bewiesen wird. Es handelt sich dabei, auf einfachste Weise die Länge der Perpendikel zu ermitteln, welche wir vom Mittelpunkte des Krystalls auf die Kanten und Flächen ziehen, und die Länge der Linien, welche nach den Ecken gehen. Durch bloße Subtraction und Addition wurde das zu Stande gebracht. Es gaben bekanntlich:

der Würfel	$1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$;
das Oktaeder	$1 : \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{1}{3}}$;
Granatoeder	$1 : \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{3}{4}}$;
Leucitoeder	$1 : \sqrt{\frac{5}{4}} : \sqrt{\frac{4}{3}} : \sqrt{\frac{8}{5}}$,

d. h. Zahlen der Töne, aber mit dem Wurzelzeichen. Doch schien es ihm wichtig genug (l. c. 227), dies besonders zu verfolgen.

Im November 1820 (Abh. Berl. Akad. pag. 165) wurde nun schon bei Gelegenheit neuer gefundener Flächen eine „allgemeine Deduction der Flächen des Feldspathsystems" gegeben an der Hand der Zonenpunkt-, Sectionslinien- und Controlformeln, nur nicht mit Brüchen, sondern mit ganzen Zahlen $\alpha\beta$ gerechnet, obgleich die Anmerkung (l. c. 169) gewisse Vorzüge der Bruchform $\frac{1}{x}$ $\frac{1}{y}$ ausdrücklich hervorhebt. Am Schluß der vortrefflichen Arbeit „über das Krystallsystem des Gipses" pag. 216 wird Mohs rühmend erwähnt, aber unter andern wichtigen Berichtigungen ausdrücklich mißbilligt, daß er für dieselbe Sache neue Namen wähle, worunter hemi- und tetartoprismatisch nicht einmal richtig seien, sondern vielmehr hemi- und tetartopyramidal heißen sollten. In allen diesen Arbeiten wehte ein origineller Geist, der mit geschickter Hand ohne großen mathematischen Apparat stets das Wesen herauszukehren verstand. Allein die Schwierigkeit der Anschauung konnte natürlich nur erleichtert, nicht ganz gehoben werden. Daher behielt die Mittelmäßigkeit noch lange die Oberhand.

Mohs, der schon 1804 „des Herrn Jak. Friedr. von der Null

Mineralienkabinet" im Sinne damaliger Zeit weitschweifig in drei Abtheilungen beschrieben hatte, trat 1820 mit einer desto kürzern Broschüre (Die Charaktere der Klassen, Ordnungen, Geschlechter und Arten, oder die Charakteristik des naturhistorischen Mineralsystems) hervor, die gleich darauf in Edinburg auch englisch erschien, und (Edinb. Journ. 1821. IV pag. 213) the forerunner of the System of Crystallography of this profound naturalist genannt wird. Die Einleitung beginnt mit dem tessularischen, rhomboedrischen R $\pm$ n, pyramidalen P $\pm$ n, prismatischen (Pr $\pm$ n)^m, hemiprismatischen und tetartoprismatischen Systeme. Jene hieroglyphischen Zeichen werden nicht einmal erklärt, die Namen sind neu, die Sache stimmt aber so vollständig mit dem Weiß'schen Systeme, daß der Fachmann sich verwundern mußte, den Entdecker nicht genannt zu sehen. Jameson (a System of Mineralogy 1820. I pag. IV) in Edinburg wußte nicht schnell genug zu rühmen, daß Prof. Mohs »by the discovery of a system of Crystallography, eminently distinguished by its originality and simplicity« der Mineralogie in Beziehung auf naturhistorische Methode erst jene Bestimmtheit verliehen habe, welche in Botanik und Zoologie existire. Am 20. März 1819 las Brewster in der Werner'schen Naturhistorischen Gesellschaft zu Edinburg seine berühmte Abhandlung „über den Zusammenhang zwischen den Kern- und Grundgestalten der Krystalle und der Anzahl ihrer Axen doppelter Strahlenbrechung" (Gilbert's Annal. Phys. 1821 Bd. 69 pag. 1), und konnte zu keinem rechten Resultate gelangen. Indessen erschienen in dem Edinb. Phil. Journ. 1820 pag. 154 die Outlines of Professor Mohs's New System of Crystallography ... by a Pupil of Prof. Mohs, und nun fügte Brewster in den Additional Observations Juli 1820 hinzu: „das „neue und schöne System der Krystallographie, welches Prof. Mohs in „Freiberg aufgestellt, harmonirt auf eine sehr merkwürdige Weise durch„gängig mit der optischen Anordnung der Mineralien. Da die Kern„Gestalten, welche Hr. Hauy einigen Mineralien zuschreibt, mit ihrer „optischen Structur unvereinbar sind, so gibt uns dieses hinlängliche „Gründe, das Verdienst des französischen und des deutschen Systems „der Krystallographie gegen einander abzuwiegen."

Die Charaktere machten solche Fortschritte, daß schon im Jahre darauf 1821 eine zweite sehr vermehrte Auflage erschien. Der Verfasser that sich darin zwar auf die Anerkennung Brewster's, „dieses berühmten Naturforschers" etwas zu Gute, aber nennt auch jetzt den Weiß mit keiner Sylbe. Es erscheinen die „Gleichungen, zur Entwickelung und Berechnung zusammengesetzter Crystall-Gestalten" in Gilbert's Ann. Phys. 1821 Bd. 68 pag. 379, eine Schrecken erregende Verkennung der einfachsten Naturverhältnisse; es erscheint der „Grundriß der Mineralogie" I. 1822, und der Nachfolger Werner's in Freiberg bemerkte pag. 21 nur, daß „die Herren Weiß, Bernhardi u. a. Abhandlungen in Gehlens und Schweiggers" Journalen bekannt gemacht haben. Mohs

galt nicht nur, sondern wollte auch als der Entdecker gelten! Das war zu viel, und Weiß (Schweigger's Journ. Ch. Phys. 1822. XXXVI. 200 und Edinburgh Phil. Journ. 1823. VIII. 103) beschwerte sich mit Recht bei Brewster. Mohs (Schw. Jo. 1823. XXXVII. 216 u. Edinb. J. VIII. 275) suchte sich zwar zu vertheidigen, konnte aber keinen einzigen gedruckten Beweis vorlegen, sondern sich blos auf Vorlesungen und Manuscripte berufen, und mußte sogar selbst zugeben, „daß die Uebereinstimmung merkwürdig genug sei, selbst die Beschreibung der Gestalten des tessularischen Systems, sogar im Ausdrucke, vieles mit dem des Hrn. Weiß gemein habe." Statt nun, wie es unter Gelehrten in solchen Fällen Sitte ist, unumwunden die Priorität anzuerkennen, und sein Bedauern auszudrücken, daß er aus Unkenntniß der wichtigen Arbeiten an gehöriger Stelle nicht habe Erwähnung thun können, mäckelt er an der klaren Thatsache und behauptet sogar, Weiß bezeichne nur einzelne Flächen und nicht ganze Gestalten! In der Selbstbiographie (Friedrich Mohs und sein Wirken in wissenschaftlicher Hinsicht 1843 pag. 53) wirft er auf die Manen Werners einen Schatten, daß derselbe die Mathematik auf der Freiberger Akademie zum Verfall brachte, und rühmt sich, das durch sein Gewicht allmählig wieder verbessert zu haben. Wer aber in einem Zeichen ma : nb : c, das sich auf Axen bezieht, Schwierigkeiten richtiger Auffassung finden kann, zeigt damit kein großes Verständniß für Mathematik. Fast unglaublich klingt die Wendung (Selbstb. l. c. 49): „Auf dem Wege durch Deutschland (1817) besuchte er den Professor Weiß in Berlin, und obwohl bei dieser Gelegenheit viel über Mineralogie im Allgemeinen geredet wurde, so kam doch die Krystallographie nicht besonders zur Sprache. Der Unterzeichnete (nemlich Mohs, der Selbstbiograph) würde sonst, da er nicht nur das Manuscript seines Grundrisses, sondern auch eine Menge von Modellen und Zeichnungen, welche zur Erläuterung seiner Krystallographie verfertigt waren, bei sich hatte, den Professor Weiß schon damals mit dieser Krystallographie bekannt gemacht, und dadurch einem nachfolgenden Angriffe desselben vorgebeugt haben." Mohs, der Krystallograph, das Neue in der Tasche, und vorenthält es unter vier Augen dem Krystallographen Weiß! Mohs meinte (Selbstbiogr. 56) nun zwar in seinen Erwiderungen „solche Beweise angeführt zu haben, daß Hr. Weiß die Sache auf sich beruhen ließ." Allein für die Schüler waren das keine Beweise, und Neumann (Beiträge zur Krystallonomie 1823. pag. 123) spricht „das bestimmte Urtheil aus, an eine Absichtlichkeit des Prof. Mohs hierbei zu glauben." Auffallend war mir immer in dieser Polemik, daß keiner des Bernhardi gedenkt, der in Gehlens Journal 1807 IV und V nicht blos die Systeme gibt, sondern auch ausführlich behandelt. Die **regelmäßigen Krystallisationen** stehen l. c. V. 196, nur die Hemiedrie war ihm nicht klar; die **rhomboedrischen** K. folgen V. 492, welche schon Hauy gut in Ordnung gebracht hatte; das **Quadratoktaeder** V. 628 führt uns 4- und 8seitige Prisma, Oktaeder und Hexadekaeder (16flächner)

vor, „den Unterschied der verschiedenen Quadratoktaeder auszudrücken, wählt man am schicklichsten das Verhältniß der halben Axe zur halben Seitenkante.“ Das **Rhombenoktaeder** V. 634 „wird am schicklichsten durch Linien, die von A, E, O zu den gegenüberliegenden Punkten gezogen werden können, unterschieden. Damit wird dann V. 634 das Rectanguläroktaeder in enge Verbindung gesetzt, „es scheine zwar auf den ersten Blick am besten, sie wie die Theile des Quadratoktaeders zu benennen; allein bei Vergleichung der secundären Formen, die mit denen des Rautenoktaeders viel Aehnlichkeit haben, scheint es rathsamer, sie so zu stellen, daß die längere Kante des Rechtecks seinen obern und untern Theil ausmache, da in der Folge vielleicht alle diese Rectanguläroktaeder wegfallen.“ Das **einfache** V. 636 und **dreifache Rhomboidaloktaeder** V. 639 werden ganz einsichtsvoll behandelt, wie es das 2 + 1gl. und 1gliedrige System verlangen. Mohs hätte nun leicht in dem Streite mit Weiß sich auf Bernhardi berufen können, aber seine Belesenheit scheint so gering gewesen zu sein, daß er das nicht wußte.

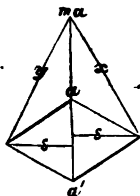
Jedenfalls haben wir es, wenn es sich um die Erkennung unserer heutigen 6 Krystallsysteme handelt, nur mit den Namen dieser drei Männer zu thun. **Bernhardi** 1774—1840, ein Mediciner von Ansehen, der sich auch in Botanik und Zoologie hervorthat, saß in Erfurt freilich nicht an der Quelle, wo er die Natur hätte befragen können, um so bewunderswerther sind seine Erfolge, wir dürfen ihn daher mit Recht als würdigen Vorläufer bezeichnen. **Weiß** 1780—1856 ist in Leipzig geboren. Ein ingenium praecox, bezog er, ausgestattet mit der feinsten classischen Bildung, schon als 16jähriger Jüngling die Universität Leipzig, begann Ostern 1803 dort seine akademischen Vorlesungen über Chemie, Physik, Mineralogie und Geognosie, wurde 1808 ordentlicher Professor der Physik, und 1810 auf L. v. Buch's lebhaftes Andringen an die neu begründete Universität Berlin berufen. Er legte nicht blos den Grundstein, sondern vollendete das Gebäude, wenn auch nur wenige Zeitgenossen ihn verstanden. Seiner Zeit eilte er voraus, aber **Mohs** 1773—1839 wußte sie zu ergreifen. Zu Gernrode am Unterharze geboren, hatte er als Kaufmannssohn zu kämpfen, bis er 1796 die Universität Halle beziehen konnte, warf sich dann auf Bergbau, erhielt 1801 eine sehr untergeordnete Stellung als Steiger in Neudorf bei Harzgerode, kam endlich nach Wien, wo ihn der Banquier v. der Null aufnahm, und gelangte so 1812 zur Professur am Johanneum zu Grätz, von wo er dann 1818 nach Freiberg an die Stelle Werners, und 1826 auf Stift's Betrieb nach Wien berufen wurde. Hier „begann er am 24. Juni „1828 vor einer glänzenden Versammlung seine Vorlesungen. Sie „waren die ausgezeichnetsten, die je in den östreichischen Staaten gehört „wurden. Der tiefe Geist, die Gründlichkeit seines Wissens, die feste „Ueberzeugung von der unumstoßbaren Wahrheit seiner Lehre, der heiße „Wunsch, der Welt zu nützen, beseelten das hohe Rednertalent des

„Coriphäen der Mineralogie der Art, daß Alle, die ihn hörten, von „seinem Vortrage hingerissen — ja begeistert, und von der Infallibilität „seiner Doctrin überzeugt wurden.“ Das das Urtheil seiner Schüler (Fr. Mohs und sein Wirken pag. 61). Mohs verstand die Krystalle, aber seine zahlreichen Werke strotzen von einem pedantischen Schematismus, in welchem er meinte, Linné zum Vorbilde zu haben. Namentlich entbehrt seine krystallographische Methode der Einfachheit. Hätte es Mohs über sich gewinnen können, dem Weiß lediglich zu folgen, ihn populärer zu machen, auch wohl zu verbessern, so würde er viel größer dastehen.

Der Krystallograph Mohs, frühzeitig unterstützt von Haidinger, beginnt nicht mit dem Rhomboeder, wie Haüy, sondern mit dessen Horizontalprojection: d. h. er stellt es nach seiner Hauptaxe, die er nicht mit Weiß c sondern a nennt, senkrecht, fällt von den Seitenecken (Zickzackecken) Perpendikel auf die Projectionsebene, welche ein reguläres Sechseck gibt, dessen Seite = 1 gesetzt wird, dann ist die schiefe Diagonale $2p = \sqrt{3}$, die Axe $a = \sqrt{2,19}$, und der Endkantenwinkel $\cos x = \frac{2a^2 - 9}{4a^2 + 9}$. Das zu beweisen ist gar nicht so einfach: man muß den Hauptschnitt des Rhomboeders machen, so wird das Perpendikel aus der Seitenecke auf die Axe a gefällt ebenfalls = 1, und so kommt man auf weiten Umwegen zur Formel des Kantenwinkels. Nach Weiß macht man einen Axenwirtel aaa, zeichnet $a : a : \infty a$ ein, dann geht die Endkante des Rhomboeders von $c : 2s = c : a\sqrt{3}$, während a rechtwinklich auf die Ebene es steht; folglich wird für c = 1 die $tg = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{1 + 3a^2}} : a = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} + a^2}}$. Das ist ein Gedanke! Widerwärtig bleibt dabei noch, daß Axe a in ganz ungewöhnlichem Sinne genommen wird, nemlich die ganze Länge von Hauptecke zu Hauptecke, also a = 2c Weiß. Sonst spricht man seit Weiß von den halben Axen a : c, und setzt bald a bald c gleich 1. Mohs dagegen nimmt s = 1. Denn die Hauptaxe a im gewöhnlichen Sinne ist (die Seitenaxe c = 1 gesetzt) $2a = \sqrt{4 . 0,73} = \sqrt{2,92}$. Da nun $s = c\sqrt{\frac{3}{4}} = 1$, $c = \sqrt{\frac{4}{3}}$ gibt, so ist die Mohs'sche

$$\text{Axe } a = \sqrt{\tfrac{3}{4} . 2,92} = \sqrt{2,19}.$$

Beim **Skalenoeder** ist die Sache natürlich noch verwickelter. Daher werden nun auch die Winkelformeln nicht mehr bewiesen, sondern blos hingeschrieben (Leichtfaßliche Anfangsgründe der Naturgeschichte des Mineralreichs. Wien 1832 pag. 571):



$$\cos x = -\left[\frac{3(m^2 - 6m - 1)a^2 + 18}{2[(3m^2 + 1)a^2 + 9]}\right]$$
$$= 1 + \cos y + \cos z - 2\sqrt{(1 + \cos y)\,(1 - \cos z)},$$

worin x der scharfe, y der stumpfe und z der Seitenkanten-Winkel ist, wie der durch x und y gelegte Haupt-

schnitt zeigt; der Coefficient m bedeutet die Zahl, um welche die Axe a verlängert wurde, den Punkt der Endkanten zu bestimmen. Die Skalenoederfläche geht dabei zugleich durch die Seitenkante des Rhomboeders aa'. Der gewöhnliche Dreikantner $c : a : \frac{1}{3}a$ hat $m = 3$, wir erhalten

$$-\cos x = \frac{3(9 - 6 - 1)a^2 + 18}{2(28a^2 + 9)} = \frac{6a^2 + 18}{56a^2 + 18} = \frac{3a^2 + 9}{28a^2 + 9}.$$

Die Weiß'sche $tg = \sqrt{\frac{1}{3}(n+1)^2\gamma^2c^2 + a^2} : \gamma c(n - 1)$ pag. 34 konnten wir uns während des Hinschreibens im Kopfe entwickeln, und haben nun blos $\gamma = c = 1$ und $n = 3$ zu setzen, um sofort $tg = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{3} + a^2}$ $= \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{a^2}{4}}$ zu erhalten. Wir dürfen dabei, abgesehen von der leichtern und durchsichtigern Rechnung, nur einen Logarithmen aufschlagen, gegen zwei bei Mohs.

Die **gleichkantige vierseitige Pyramide** (4gl. Okt.), nach Weiß $a : a : c$ (und daher die Neigung der Flächen gegen Axe c

$$\sin : \cos = \frac{a \,.\, a}{\sqrt{a^2 + a^2}} : c = \frac{a}{c\sqrt{2}}, \text{ für } c = 1, \; tg = \frac{a}{\sqrt{2}}),$$

gibt nach Mohs in der Seitenkante

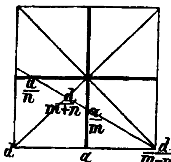
$$\cos z = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} = -(1 + 2\cos x),$$

wenn x die Endkante bedeutet. Auch hier wird consequent die Länge der Seitenkante = 1 gesetzt, dann ist die Diagonale des Quadrats = $\sqrt{2}$, oder die Seitenaxe $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Das gibt für den Zirkon $a = \sqrt{0,82}$; hier darf ich also blos mit $\sqrt{2}$ dividiren, um auf die Hauptaxe $c = \sqrt{0,41}$ im gewöhnlichen Sinne zu kommen. Freilich muß man dabei immer bedenken, daß Mohs a heißt, was Weiß 2c nannte.

Ungleichseitige achtseitige Pyramide

$$c : ma : na \quad \text{oder} \quad c : \frac{a}{m} : \frac{a}{n}.$$

Suchen wir uns nach Weiß'scher Methode die beiden Endkanten, so hat die halbe scharfe Endkante $c : ma = \frac{1}{2}x$,



$$\cos : \sin = \frac{c \,.\, ma}{\sqrt{c^2 + m^2a^2}} : na$$

das gibt für $c = 1$, $ctg\,\frac{x}{2} = \frac{m}{n\sqrt{1 + m^2a^2}}$.

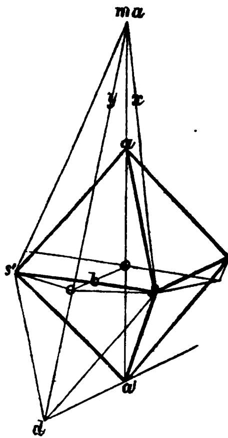
Die Diagonale = d gesetzt, geht für $\frac{a}{m} : \frac{a}{n}$ die stumpfe Endkante von $c : \frac{d}{m + n} = \frac{1}{2}y$; folglich

$$\cos : \sin = \frac{\frac{c \cdot d}{m+n}}{\sqrt{c^2 + \frac{d^2}{(m+n)^2}}} : \frac{d}{m-n},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{y}{2} = \frac{m-n}{\sqrt{(m+n)^2 + 2a^2}} \text{ für } c = 1,$$

denn $d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Um das Kantenzonengesetz anzuwenden, wählt man den Divisorenausdruck. Natürlich finden wir immer nur die halben Winkel.

Welche Umstände macht dagegen **Mohs**. Er stellt das Oktaeder aa' wieder senkrecht gegen die Projectionsebene, construirt nach dem Oktaederdreieck ass' das Parallelogramm asds', zieht von d nach einem beliebigen Axenpunkte ma, so bestimmt diese Linie in der Basis der vierseitigen Pyramide den Punkt c in der achtseitigen, und damit die Lage der Endkanten x und y. Durch weitläufige Rechnung bringt er dann heraus, daß $bc = \frac{1}{n}$ (ob) gesetzt $n = \frac{m+1}{m-1}$ wird. Da nun die Seitenkante des Grundoktaeders ss' = 1 gesetzt wurde, so folgte dann mühsam:



$$\cos x = -\left[\frac{(m^2-1)a^2+2}{(m^2+1)a^2+2}\right] \text{ und}$$

$$\cos y = -\left[\frac{2(ma^2+1)}{(m^2+1)a^2+2}\right].$$

Das **Orthotyp** a:b:c (Rhombenoktaeder), Kante ac = x, ab = y, bc = z genannt, gibt nach Weiß'scher Kopfrechnung augenblicklich

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}x = \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}} : b \text{ etc. Mohs findet dagegen}$$

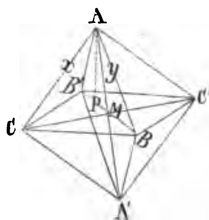
$$\cos x = \frac{a^2c^2 - (a^2+c^2)b^2}{a^2c^2 + (a^2+c^2)b^2} = -(1 + \cos y + \cos z)$$

zum Rechnen viel unbequemer. Doch setzt er jetzt nicht eine Kante, sondern Axe a = 1.

Es ist auch hier a = 2c (Weiß), b = 2b (W.), c = 2a (W.). Mohs heißt aber nur a Axe, b und c dagegen Diagonalen; diese aus den Winkeln zu erhalten, findet das interessante Verhältniß statt:

$$a : b : c = \sqrt{(1+\cos x)(1+\cos y)} : \sqrt{(1+\cos x)(1+\cos z)}$$
$$: \sqrt{(1+\cos y)(1+\cos z)}.$$

Das **Hemiorthotyp** (schiefes Rhombenoktaeder) wird wie gewöhnlich gestellt, der scharfe Axenwinkel nach hinten. Um jedoch die schiefen



Winkel bequem in Rechnung zu bringen, fällt er in der Axenebene ABB' (Medianebene) das Perpendikel AP = a; setzt jetzt die halben Diagonalen MB = MB' = b und MC = MC' = c; das „Maaß der Abweichung" MP = d. Dann ist z. B.

$$\cos y = \frac{a^2(b^2 - c^2) - c^2(b + d)^2}{a^2(b^2 + c^2) + c^2(b + d)^2}$$

$$\cos x = \frac{a^2(c^2 - b^2) - c^2(b^2 - d^2)}{\sqrt{[a^2(b^2 + c^2) + (b + d)^2 c^2]\,[a^2(b^2 + c^2) + c^2(b - d)^2]}}.$$

Natürlich sind wir auch auf Weiß'sche Art bei einer schiefen Axe $a/c = \alpha$ leicht im Stande, den cos hinzuschreiben. Denn jedes Dreieck hat den Inhalt

$$\tfrac{1}{2}ac \sin \alpha = \tfrac{1}{2}d \,.\, \cos, \text{ oder } \cos = \frac{ac \sin \alpha}{d}.$$

Nun ist bei einem stumpfen Winkel vorn $d^2 = a^2 + c^2 + 2ac \cos \alpha$, folglich ist für den halben Kantenwinkel des 2 + 1gliedrigen Systemes in der Medianebene:

$$\cos : \sin = \frac{ac \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos \alpha}} : b,$$

da beim 2 + 1gliedrigen Systeme Axe b senkrecht gegen die Axenebene ac steht, oder

$$\operatorname{ctg} = a \sin \alpha : b\sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \alpha} \text{ für } c = 1.$$

Für rechtwinkliche Axen wäre $\operatorname{ctg} = a : b\sqrt{1 + a^2}$; wir haben also blos nur noch $\sin \alpha$ und $2a \cos \alpha$ anzuhängen, letzteres vorn positiv und hinten negativ. Alles das sind so elementare augenblicklich klare Kopfrechnungen, daß es kaum der einfachsten Figur bedarf. Und wer mit meiner Methode vertraut ist, wird sich den halben seitlichen Endkantenwinkel von b : c leicht entwickeln; er heißt

$$\cos : \sin = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} : \frac{a \cos (\alpha - 90)}{1 + a \sin (\alpha - 90)} \text{ etc.}$$

Mit schiefen Winkeln ist nun ein Mal unbequemer rechnen, daher kam Mohs mit dem **Anorthotyp** nicht mehr zu Stande, wenigstens gibt er dafür keine Formeln. Mohs, mit dem Strome schwimmend, hat es dann auch nicht versäumt, später noch ein krystallonomisch unmögliches Hemianorthotyp (diclin) einzuschieben (Leichtfaßl. Anfangsgr. 1832. 57).

Wir jungen Leute, die wir in Berlin an der lautersten Quelle schöpften, konnten natürlich nicht begreifen, daß die Wiener trotz Weiß sich so etwas bieten ließen. Jetzt ist es freilich gefallen, aber langsam genug!

Auf die sogenannten **Reihen** legte Mohs ein ungebührliches Gewicht, richtete darnach sogar seine ganze Bezeichnung ein, obwohl dieselben nur ein untergeordnetes Interesse bieten, da sie von selbst aus

dem Zonenverbande hervorgehen: es sind die bekannten stumpfern und schärfern Rhomboeder und Oktaeder, welche sich auf jeder Projectionsfigur unmittelbar ergeben. Malus (Théorie de la double Réfraction de la Lumière 1810 pag. 122) lenkte schon beim Kalkspath die Aufmerksamkeit darauf: tous ces rhomboïdes (Rhomboeder) sont liés entre eux par une même loi, en sorte qu'un seul d'entre eux étant donné, on pourra déterminer tous ceux qui appartiennent à la même **Série.** Wir dürfen uns nur das reguläre System nach der Linearmethode auf die Oktaederfläche projiciren, um mit einem Blicke zu überschauen, wie alle diese Körper durch gegenseitige Abstumpfung im Zonenverbande hervorgehen.

Diesen **Zonenverband** aller Flächen eines Systems durchsichtig hinzulegen, darauf ging Weiß los. Es folgte zwar schon aus dem Geiste seiner Methode, aber sein Lieblings-Schüler F. E. Neumann (Beiträge zur Krystallonomie 1823 1stes Heft) fand noch eine besondere Art, es dem Auge unmittelbar darzulegen, und zwar führte er die Bernhardi'sche Idee aus: er fällte vom Mittelpunkte des Krystalls Perpendikel auf die Flächen, und fing diese auf einer Ebene senkrecht auf die Hauptaxe oder auf einer Kugeloberfläche concentrisch um den Krystall gelegt auf. Punkte waren nun die Orte der Flächen, und welche Orte auf der Ebene in **einer** Linie oder auf der Kugel in **einem** größten Kreise lagen, gehörten **einer** Zone an. Mehrere zwangslose Hefte sind zwar versprochen, aber nicht erschienen. In seiner Doctordissertation (de lege zonarum, 16ten März 1826) entwickelte er aus einer beliebigen Säule a : b : ∞c, vordern Schiefendfläche $\frac{a}{m} : c : \infty b$ und hintern Gegenfläche $\frac{a'}{n} : c : \infty b$ durch Deduction einen ganz allgemeinen Flächenconnex, deren Ausdrücke nur Multipla von m und n werden, also rational sein müssen. Wenn man dazu dann noch die „Grundzüge der Theorie der Sechsundsechskantner und Dreiunddreikantner von Weiß (Abh. Berl. Akad. 1823. 217) nimmt, so war damit die Krystallographie, wie sie der Mineraloge zum äußerlichen Erkennen bedarf, abgeschlossen. Selbst Bernhardi (Beiträge zur nähern Kenntniß der regelmäßigen Krystallformen 1826) blieb gegen diese Leistungen weit zurück, und wie wenig **Hausmann** zur Entwickelung beitrug, beweisen seine Schriften, denn der „Entwurf eines Systems der unorganisirten Naturkörper 1809" und das „Handbuch der Mineralogie 1813" liefern nichts; die „Untersuchungen über die Formen der leblosen Natur. Erster Band 1821" (ein 2ter ist nicht gefolgt), woraus Mohs (Edinb. phil. J. VIII. 281) zuerst etwas über das Weiß'sche System erfahren haben wollte, sind zwar außerordentlich weitschweifig, und in Mohs'scher Weise originell, allein alles basirt der Hauptsache nach auf Weiß.

Die **Winkelgröße** steht für den wahren Krystallographen auf zweiter Linie, ob die Kante ein Paar Grade mehr oder weniger habe, bleibt dem Beschauer gleichgültig, wenn nur die Parallelität der Linien und

damit der Zonenconnex nicht ändert, woraus Weiß schon 1806 pag. 27 die Flächenausdrücke ohne alle Messung ableitete. In Frankreich kam später Monteiro (Journal des mines 1813 Bd. 34 pag. 161) auf denselben Gedanken, und aus dessen angehängter „Eloge“ von Hauy ersieht man, wie wenig den Franzosen die deutschen Fortschritte kümmerten. Levy (Edinburgh Phil. Journ. VI. 227) entwickelte dazu dann eine gewaltige Formel, welche für den projicirenden Krystallographen jetzt entbehrlich geworden ist. Aber es gibt Fälle, wo man den genauern Winkel braucht: so fand Wollaston (Phil. Trans. 1812. 161) schon, daß Bitterspath 106° 15′, Spatheisen sogar 107° in den Endkanten habe, und sich dadurch leicht vom Kalkspath 105° 5′ unterscheiden lasse; Brewster (Gilbert's Ann. Phys. 1821 Bd. 69 pag. 7) wies andere Mängel auf optischem Wege nach, denn er fand Rothbleierz ($PbCrO^4$), Faserzeolith, Bittersalz ($\dot{M}\ddot{S}\dot{H}^7$) optisch zweiaxig, während sie Hauy noch als Prisma mit quadratischer Basis (4gl.) beschrieb, dem die optisch einaxigen Krystalle angehören. Die Sache hat sich zwar auch mit dem Handgoniometer und Symmetriegesetz aufgeklärt, aber man sah denn doch ein, daß schon Unterschiede weniger Minuten von Bedeutung sein können. Daher war die Messung mittelst Lichtreflex, die für den Physiker so nahe lag, ein großer Fortschritt. Wollaston hatte schon in den Philosoph. Transact. 1802 pag. 385 den Winkel des Isländischen Doppelspathes auf 105° 5′, wie später Malus mittelst des Borda'schen Repetitionskreises bestimmt, bis er endlich das bekannte Reflexionsgoniometer (Philos. Transact. 1809. 253) construirte, und die Sache nochmals bestätigte: der Blätterbruch des Kalkspathes neigt sich nicht 45°, sondern 45° 24′ gegen die Hauptaxe. Der große Meister Hauy (Traité de Minéralogie 2. édit. 1822 I. 298) machte davon zwar keinen Gebrauch, doch konnte er nicht umhin, schon im Tabl. comparat. 1809 pag. 125 darüber seine Betrachtungen anzustellen: das Kalkrhomboeder, welches sich gegen die horizontale Ebene gerade so neige, wie gegen die vertikale, sei gewissermaßen, wie der Würfel und das reguläre Oktaeder, eine Grenzform, welche andere Rhomboeder (Spatheisenstein l. c. 277) zu erreichen strebten. Lege man den Winkel 105° 5′ zu Grunde, so käme für den Quotienten der Flächendiagonalen

$$\sqrt{\frac{111}{73}} \text{ statt } \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{111}{73+1}};$$

und wenn n die Zahl der rangées soustractes bezeichne, so sei allgemein

$$n = \frac{p^2}{g^2 - p^2}, \text{ das gäbe für}$$

$$g = \sqrt{3} \text{ und } p = \sqrt{2} \text{ die einfache Zahl } n = 2; \text{ für}$$

$$g = \sqrt{111} \text{ und } p = \sqrt{73} \text{ dagegen } n = \frac{73}{38},$$

résultat exclus par les lois de la structure. Hauy hat hier die Sache

noch nicht durchschaut, kommt daher im Traité de Cristallographie 1822 II. 390 auf diesen Grund nicht wieder zurück, sondern führt nur an, daß der sin des scharfen Winkels dann

$$\frac{19}{73} \text{ und nicht } \frac{1}{4} = \frac{19-1}{73-1}$$

betrage. Dieser kleine Unterschied von 1 könne »sine errore sensibili« vernachlässigt werden. Da nun auch die Invertirungskörper dadurch einen Stoß bekamen, so hielt er fest an seinen Näherungswinkeln. Auch Weiß und Neumann verhielten sich gleichgültig gegen solche Neuerungen, zumal da beide sich vielleicht mit Recht gegen schiefwinkliche Axen sträubten.

Mohs dagegen bemerkte in seinem Schreiben an Jameson (Schweigger Journ. 1823. 235) mit dem Scheine großer Wichtigkeit, daß Weiß die Axenkante der Grundgestalt fälschlich 126° 52′ 11″ und das vertikale Prisma 120° angebe, während Haidinger sie mit dem Reflexionsgoniometer 126° 12′ und 118° 52′ gefunden habe. Aber Weiß hat sich darum wenig gekümmert, und noch in seiner letzten Feldspathabhandlung (Berl. Akad. 1838) die rechtwinklichen Axen $a : b : c = \sqrt{\frac{1}{3}} : 1 : \sqrt{\frac{1}{12}}$ gesetzt. Er hatte Recht: dieser error insensibilis, um mit Newton zu reden, änderte in den Grundfesten des Systems nichts; nur die „Kärrner" bekamen neue Arbeit. Der erste in dieser Beziehung war der Buchhändler William **Phillips** (1773—1828) in London, der 1816 mit einer »Elementary introduction to Mineralogy« hervortrat, und gleich darauf (Transact. Geol. Soc. 1817 Vol. IV, daraus Ann. de Chim. Phys. 1817 VI. 56) das neue Meßinstrument fleißig benützte: seine ganze Krystallographie bestand in Figuren von Holzschnitten, neben welche die gemessenen Winkel ohne jegliche Controle gesetzt waren; „die Theile hatte er, aber das geistige Band" fehlte gänzlich. Dennoch konnte Hauy nicht umhin, in einer besondern Abhandlung sur la mesure des angles des cristaux (Ann. des Mines 1818 III. 411) zu zeigen, wie das goniomètre ordinaire in den meisten Fällen genüge, und dabei schneller den directen Winkel gebe (à la fois directes et expéditives). Gerade am Bergkrystall, womit Phillips passend beginnt, hatte Hauy die Diagonalen des Rhomboeders $\sqrt{15} : \sqrt{13}$ auffallend genau gefunden, woraus schon Weiß (de indag. form. cryst. 1809 pag. 15) die Neigung der Dihexaederfläche zur Axe $s : c = \sqrt{5} : \sqrt{8}$ ableitete, was einen Seitenkantenwinkel des Dihexaeders von 103° 20′ und die Axen $a : c = \sqrt{0{,}833} : 1$ gibt, die den neuen Messungen in den Endkanten sich bis auf 4′ näherten (v. Kobell, Geschichte der Mineralogie 1864 pag. 193). Die Sache machte daher auf die Coryphäen des Faches keinen sonderlichen Eindruck, und für Mohs war es in seinem Briefe gegen Weiß jetzt leicht, zu vermuthen, daß die bisherigen Winkelangaben mangelhaft wären. Phillips erlebte 1823 eine dritte Auflage seines Werkes, worauf man sich besonders in Deutschland bezieht; eine 4te

1837 von Allan vermehrte, bewegte sich noch in der ganz gleichen Art; erst der 5ten 1852 von Brooke und Miller gänzlich umgeänderten wurde ein neuer Geist eingeweht. Der Wollhändler H. J. Brooke (1771—1857) in London hatte nicht blos die Winkel vieler Krystalle genau bestimmt (Annals of Philosophy 1819 Bd. 14), sondern schrieb auch eine ziemlich ausführliche »Familiar Introduction to Crystallographie 1823«, die er dem »Inventor of the Reflective Goniometer« widmete. Das Theoretische dreht sich hauptsächlich um eine systemlose Popularisirung von Hauy. Weiß ist ihm nicht bekannt, doch bedient er sich auf Anrathen Levy's der sphärischen Trigonometrie, was in Deutschland durch Hausmann und Kupffer schon längst geschehen war. Hauy wendete bekanntlich nur die ebene Trigonometrie an. An der letzten Auflage von Phillips hatte Brooke eigentlich keinen Theil, Miller hat sie allein verfertigt, auch begreift man nicht, wie auf den Titel der Name Phillips gesetzt werden konnte, da vom Phillips'schen Texte fast nichts übrig geblieben ist.

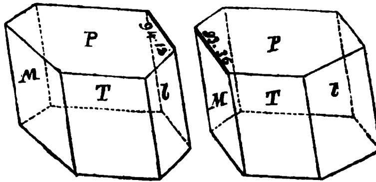
Die Physikalische Klasse der Königl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin stellte daher 1820 eine Preisaufgabe über genaue Messung der Winkel, die am 3. Juli 1823 gekrönt wurde, und Dr. Kupffer zum Verfasser hatte. Das Wollaston'sche Goniometer, von Malus mit Fernrohr und Fadenkreuz verstärkt, ließ eine Schärfe der Bestimmung zu, die bei geschickter Handhabung kaum um eine Minute fehlte. Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde zu Hilfe genommen, wie wenn es sich um Sternorte handelte. Glücklicher Weise sind dadurch die Zonengesetze und rationalen Schnitte der irrationalen Axen nicht alterirt, es zeigte sich nur, daß das 2 + 1gliedrige und 1gliedrige System nicht immer genau auf rechtwinkliche Axen bezogen werden konnten. Man mußte kleine Correctionen anbringen.

Jenes **Jahr 1823**, in welchem F. E. Neumann durch seine Projection der Weiß'schen Methode gleichsam die Krone aufsetzte, wurde nun auch in Deutschland der Wendepunkt für eine schärfere Winkelmessung, was dann sofort seine Früchte trug. Es waren wieder **Feldspäthe**, welche die Schüler von Weiß zu neuen Ansichten führten. Zwar suchten gleichzeitig Haidinger pag. 45 und A. Breithaupt (Vollständige Charakteristik des Mineral-Systems 2. Aufl. 1823 pag. 67) die Weiß'schen Winkel beim »Orthoklas« (Kalifeldspath) zu berichtigen, allein sie kamen zu keiner Uebereinstimmung, da es sehr schwer ist, meßbare Krystalle davon zu erhalten. **G. Rose** (Gilbert's Ann. Phys. 1823 Bd. 73 pag. 173) erntete indeß die erste Frucht durch den Nachweis der schiefen Winkel P/M beim Albit, Labrador und Anorthit. Doch wurde hier die Frage nach der Beschaffenheit der Axen weiter nicht berührt. Erst Prof. Kupffer in Kasan (Poggendorf's Annalen 1828 XIII. 209) wies an kleinen Tyroler Adularen nach, daß wenn der Blätterbruch P sich 63° 53′ und die hintere Gegenfläche x 65° 47′ gegen die Axe c neige, die medianen Axen ac

hinten einen scharfen Winkel $\alpha = 88^0 \ 50'$ machen müßten. Damit war zum ersten Mal die **Nothwendigkeit schiefer Axen** erwiesen. Denn wenn auch früher der 1gl. Kupfervitriol (Kupffer, Pogg. Ann. 1826 VIII. 61 und 215) sich den rechtwinklichen Axen nicht gleich fügen wollte, so konnte man hier noch Hoffnung hegen, da Neumann (Pogg. Ann. 1825 IV. 63) kurz vorher den krystallographisch verwandten Axinit auf rechtwinkliche Axen zurückgeführt hatte. Beim Feldspath kam die Sache um so unerwarteter, da in den Karlsbader Zwillingen von Schlesien und Italien x und P wirklich einzuspiegeln scheinen, was ja nur bei gleicher Neigung von x und P gegen Axe c möglich ist. Auch machte Weiß (Abhandl. Berl. Akad. 1825 pag. 170) schon gegen Mohs Angaben die Einwendung, daß die Bavenoer Zwillinge eine gerade Abstumpfung der rechtwinklichen Kante P/M durch die Fläche n fordern, sonst könnten auch in der Zwillingssäule die anliegenden ersten blätterigen Brüche P/P' nicht 90° sein, wie G. Rose (Pogg. Ann. 1829 Bd. XV pag. 199) später ausdrücklich messen konnte, da der Winkel 90° 0,4' betrug, also noch um keine volle halbe Minute abwich. Weiß war schon im Voraus davon so fest überzeugt, daß er behauptete, jede Messung, welche hiermit nicht stimme, müsse im Irrthum sein, er befinde sich, wo er wolle. Und dennoch liegt die Sache nicht so klar: wir müssen uns entweder dem Newton'schen insensibili errori bei der Beschreibung überlassen, oder andere Auswege suchen. Vielleicht sind die Vierlinge als Durchkreuzungszwillinge anzusehen, worin die gegenüberliegenden Individuen 1 . 3 und 2 . 4 P gemein haben, und die anliegenden 1 . 2, 2 . 3 ꝛc. P mit M. Dann würden die anliegenden n eine stumpfe achtseitige Säule bilden. Hr. Dr. C. Klein (Ueber Zwillingsbildungen ... der Krystallsysteme 1869 pag. 43) hat das sehr übersichtlich historisch zusammengestellt.

Prof. **Breithaupt** in Freiberg verfolgte nun sofort die Feldspäthe weiter: er fügte (Vollst. Charakt. Mineral-Systems 1823 pag. 66) den Periklin (περικλινής abschüssig) hinzu, so genannt, weil er den Winkel P/M 94° 54' bei den „Zöblitzer Spaltungsgestalten" zu finden meinte, also noch um 42' abschüssiger, als beim Anorthit (94° 12'). Freilich zeigten später (Pogg. Ann. 1826 VIII. 89) die Tyroler nur 93° 19'. Dazu gesellten sich dann die derben weißen großblättrigen Massen von Oligoklas (l. c. 238) neben dem Arendaler Epidot mit P/M = 93° 45'; ὀλίγος wenig, weil hier T nur undeutlich blättrig war. Jeder kleine Winkelunterschied wurde jetzt zu Species verwerthet. Unser berühmter Veteran (geb. 1791) machte (l. c. 84) dabei die treffliche Bemerkung: es lasse „sich „nicht läugnen, daß im Rhombensysteme das Homoedrische (2gl.) mit „dem Aufrechten, das Hemiedrische (2 + 1gl.) mit dem Gebückten und „das Tetartoedrische (1gl.) mit dem Schiefen des Menschen verglichen „werden könne. Das Gebückte finde wohl ohne das Links- oder Rechts-„geneigte, das Schiefe aber nicht ohne das Gebückte statt." In Hinsicht auf den dritten Blätterbruch T zerfielen darnach die Feldspäthe in zwei

Klassen: **linke** (diesseitig: Albit, Periklin, Orthoklas) und **rechte** (jenseitig: Labrador, Anorthit). Den Oligoklas konnte er nicht einreihen, weil T und l in der Säule sich in ihrer Blättrigkeit nicht sicher unterscheiden ließen. Es kommt hierbei natürlich nicht auf Links und Rechts an, denn was bei der einen Stellung links, ist bei der andern um die Axe b gedreht selbstverständlich rechts, sondern ob für eine beliebige Stellung der blättrige Bruch T diesseits oder jenseits der stumpfen Kante P/M liege. Meine **Albit-Figur** (Handb. Mineral. 1863. 228) ist ganz dieselbe wie bei Breithaupt (Pogg. Ann. VIII. tab. 1 fig. 10), denn sie ist davon copirt, wurde daher im Druck rechts statt links; bei beiden dort wie hier liegt aber der Blätterbruch T **diesseits** der stumpfen Kante P/M, und darauf allein kommt es an (Streng, N. Jahrb. 1871. 607); der Anorthit hat dagegen den Blätterbruch T bei Parallelstellung mit Albit diesseits der scharfen Kante P/M, oder auf die Parallele von T gesehen **jenseits** der stumpfen Kante. Beim Albit und Periklin, wo T und l so außerordentlich verschieden durch ihre Blättrigkeit sind, ist das ein vortreffliches Erkennungsmittel. Die Albit-Hemitropien zeigen vorn unter dem einspringenden Winkel P/P′ die Blätterbrüche T und T′ stets innen, hinten dagegen außen. An den auf Orthoklas angewachsenen kann man daher schon im Voraus wissen, wo der aus- und einspringende Zwillingswinkel P/P′ hinfalle: in dem Stücke Epoch. Nat. pag. 87 aus dem Hirschberger Thale liegt der ausspringende oben, weil auf der Hinterseite die Blätterbrüche der Säule T innen, und folglich l außen liegen. Leider ist der Unterschied von T und l beim Labrador nicht so scharf, aber er scheint auch vorhanden, und T liegt in diesem Falle **hinter** der stumpfen Kante, oder was dasselbe, **vor der scharfen**, wie beim Anorthit angegeben wird, wovon ich zu wenig Material zur Verfügung habe. Auch bei den Orthoklasen findet sich häufig eine der beiden Säulenflächen Tl deutlicher blättrig als die andere, worauf schon Hauy seine Primitivform PMT ganz richtig stützte. Breithaupt glaubte nun sogar selbst daran P/M 90° 6′ zu finden, und ihn zu der Albitabtheilung stellen zu können.



Anorthit. Albit.

Mohs dachte im ersten Bande seines „Grundriß der Mineralogie 1822“ noch nicht an schiefe Axen; erst im 2ten Theile 1824 werden sie in den Vorerinnerungen pag. V—VIII nachgeholt, dort ist die pag. 42 erwähnte „Abweichung d“ in die Rechnung eingeführt. Er unterscheidet drei Fälle: 1) die Abweichung fällt in die Ebene einer Diagonale, das ist das 2 + 1gl.; 2) die Abweichung fällt in die Ebene beider Diagonalen (Seitenaxen), und da sind dann wieder zwei Unterfälle: die Diagonalen bleiben noch rechtwinklich, oder werden auch schiefwinklich.

Letzterer Fall ist das 1gliedr. System; ersterer dagegen ist ganz absonderlich, und fällt nicht mit dem Naumann'schen diklinometrischen zusammen. Weiß (Abh. Berl. Akad. 1825 pag. 172) bezeichnete das passend mit Willkühr, aber die Schüler von Mohs waren darüber entzückt: Dr. Carl **Naumann** (geb. 1797), der noch „das Glück hatte, seine mineralogischen Schulstudien unter Werner zu beginnen, und unter Mohs zu beendigen" (Isis 1824. 1088), nannte sie „plagiobasische Crystallsysteme" (Isis 1824. 954), und behauptete, daß „auch in dieser Hinsicht mit dem Erscheinen des Grundrisses eine neue und herrliche Epoche für die Wissenschaft begonnen habe." Erst seit Mohs uns lehrte (Isis 1824. 1087) „für die Grund-„gestalt jederzeit eine solche zu fordern, deren Flächen gegen alle Di-„mensionsaxen geneigt sind, und die Prismen aus dem Gebiete der „Grundgestalten zu verweisen, sei Bestimmtheit und Consequenz in diesen „Theil der Crystallographie gekommen." Als wenn nicht jede Pyramide (Oktaid) nach der Deductionslehre ein zugehöriges Prisma (Hexaid) fordere, dessen Kantenlängen die Axen der Pyramide bilden, und damit Eines so bestimmt als das Andere wäre. Bei Mohs lag eben alles in todter Starrheit, bei Weiß war alles im lebendigen Fluß; das trug sich natürlich auch auf die Schüler über. Wenn schon Naumann sein klassisches „Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie 1830 den Herren Professoren Mohs und Weiß, den Koryphäen der deutschen Krystallographen" weihte, eigentlicher Vermittler ist er nicht geworden. Der Gegensatz trat nur um so schärfer hervor, er liegt in den beiden Worten: **Anschauung** oder **Rechnung**.

Nachdem einmal erwiesen war, daß bei weitem die Ueberzahl der dreiaxigen Systeme rechtwinklich sind, so lag natürlich die Vermuthung nahe, daß auch im 2 + 1gliedrigen es endlich gelingen werde, solche Axen zu finden, um so mehr, da die Wahl der sogenannten Primitivformen außerordentlich mannigfach ist. Mit Recht war es eine Freude, namentlich auch wegen der einfachern Rechnung, wenn solche wirklich trotz der schärfsten Messungen festgestellt werden konnten. Schiefe gabs freilich die Menge, das folgte einfach aus der Deductionslehre.

G. **Rose** (geb. 1798) hatte in seiner Doctordissertation (de Sphenis atque Titanitae Systemate Crystallino 1820) durch mühsame Messungen mit dem Reflexionsgoniometer die rechtwinklichen Axen

$$a : b : c = \sqrt{68 . 18} : \sqrt{68 . 11} : 3$$

festgestellt, und kam dabei auf Flächenausdrücke, wie $s = \frac{a}{17} : \frac{b}{24} : c$ 2c. Naumann (Isis 1823 pag. 1103) zeigte nun, daß man mit schiefen Axen zu einfachern Ausdrücken gelange, wenn man von dem Oktaid

$$l = a : 3b : \infty c \text{ und } n = \tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{4}b : c$$

ausgehe, d. h. l = a : b : c und n = a' : b : c setze. Die Axen wurden dann c : a : b = 2 : 3 : 4 und der schiefe Axenwinkel

$$c/a = \alpha = 86^0\ 25', \cos \alpha = \frac{1}{16} = \frac{a}{c} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Er meinte nun, „diese große Einfachheit, welche Mohs's Methode gewährt, und die man gewiß gern damit erkauft, in die Bestimmung der „Grundgestalt eine Determination mehr aufzunehmen, ist ganz vorzüglich „darin begründet, daß für die Grundgestalt jederzeit eine solche gefordert „wird, deren Flächen gegen alle drei Dimensions-Axen geneigt sind." Dennoch sehen wir im Lehrbuch der Mineralogie 1828 pag. 457 wieder andere Axen gewählt, denn es kommt dabei hauptsächlich die schiefe Basis mit in Betracht, welche Weiß gewöhnlich als Schiefendfläche a : c : ∞b nahm, und die nun zur Basis c : ∞a : ∞b wird. Schon daraus mußte die größere Einfachheit der Axenschnitte folgen. Für einen Weiß'schen Schüler, wie Neumann, waren das schon damals selbstverständliche Dinge. Es lag darin lediglich Willkühr und nicht Nothwendigkeit, wie das Kupffer zuerst erwies.

Ein Punkt war dabei noch zu beklagen: die Abweichung von den Weiß'schen Axenbezeichnungen. Weiß ging ursprünglich von den Axen des regulären Systems a : a : a aus, wo alle gleich sind. Als nun beim 4- und 3gliedrigen sich eine Hauptaxe einstellte, so nannte er diese c, welche zu gleicher Zeit für die Flächenneigung gegen die Axe an cosinus erinnerte. Wurden nun auch die Seitenaxen a : a ungleich, so behielt die vordere in der Gesichtslinie die Benennung a bei, und die seitliche wurde b. Die aufrechte Axe c zu nennen, war sehr passend, denn sie liegt adäquat der Coordinatenaxe Z. Schade, daß er a und b nicht mit einander vertauschte, dann würden sie, den Krystall von vorn gesehen, den Coordinaten x und y entsprechen. Aber die Benennung war nun einmal so bei den deutschen Krystallographen (Kupffer, Rose, Wackernagel 2c.) eingebürgert. Selbst Naumann hat anfangs, als er die neue Bezeichnungsweise am Beispiele des Topases (Isis 1824. 487) zuerst Preis gab, auch noch die Weiß'sche Bezeichnung beibehalten. Allein bald darauf (Isis 1824 pag. 1092) entschuldigt er sich gleichsam darüber, und nennt fortan beim „prismatischen Systeme" die senkrecht vor dem Beobachter gedachte Halbaxe a, die größere Halbdiagonale b und die kleinere c. Er fügte sich damit Mohs. Jetzt blieb wenigstens b, und nur a und c wurden vertauscht. Aber Mohs und Naumann blieben sich selbst nicht gleich, bei den „plagiobasischen Systemen" wurde umgekehrt b an die vordere „Klinodiagonale" und c an die seitliche Orthodiagonale gesetzt; damit war der Wirrwarr vollendet, der mir viel Zeit gekostet hat.

Wenn zwei Kräfte senkrecht aufeinander wirken, so ist die Resultante eine Wurzelgröße. Das führte Weiß auf die Annahme irrationaler Axeneinheiten. Wer seine schöne Arbeit, über die Verhältnisse in den Dimensionen der Krystallsysteme (Abh. Berl. Akad. Wiss. 1825 pag. 163) durchblättert, kann sich der Sympathieen gerade bei den wichtigsten der Krystalle nicht entschlagen. Malus fand beim **Bergkrystall** die Dihexaeder-

endkante 133° 44′ 30″, **Kupffer** 133° 44′ 54″. Nun gibt bei letzterer Messung $tg^2\ 66 . 52 . 27 = 5{,}4828$, d. h. für $c = 1$ wird

$$a = \sqrt{\tfrac{1}{3}tg^2 - 1} = \sqrt{0{,}8276} = \sqrt{\frac{24}{29}} = 0{,}9097.$$

Jedem Andern hätte das genügt, aber Weiß sich wie ein zweiter Pythagoras in die Zahlen vertiefend, klügelte heraus, daß

$$\sqrt{\frac{24}{29}} = \sqrt{\frac{2 . 3 . 4}{2^2 + 3^2 + 4^2}} \text{ sei, mithin}$$
$$a : c = \sqrt{2 . 3 . 4} : \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}.$$

Es entspricht das einem Winkel von 133° 44′ 53″, 26. Die schärfsten Messungen schienen daher die einfachen Zahlenverhältnisse nur zu bestätigen. Setzte man beim **Feldspath**

$$b : a : c = \sqrt{3 . 13} : \sqrt{13} : \sqrt{3} = \frac{1}{1} : \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2}},$$

so wurden obige scheinbare Widersprüche pag. 47 in der Spiegelung gehoben. Erwog man nun die besten Messungen beim Epidot von Hessel, Phillips und Haidinger, so stellte sich das interessante Verhältniß heraus:

Feldspath $a : b = 1 : \sqrt{3}$, $a : c = \sqrt{13} : \sqrt{3}$.
Epidot $a : b = \sqrt{2} : 1$, $a : c = 3\sqrt{13} : \sqrt{3}$.

Kein Wunder, daß die neuen Positionen durch das Reflexionsgoniometer nur langsam erobert werden konnten. Wie Brooke (Intr. famil. Cryst. 1823 pag. IX) auf Hauy, so wurde Naumann (Isis 1824. 1086) über die irrationalen Größen unwillig, und meinte, es stritte gegen alle Principien der Logik und Naturwissenschaften, wenn man trotz der schärferen Messungen eine Vorliebe für gewisse ausersonnene einfache Verhältnisse bewahre. Doch konnte er selbst wieder des Zahlenklügelns sich nicht enthalten, nur wurden jetzt an die Stelle der irrationalen rationale gesetzt. So glaubte er das Verhältniß der Seitenaxen zur Hauptaxe im Rhomboeder der „Kalkhaloide“ zu finden:

rhomboedrisches $b : a = 48 : 41$ ... 105° 5′ 24″ (Kalkspath)
macrotypes $b : a = 48 : 40$ ... 106° 11′ 24″ (Braunspath)
brachytypes $b : a = 48 : 39$ ... 107° 19′ 6″ (Bitterspath).

Natürlich galt das auch nicht scharf, aber die Reihe blendete ihn so, daß er meinte, „in praxi würde jeder beim Kalkspath lieber das Dimensions„verhältniß 48 : 41 behalten, als das Weiß'sche $\sqrt{37} : \sqrt{36}$ oder gar das „**chimärische** $\sqrt{3} : \sqrt{2}$.“ Und doch wird diese Chimäre wie ein Stern leuchten, so lange man Krystallographie treibt. Sie ging unmittelbar aus $s : c = 1 : 1$ hervor, und ohne dieses einfachste Verhältniß von der Welt hätten wir keinen Hauy.

Im prismatischen Systeme fand sich, nach Weiß'scher Bezeichnung, beim

Topase	$a : b : c = 1000 : 1894 : 898$,	$b = a + c$
Cölestin	$a : b : c = 1000 : 1279 : 782$,	$b = c + \frac{a}{2}$
Schwerspath	$a : b : c = 1000 : 1306 : 814$,	$b = c + \frac{a}{2}$
Bleivitriol	$a : b : c = 1000 : 1301 : 784$,	$b = c + \frac{a}{2}$
Weißblei	$a : b : c = 610 : 1000 : 692$,	$b = c + \frac{a}{2}$.

Aber auch hier ist es immer nur eine Annäherung, auch darf man nicht übersehen, daß darunter drei isomorphe Substanzen sich befinden. Uebrigens hat Naumann später (Abhandl. königl. sächs. Gesellsch. Wiss. 1855 II. 507) sich mit Entschiedenheit zu den Quadratwurzelzahlen in den Grunddimensionen bekehrt. Man fällt mit solchem Spiel der Zahlen gar leicht in Irrthum. So glaubte auch Breithaupt mittelst der „**Progressions-Theorie**" (Schweiggers Journal Chem. Phys. 1828 Bd. 54 pag. 122, 249; Bd. 55. 275) alle tetragonalen und hexagonalen Primärformen aus tesseralen Gestalten (in oktaedrischer und rhomboedrischer Stellung) ableiten zu können, indem er die Permutationszahl $720 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$ zu Grunde legte, und darin die Axen auszudrücken suchte. So fand sich beim Zinnstein

$$P = \frac{343}{720} O = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{40} - \frac{1}{720}\right) O,$$

d. h. Axe $a : c = 720 : 343$ mit der Polkante $133^\circ 26' 35''$, was mit den Mohsischen Messungen $133^\circ 26'$ bis auf einen halben Grad stimmte. Beim Quarz war für den Würfel in rhomboedrischer Stellung die Progressionszahl $\frac{646}{720} \acute{H}$, d. h. da ein Würfel dreigliedrig gestellt sich $a : c = \sqrt{2} : \sqrt{3} = \sqrt{0,666..} : 1$ verhält, so gibt

$$\frac{720}{646} \sqrt{0,666..} = 0,91$$

die Seitenaxe a des Quarzes, was die Messungen von Malus bestätigten. Aber schon Hessel (Gehler's Phys. Wörterbuch 1830 V. 2 pag. 1290) machte darauf aufmerksam, wie man mit so großen Zahlen leicht der Wahrheit nahe komme. Dennoch suchte Breithaupt (Vollständiges Hdb. Mineral. 1836 I. pag. 278) die Ansicht sogar noch auf die übrigen Systeme auszudehnen. Neuerlich (Leonhard's Neues Jahrb. Miner. 1860. 341) nimmt er, auf die kleinsten Winkelunterschiede gestützt, sogar 13 Krystallisationssysteme an! Der Drang, alle Erscheinungen auf möglichst einfache Gesetze zurückzuführen, entschuldigt solche Versuche. Bleibt man ja jetzt nicht einmal mehr bei dem Isomorphismus stehen, sondern schreitet zur Morphotropie (Groth, Poggend. Ann. Bd. 141 pag. 39) vor, wornach die Krystalle blos nach **einer** Axe sich gesetzmäßig ändern, während die beiden andern feststehen sollen.

Naumann war vorzugsweise Krystallograph, wie seine genannten Arbeiten in der Isis 1823 und 1824, die Dissertation de Hexagonali crystallinarum formarum Systemate, womit er sich den 5. Febr. 1825 an der Universität Leipzig habilitirte, und der Grundriß der Krystallographie 1826 beweisen. Wie später noch Kupffer (Hdbuch der rechnenden Krystallographie 1831) bediente er sich dabei der sphärischen Trigonometrie. Doch war er zu sehr durchgebildeter Mathematiker, um in seinem „Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie 1830 2 Bd." die Vortheile der Coordinatentheorie nicht alsbald zu erkennen, wobei er an Levy und Whewell so tüchtige Vorgänger hatte. Eine Krystallfläche a : b : c mußte dann die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

haben, weil für y = z = o, x = a rc. wird. Kurz und bündig gaben die „Anfangsgründe der Krystallographie 1841, 2te Aufl. 1854" Schemate und Formeln. Endlich erschienen noch „Elemente der theoretischen Krystallographie 1856." Den größten Erfolg hatten jedoch die „Elemente der Mineralogie 1846, 8te Aufl. 1871", doch sind sie für Krystallographie unwichtiger, da sie nicht einmal die Axenverhältnisse angeben. Naumann, ein treuer Schüler von Mohs, kann sich daher wieder am Abend seines Lebens rühmen, die Welt erobert zu haben, was keinem Schüler von Weiß bis jetzt gelungen ist. Die heutige Menge liebt Schematismus, und will das Selbstverständliche breit getreten haben. Naumann erfand daher nicht blos besondere Zeichen in verhüllter Form, sondern auch eine neue gelehrte Sprache. Die Einzelflächen im 6gl., 4gl., 3gl., 2gl. Systeme mit zwei Unendlichzeichen, z. B. c : ∞a : ∞b heißen Pinakoide (πίναξ Brett). Die Oktaeder werden auf Mohs'sche Weise zu Pyramiden gestempelt. Aber auch das Dihexaeder ist eine hexagonale Pyramide, das Gyroeder eine trigonale. Kramp's Hiodon pag. 21 wird Scalenoeder (σκαληνός ungleichseitig), wegen der ungleichseitigen Dreiecke. Aber auch die gebrochenen 4gl. Tetraeder heißen tetragonale Skalenoeder. Sphenoide (σφήν Keil) sind Tetraeder, welche nicht zum regulären System gehören. Ein Augitpaar heißt Klinodoma, eine Schiefendfläche Hemidoma (δῶμα Haus). Das 2 + 1gl. und 1gl. System, was durch die Zahlen so vortrefflich bezeichnet ist, bekam zu den Mohsischen Benennungen hemi- und tetartoprismatisch, noch die neuen monoklinoedrisch und triklinoedrisch hinzu (ἕδρος seitig). Gegen die Weiß'sche Anschauung sollte das heißen, eine Kante der drei Axenebenen schief und zwei rechtwinklich, oder alle drei schief und keine rechtwinklich. Beide fielen zwar mit den Linearwinkeln der Axen zusammen, und konnten daher von Frankenheim mit dem kürzern Monoklin und Triclin vertauscht werden. Aber dazwischen lag noch ein diclinoedrisches mit zwei schiefen und einem rechten Winkel. Mohs pag. 36 hatte jene schon im Grundriß aber in anderer Weise angedeutet, sein später ge-

nanntes Hemianorthotyp (Leichtfaßl. Anfangsgr. Nat. Mineralr. 2te Aufl. 1836 pag. 52) ist Diclin, zwischen Hemiorthotyp und Anorthotyp gestellt hat es noch eine rhombische Basis, d. h. die Diagonalen rechtwinklich, statt der rhomboidischen beim Anorthotyp. Da erschien nun das vielgepriesene 7te Mitscherlich'sche Krystallsystem (Pogg. Annal. 1826 VIII. 427) in dem schon von Herschel dargestellten Unterschwefligsauren Kalke ($\dot{C}a\ddot{\dot{S}}\dot{H}^6$), worin die beiden Hexaidflächen a : ∞b : ∞c und b : ∞a : ∞c sich unter 90° schnitten; bei den verschiedenen Krystallen fand nur eine Differenz von 2′ — 3′ statt. Mitscherlich meinte sogar auch den Kalifeldspath dazu stellen zu können, da in der rechtwinklichen Säule P/M die Flächen T und l unter verschiedenen Winkeln gegen M geneigt seien. Nun hielt man das diklinometrische System für begründet. Aber Weiß schüttelte darüber den Kopf, denn in seiner Darstellungsart hatte das keinen Platz. Es war ein Verstoß gegen das Symmetriegesetz. Schon der Umstand, daß diklinometrische Axenebenen nothwendig trikline Axenlinien bedingen (Methode der Krystallographie 1840 pag. 129) hätte die Augen öffnen können. Mohs scheint diesen Unterschied nie begriffen zu haben, und selbst Haidinger (Handb. best. Mineralſ. 1845. 148) meinte noch, wenn eine der drei Abweichungen im Anorthoide gleich Null werde, und damit ins Hemianorthotyp übergehe, so komme man zur Grundlage, welche Mitscherlich für ein eigenes System aufgestellt habe. H. v. Kobell (Gelehrte Anzeig. Münch. Akad. 1856 Bd. 43 pag. 22) konnte dann auch durch das Stauroskop beweisen, daß das Salz alle Eigenschaften des 1gl. Systemes habe, und Zepharovich (Sitzb. Wien. Akad. 1862 Bd. 45. 1 pag. 502) zeigte, daß der rechte Winkel nicht blos 3′ sondern 12′ abweiche.

Die Naumann'sche **Bezeichnung** beruht zwar lediglich auf Weiß'scher Grundlage, aber mit einer unnöthigen Verhüllung, und damit Erschwerung. Greifen wir das 2gl. System heraus, so bedeutet P (Pyramide) das Grundoctaeder a : b : c, und mP = a : b : mc, es muß dabei dem Gedächtniß eingeprägt werden, daß der Coefficient m der aufrechten Hauptaxe c **vor** dem Symbol P ein für allemal seine Stelle habe. Folglich bleibt für die ungleichen Nebenaxen ab nur noch eine Stelle hinter P, wenn man das Symbol nicht anders überladen will. Da man nun jeden allgemeinen Ausdruck $\mu a : \nu b : \pi c$ durch Division auf die Form

$$a : nb : mc = a : \frac{\nu}{\mu} b : \frac{\pi}{\mu} c \quad \text{und} \quad na : b : mc = \frac{\mu}{\nu} a : b : \frac{\pi}{\nu} c$$

bringen kann, wo einmal n vor der langen Axe b, das andere Mal vor der kürzern a steht, so wird das durch

$$m\bar{P}n\,(= mc : nb : a) \quad \text{und} \quad m\breve{P}n\,(= mc : na : b)$$

ausgedrückt. Es ist das also eine zweite complicirtere Erwägung. Ungeschickter Weise wird das Längen- und Kürzenzeichen, welches passend Macro- und Brachydiagonale andeutet, über P gesetzt, so daß man in

der Idee leicht verführt wird, m statt n mit diesen Zeichen zu verbinden. Andere (Zepharovich) haben den Uebelstand gefühlt, und setzen

$$m\bar{P}n = mP\bar{n} \text{ und } m\breve{P}n = mP\breve{n},$$

was wesentlich dem Gedächtniß zu Hilfe kommt und das Symbol für den Druck bequemer macht, aber der Erfinder läßt sich darauf nicht ein. Alles Andere, wo m und n = ∞ oder o werden, ist für den Rechner selbstverständlich. Das große sich breit machende P wird dadurch offenbar überflüssig. **Dana** (System of Mineralogy 5te Aufl. 1868) läßt es daher ganz weg, und schreibt $m\bar{P}n = m - \bar{n}$, gibt den Hexaidflächen oP, $\infty\bar{P}\bar{\infty}$, $\infty\breve{P}\breve{\infty}$ das Zeichen Null (0) und führt für Unendlich ∞ den Buchstaben i (indefinite) ein. Wahrlich, dazu hätte man auf einfacherm Wege kommen können! Da die Hauptaxe c einzig durch ihre Stellung ist, so hätte man das allgemeine Flächenzeichen auf die Form c : ma : nb gebracht, und m — n wäre das allgemeine Symbol, wobei das ma : nb : c sich lexicographisch von selbst verstände. Wollte man dieses kurze Zeichen auf das 2 + 1gliedrige System übertragen, so würde das Oktaeder m — n in zwei Augitpaare zerfallen, in ein **vorderes** m — n und ein **hinteres** m′ — n, wo der Strich die hintere Axe a′ andeutet: alles ist selbstverständlich, da für c = 1 oder pc = c mit dem

$$\text{Axenkreuze } b \overset{a'}{\underset{a}{\cdot}} b$$

die vollständige Orientirung gegeben ist. Mit welchem Schwall von Zeichen werden wir dagegen für diese einfachste Sache überschüttet!

oP	± mP∞	± P∞	± mP∞	∞P∞
⋮	⋮	⋮		⋮
oP	± mPn	± Pn	± mPn	∞Pn
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
oP	± mP	± P	± mP	∞P
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
oP	± (mPn)	± (Pn)	± (mPn)	(∞Pn)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
oP	(mP∞)	(P∞)	(mP∞)	(∞P∞)

Das ± soll das Zerfallen der Oktaeder in zwei Augitpaare andeuten. Erschwerender Weise wird nun ≚ weggelassen, und durch Klammer (mPn) angedeutet, daß n sich auf die Klinodiagonale a beziehe, also mc : b : na bedeute, während mPn = mc : nb : a gedacht wird. Hätte Mohs nicht in unmathematischer Weise die Diagonalen der Basen pag. 42 vertauscht, so brauchte man nicht abermals das Gedächtniß zu beschweren. Naumann hat das gefühlt, und neuerlich die Klammer weggelassen, statt dessen mPn mit horizontalem und

schiefem Strich eingeführt, um anzudeuten, ob n sich auf die Ortho- oder Klinodiagonale beziehe. Dana bedient sich im letztern Falle des schiefen Accents m — ń. Da gewöhnlich die schiefe Diagonale die kürzere ist, so hätte ich es bei den Zeichen ⌣ und — bewenden lassen. Bei Weiß sind solche Aenderungen nicht nöthig, da a überall seine unveränderte Lage hat. Im Uebrigen bietet das Schema selbst für Anfänger keinen wesentlichen Nutzen, ja es schreckt ab, indem es Schwierigkeiten erzeugt, wo keine sind. $P = a : b : c$ nimmt die Mitte ein, **links** geht es der Endfläche

$$oP = oc : a : b = c : \infty a : \infty b$$

zu, daher muß dazwischen $m < 1$ sein, während **rechts**, wo es der Säule $\infty P = \infty c : a : b$ zu geht, $m > 1$ sein muß. **Aufwärts** gelangen wir zur Schiefendfläche $P\infty = c : \infty b : a$, **abwärts** dagegen zu den Diagonalflächen $(P\infty) = c : \infty a : b$, daher muß in beiden Fällen $n > 1$ sein, da es das eine Mal zum Unendlichen des b, das andere Mal zum Unendlichen des a wächst. Natürlich bedeutet

$$\infty P\infty = \infty c : \infty b : a \text{ und } (\infty P\infty) = \infty c : \infty a : b \text{ etc.}$$

Das Eingliedrige ist durch das

$$\text{Axenkreuz } b' \overset{a'}{\underset{a}{}} b$$

bestimmt, und damit die Einzigkeit der Flächen

$$a - b,\ a' - b,\ a - b',\ a' - b',$$

dargethan. Naumann gibt das durch

$$+ P' \text{ und } + {}'P; - P' \text{ und } - {}'P$$

jedenfalls nicht so anschaulich.

Da das sechsgliedrige System zur Bestimmung außer der Hauptaxe c auch nur zwei der Nebenaxen aa braucht, so ist das allgemeine Zeichen wie im 4gliedrigen

$$mPn = mc : na : a = mc : \frac{a}{\left(\frac{1}{n}\right)} : \frac{a}{1}$$

$$= mc : \frac{a}{\left(\frac{1}{n}\right)} : \frac{a}{1} : \frac{a}{1 - \frac{1}{n}} = mc : na : a : \frac{n}{n-1}\,a.$$

Da ferner das Rhomboeder Hälftflächner des Dihexaeders ist, so hätte das Zeichen auch dafür beibehalten werden können. Aber hier wird wieder ein neuer Buchstabe $\pm R$ eingeführt, und unter $+ R = c : a : a$ das Hauptrhomboeder, unter $- R = c : a' : a'$ das Nebenrhomboeder verstanden. Consequent wird nun

$$mR = mc : a : a = c : \frac{a}{m} : \frac{a}{m}.$$

Da den Seitenkanten eines beliebigen Scalenoeder

$$mRn = mc : \frac{2a}{n-1} : \frac{a}{n} : \frac{2a}{n+1}$$

ein bestimmtes Rhomboeder mR entspricht, so darf man die Hauptaxe c

nur um den Coefficienten n verlängern, und von dem Punkte nmc Linien nach den Zickzackecken des Rhomboeders ziehen, um das verlangte Scalenoeder zu bekommen. Im Handbuche der Mineral. 1863 pag. 88 habe ich die Formel entwickelt. Der gewöhnliche Dreiunddreikantner c : a : $\frac{1}{3}$a : $\frac{1}{2}$ hat R^3, es ist also m = 1 und n = 3 zu setzen, um den Axenausdruck zu bekommen.

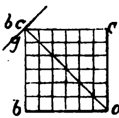
Auch Kupffer (Hdb. rechn. Kryst. 1831 pag. 190) schlug eine neue Bezeichnungsweise vor. Nenne man z. B. am Rhomboeder die Fläche P, die Endkante x und die Seitenkante z, und stelle durch Px die halbe Tangente der Neigung der Rhomboederfläche in dieser Kante vor, so könne in derselben Kante eine Fläche mit mfacher Tangente mPx bezeichnet werden. Es wäre dann ∞Px das nächste stumpfere Rhomboeder. Fläche nPz hätte die nfache Tangente der halben Neigung von P in Seitenkante z, und ∞Pz wäre die gerade Abstumpfung dieser Seitenkante, d. h. die 2te sechsseitige Säule. Kupffer muß dann die Mohs'schen Reihen zu Hilfe nehmen, und wird deshalb nicht minder complicirt, als dieser: m(∞Px)x = mP,x d. h. das Symbol bedeutet eine Fläche, die eine mfache Tangente vom nächsten stumpfen Rhomboeder hat rc. Läßt sich auch nicht läugnen, daß für die Flächen in einer Zone die Coefficienten m und n sich unmittelbarer ergeben, als bei den Axen, so hat die Bezeichnung doch wohl mit Recht keinen Eingang gefunden.

Konnten demnach die schiefaxigen Systeme nicht geläugnet werden, so beruhigte sich Weiß dabei nicht, sondern suchte nun nach den Gründen. Aber das ging über die Grenzen des Krystallographen hinaus. Glücklicher Weise besaß sein großer Schüler Neumann in der Physik und höhern Mathematik Kenntniß genug, um solch schwierige Untersuchung auf das Gründlichste führen zu können. Wieder waren es die Feldspäthe. Beim Tyroler Albit hatte schon G. Rose (Gilbert's Ann. 1823 Bd. 73 pag. 192) Zwillinge von Zwillingen nach dem Karlsbader Gesetz gefunden, Weiß fand sie nun sogar auch nach dem Bavenoer! Das gab den Anstoß zu Neumann's berühmter Albitarbeit (Abh. Berl. Akad. 1830. 189). Er fand, daß die Diagonalflächen n = a : $\frac{1}{4}$b : c und e = a : $\frac{1}{4}$b' : c mit einander rechte Winkel machen. Dieses überraschende Resultat hat H. vom Rath (Pogg. Annal. Ergänzb. V. 425) erst neuerlich wieder bestätigt, er fand e/n über P 89° 59′ 2″, und „das sei einer der Knoten, welche das Feldspath- und Albitsystem in Zusammenhang brächten." Auch kämen entschiedene Störungen vor: denn bei den gewöhnlichen Zwillingen, welche M gemein haben, und umgekehrt liegen, sollte T die l, etwa unter 2° schneiden, aber der Winkel war öfter viel kleiner, sogar an einem schönen Krystall von Miask 0°. Ueberdieß bietet die Arbeit ein wahres Muster für derartige Erörterungen. Bald darauf (Pogg. Ann. 1833 XXVII. 240) suchte er auch den Beweis zu führen, daß beim Gypse thermische, optische, akustische und Cohäsions-Axen mit drei

rechtwinklichen Richtungen zusammen fielen, die man zugleich als krystallographische nehmen könne (Hdb. Mineral. 1863 pag. 442). Die practischen Formeln dabei für die Beziehung der Flächen auf verschiedene Axen liefern zugleich den Beweis für den

Fortschritt in der Anwendung des Calcul. Hauy und Weiß bedienten sich meist der früher gewöhnlichen algebraischen Rechnungen mit Zuziehung der ebenen Trigonometrie. Wo sie auf kurzem Wege zum Ziele führt, und namentlich in populären Vorlesungen, gebührt ihr noch immer der Vorzug, zumal da man an gewöhnliche Mineralogen nicht zu starke mathematische Anforderungen stellen darf. Den Meisten ist das schon zu viel. Als nun aber, namentlich durch die französischen Lehrbücher (Lacroix, Traité élementaire de Trigométrie, deutsch 1805, 7 éd. 1822 von Ideler) die Coordinatentheorie immer mehr Eingang bekam, fand sie in Verbindung mit sphärischer Trigonometrie auch bald Anwendung bei den Krystallen. Kupffer (de Calculo crystallonomico 1821 Inauguraldissertation) lieferte in dieser Beziehung die ersten krystallographischen Sätze in gedrängter Form. Levy (Edinburgh Phil. Journ. 1822 VI. 227) in Paris und Whewell (Philos. Transact. 1825. 81) in London bedienten sich ihrer; überhaupt bekam die Sache immer mehr einen mathematischen Anstrich, die krystallographische Eigenheit wurde vernachlässigt. Jedoch durch besondere Originalität zeichnete sich

J. G. Graßmann (1779—1852. Zur physischen Krystallonomie und geometrischen Combinationslehre 1829. Davon Auszug in Poggendorf's Ann. 1836 Bd. 30 pag. 1) aus. Professor der Mathematik am Gymnasium zu Stettin wußte er weder von Bernhardi, noch von Weiß und Neumann etwas, sondern ihm war nur der Grundriß von Mohs zu Handen gekommen. Um so bewundernswerther ist die Tiefe, mit welcher er die Sache erfaßte. Er zog vom Mittelpunkte o einer Kugel drei beliebige Linien ob, oc, od nach der Kugeloberfläche, und verlängerte diese über o hinaus nach dem entgegengesetzten Ende, bis sie die Kugelfläche in b' c' d' schneiden, dann sind die Strahlen bb', cc', dd' durch o halbirt. So oft dieselben nicht in einer Ebene liegen und sich rechtwinklich schneiden, bilden sie ein Axenkreuz des regulären Systems. Legt man durch solche sechs Punkte bcdb'c'd' tangirende Ebenen, so schreiben diese einen Würfel um die Kugel; die Würfelflächen stehen respective senkrecht auf die Strahlen, werden gleichsam von diesen getragen. Die Strahlen heißen daher **Träger** (radii constructores). Denken wir uns unter den Trägern bewegende Kräfte, so erzeugen dieselben Resultanten, die wieder Träger neuer Flächen bilden. Diese zusammengesetzte Bewegung kann man „als den Weg des Durchschnittspunktes zweier sich bewegenden Linien“ betrachten. Denn die Linie oc wird längs ob gezogen, und die ob längs oc, beide müssen sich folglich in der Diagonale schneiden. Senkrecht dagegen steht die Granatoederfläche g, hervorgegangen aus der Combination der



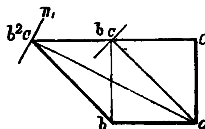
Kräfte (Elementarträger) bc. Denn bekanntlich wirken phoronomisch die Kräfte immer senkrecht. Ich kann in der Zone der Würfelkante weiter gehen, und den combinirten Träger bc wieder mit b verbinden, dann resultirt die

$$\text{Diagonale } b + bc = 2b + c = b^2c,$$

und senkrecht gegen diesen Träger steht die

$$\text{Pyramidenwürfelfläche } \pi_1 = \tfrac{1}{2}b : c.$$

Der „**Wiederholungsexponent**" 2 an b^2 zeigt an, daß der doppelte Elementarträger mit c combinirt ist. So bekomme ich dann



$$b^3c \text{ für } \pi_2 = \tfrac{1}{3}b : c \ldots b^\beta c \text{ für } \pi_{\beta-1} = \frac{1}{\beta}\, b : c.$$

Die sechs

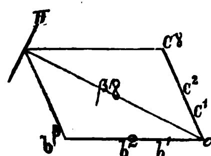
Unionen b . b' . c . c' . d . d'

geben zwölf

Binionen bc . bc' . bd . bd'
b'c . b'c' . b'd . b'd'
cd . cd' . c'd . c'd',

den zwölf Flächen des Granatoeders entsprechend. Eigentlich hätten wir $\frac{6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2} = 15$, allein die drei bb', cc', dd' lassen sich nicht verbinden, denn sie bezeichnen entgegengesetzte Kräfte, sind daher gleich Null.

Wie nach der einen Seite b hin die Reihe von Trägern $b^\beta c$, so kommt nach der andern c hin die Reihe $c^\gamma b$. Combiniren wir dann allgemein b^β und c^γ, d. h. construiren wir aus einer beliebigen Zahl von b (βb) und aus einer beliebigen von c (γc) die Diagonale der Kräfte $\beta\gamma$, so steht senkrecht dagegen die

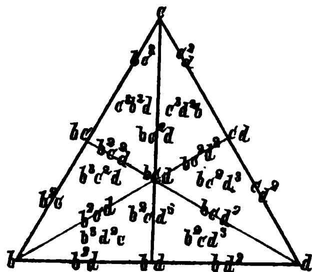


$$\text{Pyramidenwürfelfläche } \pi = \frac{b}{\beta} : \frac{c}{\gamma} : \infty d$$
$$= \gamma b : \beta c : \infty d.$$

Graßmann bezeichnet daher den Körper einfach mit den Wiederholungsexponenten $\beta\gamma$, worin β und γ jede ganze Zahl von o — ∞ bedeuten können, die meist sich zwischen engen Grenzen halten, wie die Zahlen der Töne, wovon Graßmann öfter redet, ohne von Weiß pag. 35 zu wissen; nur daß wir es jetzt nicht mit den Wurzeln, sondern mit den wirklichen Tonverhältnissen zu thun haben. Ist $\beta = \gamma$, so kommt das Granatoeder, gleichgültig, welche Zahlen wir unterlegen, denn die beziehen sich nur auf die absolute Größe des Kugelradius. Für $\beta = o$ muß $\gamma = \infty$ werden, d. h. wir haben die Lage der Würfelebene durch den Mittelpunkt im Sinn. So oft $\beta > \gamma$ ist, neigt der Ort des Trägers dem β zu. Es folgt das aus der Construction des Parallelogramms. Die zugehörige Fläche π kommt dann auch im (kleinern) b zum Schnitt. Für $\gamma > \beta$ ist es natürlich umgekehrt. Schreiten wir nun zu den

Ternionen: bcd . bcd′ . bc′d . bc′d′.
b′cd . b′cd′ . b′c′d . b′c′d′,

so können nur 8 von den $\frac{6 . 5 . 4}{1 . 2 . 3} = 20$ möglichen Statt haben, weil gleiche Buchstaben, wie bb′c, bcc′ ꝛc. nicht combinirt werden können, sondern sich aufheben. Damit ist die combinatorische Forderung des Oktaeders bewiesen. Wie die Diagonale des Parallelogramms pag. 58 den Durchschnitt bewegter Linien, so beschreibt die „Transversale“ des Parallelepipedums „den Weg des Durchschnittspunktes dreier sich bewegenden Ebenen,“ und senkrecht dagegen steht das Oktaeder bcd. Mit diesen drei Körpern b . c . d; bc . bd . cd und bcd, deren Träger wir uns in ein Dreieck setzen, haben wir die Ausgangspunkte der ganzen Entwickelung. Wie sich aus dem Würfel in den Eckpunkten b . c . d das Granatoeder bc . bd . cd im Mittelpunkte der Seiten ergibt, so folgt zwischen Granatoeder und Würfel der Pyramidenwürfel $bc^2.b^2c.b^2d.bd^2.cd^2.c^2d$. Zwischen Oktaeder bcd und dem Würfel b . c . d liegt der Reihe nach das Leucitoeder $b^2cd . bc^2d . bcd^2$, denn das Zeichen



b^2cd bedeutet $\frac{1}{2}b : c : d = b : 2c : 2d$ ꝛc.

Zwischen Oktaeder bcd und Granatoeder bc . bd . cd liegt das

Pyramidenoktaeder $b^2c^2d . b^2cd^2 . bc^2d^2$,

denn das Zeichen

b^2c^2d bedeutet $\frac{1}{2}b : \frac{1}{2}c : d = b : c : 2d$ ꝛc.

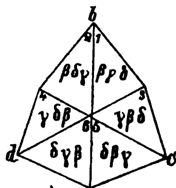
Endlich haben wir nun in die Dreiecke die 48flächner einzuschreiben, indem wir die Buchstaben in den Ecken addiren, also z. B. oben links zwischen

$$c + bc + bcd = c^3b^2d = \tfrac{1}{3}c : \tfrac{1}{2}b : d$$

liegt das gewöhnliche Pyramidengranatoeder 3 2 1 ꝛc. Der alte Pater Kircher (Ars magna sciendi sive Combinatoria. 1669) rühmt von der Combinationslehre, daß sie sine ulla capitis defatigatione vorgenommen werden könne: das bestätigt sich hier glänzend, die ganze Rechnung löst sich auf in ein gedankenloses mechanisches Geschäft, in die einfachste Addition!

Auf die Kugel ist die Sache leicht gebracht, man darf sie nur in 8 (gleiche) Octanten theilen, einen Octanten erfüllt dann unser Dreieck, und die andern ergeben sich durch die Strichelung b′ . c′ . d′ von selbst. Da im regulären System die Axen b = c = d = 1 sind, so läßt Graßmann die Axenbuchstaben weg, und setzt blos die Wiederholungsexponenten $\beta\gamma\delta$ hin, wobei $\beta > \gamma > \delta$ gedacht wird. Behufs der Rechnung muß hier Vorsicht auf die Stellung der griechischen Buchstaben genommen werden,

und das geht dann doch nicht immer »sine capitis defatigatione« ab. Für den positiven Octanten gilt nebenstehende Figur, die auf lexicographischer Ordnung beruht: β muß an der Ecke b die erste, an c die zweite und an d die dritte Stelle einnehmen, weil sie die größte Zahl ist; die mittelgroße γ auf Fläche (1) die Mitte, weil sie sich auf c bezieht, die lexicographisch die zweite Stellung hat, und δ die dritte, weil sie sich auf die dritte Stelle d bezieht ꝛc. Ist das ein für allemal richtig gestellt, so ist z. B. der Winkel, welchen die Flächen $1 = \beta\gamma\delta$ und $4 = \gamma\delta\beta$ mit einander machen, $\cos = \frac{\beta\gamma + \gamma\delta + \beta\delta}{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}$. Ich darf nur die Wiederholungsexponenten über einander stellen $\frac{\beta\gamma\delta}{\gamma\delta\beta}$ und die drei Producte der über einander stehenden Buchstaben durch die Summe der drei Quadrate dividiren. Die gestrichelten Buchstaben gelten natürlich negativ. Man staunt über die Einfachheit, und ist anfangs überrascht, aber im Grunde ist die ganze Entwickelung nichts als eine Erweiterung des Kantenzonengesetzes, was Weiß schon in den Abhandl. Berl. Akad. (1818. 270 und 1824. 247) für rechtwinkliche Axen auf das Allgemeinste darlegte.



Man kann natürlich auf diese Weise auch die schiefwinklichen Systeme behandeln, da das Parallelogramm der Kräfte wie die Zonenpunkt- und Sectionslinienformeln, von der Rechtwinklichkeit unabhängig sind. Das hat Graßmann (Pogg. Ann. 1836 Bd. 30 pag. 25) am eingliedrigen Axinit nachgewiesen. Hessel (Gehler's Physikalisches Wörterbuch 1830 V. 1231) ging gleich auf diese Ideen ein, und nannte jenen Zonenzusammenhang das „Gerengesetz" und die Träger „Gerenstrahlen." „Gere" heißt bei norddeutschen Tischlern die Diagonale eines Quadrats, nach Kepler „Zwerlini, Durchzug" (Raumer, Versuch eines Abc-Buchs der Krystallkunde 1820 pag. XVI). Er entwickelt dann weiter eine Menge Formeln, um die Lage der Strahlen zu bestimmen, führt aber eine ganz absonderliche Sprache, die das Lesen der im Uebrigen vortrefflichen Arbeit sehr erschwert. Er gehört mit einem Worte zu den gründlichen Vorläufern von Miller. Wenn der heutige Veteran in Deutschland so wenig Beachtung fand, so sind daran wohl lediglich Darstellung und Nomenclatur Schuld. Man darf nun einmal dem gebildeten Leser nicht zumuthen, daß er alles mühsam Angeeignete plötzlich gegen das Neue, nicht selten zweifelhaft Bessere, sich aneigne. Und doch ist Hessel 1854 noch von Volger übertroffen, wo sich die Sache ins wahrhaft Lächerliche zuspitzte, wie schon ein einziger Ausdruck beweisen kann: rechts knöchelhöckertimplig-knöchlich-flachkippliger Fahlerz-Timpling (Kobell, Geschichte Mineral. 368).

Wenn es sich um neue Methoden der Rechnung handelt, so ist besonders auch W. **Whewell** (Philosoph. Transact. 1825 pag. 87) zu nennen, in dessen Fußtapfen später Miller trat. Er bedient sich der Indices

hkl, pqr 2c., und geht namentlich auf die 3 + 1axige Stellung des 3- und 6gliedrigen Systems nicht ein, sondern bleibt bei Hauy stehen, indem er die drei Rhomboederkanten wieder als gleich lange und gleich schiefe Axen einführt. Heißt der schiefe Kantenwinkel des Rhomboeders α, so findet er den Winkel ω zweier Flächen hkl und h'k'l'

$$-\cos\omega = \frac{hh'+kk'+ll'-(h'k+hk'+h'l+hl'+k'l+kl')\cos\alpha}{\sqrt{[h^2+k^2+l^2-2(hk+hl+kl)\cos\alpha]\,[h'^2+k'^2+l'^2-2(h'k'+h'l'+k'l')\cos\alpha]}}$$

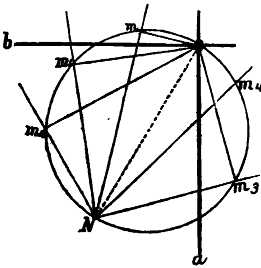
Es ist selbst für Krystallographen nicht leicht, sich in diese veränderte Stellung hinein zu finden, auch sind die Wege keineswegs immer die einfachern, wie z. B. die Prop. 38 (l. c. pag. 118) beweist, welche wir nach dem Kantenzonengesetz durch einfache Addition der Nenner zu Stande bringen. Aber alle Achtung vor der mathematischen Methode!

Wir treten damit in die Periode, wo die beiden Wege, **beschauliche** und **rechnende**, immer weiter auseinander gehen, und wo sich ein Calcul der Sache bemächtigt, dem nur wenige Mineralogen gewachsen sind. Auch ich bekenne mich in letzter Beziehung zu den schwächern. Daher gab ich von jeher Darstellungsweisen, welche die Schwierigkeiten in Bildern zu überwinden suchen, den Vorzug. In das Bild mit unserer Anschauung einzudringen, und die Entwickelung der Flächen aus ihrem Zonenzusammenhange darzulegen, bleibt Hauptaufgabe, welche mittelst Projectionen am populärsten gelöst wird. Schon als Student habe ich, um den schwierigen Vorträgen von Weiß folgen zu können, mir Linearprojectionen gemacht, d. h. sämmtliche Flächen durch **einen** Punkt gelegt, und durch eine beliebige Ebene (Projectionsebene) aufgefangen. Es fallen dann die parallelen Krystallflächen in eine Ebene (Reductionsebene) zusammen, die sich durch eine Schnittlinie (Sectionslinie) kundgibt; während die Kanten **einer** Zone sämmtlich durch eine einzige Linie (Zonenaxe) gehen, welche die Projectionsebene in einem Punkte schneidet. Die Zone gibt sich also durch einen Punkt (**Zonenpunkt**) mit wirtelförmigen Linienstrahlen kund. Als Weiß im Frühjahr 1834 die Sache zuerst in meinen Händen sah, blieb er einen Augenblick nachdenklich stehen, aber nicht lange, so ging ihm schon unter freudiger Aufregung das volle Licht darüber auf. Es bildete gleichsam den Schlußstein seiner Betrachtungsweise, welchen zu legen mir vergönnt war. Denn damals wußten wir beide nicht, daß Neumann (Beiträge zur Krystallonomie 1823 pag. 117) es schon angedeutet habe: wie einst Bernhardi die Neumann'sche, so hatte auch Neumann diese Methode vorausgesehen. Aber im Grunde war dann doch erst mit der Ausführung die Sache da. Daß hier die Lage der Flächen und Zonenaxen unmittelbar in die Augen tritt, während die graphische Methode (wie das Polardreieck) die Verhältnisse umkehrt, nicht die Zone sondern die Fläche als Punkt und die Zone nicht die Fläche als Linie gibt, ist ein nicht gering anzuschlagender Vorzug. Selbst einem Weiß gingen die Perpendikel gegen den Sinn,

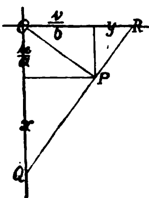
er hat sich ihrer in seinen Schriften nie bedient, während er die Linearprojection sofort benutzte, schon im Herbst 1834 den versammelten deutschen Naturforschern in Stuttgart vorlegte, und mich schließlich veranlaßte, es in Poggendorfs Annalen (1835 Bd. 34 pag. 503 u. Bd. 36 pag. 245) bekannt zu machen. Er selbst ging nun im Lichte dieser Darstellung seine frühern Arbeiten wieder durch, begann mit dem Gyps (Abh. Berl. Akad. 1834 pag. 623), schritt zum Feldspath in der viergliedrigen (l. c. 1835 pag. 281) und Säulenstellung P/T (l. c. 1838 pag. 253), zum Euklas (l. c. 1841. 249) rc. Ich habe in meinen Vorlesungen und Arbeiten sie hauptsächlich zu Grunde gelegt.

Da bei dieser Art die Flächen durch eine **Linie**, bei Neumann durch einen **Punkt** dargestellt werden, so stellte sie Weiß (Abh. Berl. Akad. 1834 pag. 624) unter dem Namen **graphische Linearmethode** der Neumann'schen **Punktmethode** gegenüber. Man könnte sie, auf die Zonen sehend, auch umgekehrt benennen: denn bei mir liegen die Flächenorte einer Zone in Punkten, bei Neumann in Linien, und damit fiele der Stempel der größern Einfachheit wieder auf die meinige zurück. Seit L. Ditscheiner (Sitzungsbericht Math. Cl. Wien. Akad. 1857 Bd. 26 pag. 279) uns mit einer graphischen Kreismethode bekannt gemacht hat, wo die Flächenorte in Kreislinien liegen, zeigt sich auch wohl Lust, die alte Weiß'sche Benennung wieder umzukehren: dann würde meine Methode als „Punktmethode" an der Spitze stehen, und wir schritten durch die Neumann'sche „Linienmethode" zur Ditscheiner'schen

Kreismethode. Derselbe fällt auf die Wirtelstrahlen eines Zonenpunktes N vom Mittelpunkte o Perpendikel om, om,, om₂ rc., und nennt m den Ort der Flächen, dann liegen natürlich alle diese Orte in einem Kreise, der oN als Durchmesser hat. Denn dieser Durchmesser muß für sämmtliche rechtwinklichen Dreiecke oNm die Hypotenuse bilden. Für den Krystallographen hat die Sache zwar keine besondere Wichtigkeit, aber für den Mathematiker ist es immerhin erfreulich, daß die Sache so unmittelbar aus unserer **Punktmethode** hervorgeht. Neumann's **Linearmethode** führt dagegen schon auf etwas complicirtere Weise zur



Parabelmethode (Sitzb. Wien. Akad. 1858 Bd. 28 pag. 93). Suchen wir hier den Ort P einer Fläche $\frac{\mu}{a}+\frac{\nu}{b}$; verbinden wir dann den Mittelpunkt O mit diesem Orte P, und ziehen gegen diese Linie OP durch den Ort P eine senkrechte QR, so bildet dieselbe den neuen Ort in der Parabelmethode. Da in dem rechtwinklichen Dreiecke



OPQ die Coordinate $\frac{\nu}{b}$ die mittlere Proportionale zwischen $\frac{\mu}{a}$ und x und ebenso im Dreieck OPR $\frac{\mu}{a}$ zwischen $\frac{\nu}{b}$ und y ist, so wird

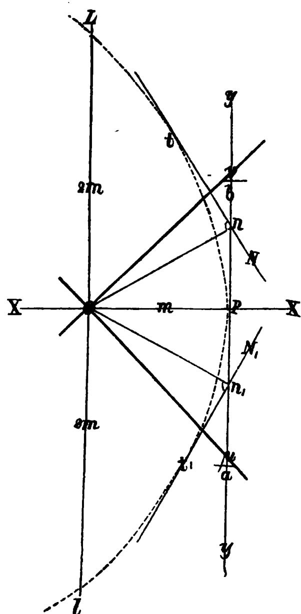
$$x = \frac{\nu^2}{b^2} \cdot \frac{a}{\mu} \text{ und } y = \frac{\mu^2}{a^2} \cdot \frac{b}{\nu}, \text{ folglich}$$

$$OQ = \frac{\mu}{a} + \frac{\nu^2}{b^2} \cdot \frac{a}{\mu} = \frac{\mu^2 b^2 + \nu^2 a^2}{\mu a b^2},$$

$$OR = \frac{\nu}{b} + \frac{\mu^2}{a^2} \cdot \frac{b}{\nu} = \frac{\mu^2 b^2 + \nu^2 a^2}{\nu b a^2}.$$

Wir können also aus den gegebenen Flächenausdrücken $\frac{\mu}{a} + \frac{\nu}{b}$ die Lage der neuen Orte QR sofort auf folgende Weise construiren:

Gegeben sei eine **Zonenlinie** $\frac{\mu}{a} : \frac{\nu}{b}$ mit den Flächenorten nn, 2c.,



wir fällen vom Centrum o aus auf die Zonenlinie ein Perpendikel OP, und construiren senkrecht gegen on und on, die neuen Linienorte N und N,, so tangiren dieselben in t und t, eine Parabel, welche ihren Brennpunkt in O und ihren Scheitel in P hat. PX ist daher die Axe, und Ll = 4m der Parameter. Denn die Gleichung einer Linie, welche durch zwei Punkte x', y' und x'', y'' geht, ist

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y' - y''}{x' - x''} \text{ d. h.}$$

$$y = \frac{y' - y''}{x' - x''} x + \frac{x'y'' - y'x''}{x' - x''}.$$

Nun sind die Coordinaten des Punktes

$$o \ldots x' = m, \; y' = o$$

und die Coordinaten des Punktes

$$n \ldots x'' = o, \; y'' = y'',$$

dieß in die Gleichung der Linie gesetzt, gibt uns die Gleichung der Linien on, welche durch die Punkte o und n geht

$$y = -\frac{y''}{m} + y''.$$

Der Ort N steht aber senkrecht darauf, hat also

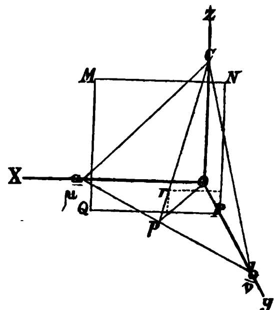
$$y = \frac{m}{y''} + y''.$$

Das ist die Gleichung einer Tangente an eine Parabel. Wie die

Kreise alle ihren Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten hatten, so haben sämmtliche Parabeln ihren Brennpunkt daselbst. Zur

Ellipsenmethode gelangt man, wenn man die Kreise der Punkt- und Linienmethode auf eine Kugel trägt, und diese nach den Regeln der darstellenden Geometrie auf eine Geradendfläche projicirt, dann werden die größten Kreise Ellipsen. Da diese nach meiner Punktmethode Sectionskreise, nach der Neumann'schen Linienmethode aber Zonenkreise darstellen, so finden beide Darstellungen in der Ellipse ihren Verbindungspunkt. Ditscheiner (Sitzb. Wien. Acad. 1858 Bd. 28 pag. 134) schreitet nun sogar noch zur

Hyperbelmethode. Hier sind die Orte der Krystallflächen zwar wieder Punkte, aber die Projectionsebene muß verrückt werden: Habe ich nemlich eine allgemeine Fläche



$$c : \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu},$$ so muß ich auf die Sectionslinie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ das Perpendikel op fällen, dann ist cp die **„Linie des stärksten Falles"**. Die Projectionsebene MNPQ muß ich nun durch P in der Axe y parallel der Axenebene xz so legen, daß OP = 1 ist. Wo die Linie des stärksten Falles cp diese Projectionsebene MNPQ im Punkte r schneidet, ist der Flächenort der „graphischen Hyperbelmethode." Man sieht, die Sache wird immer verwickelter. Auch gehen die Hyperbeln nicht mehr durch den Axenmittelpunkt, sondern ihr Parameter wächst, je mehr sie sich demselben nähern. In der

Ebene sind bei solchen graphischen Methoden die Flächenorte **Linien** (wie bei meiner und der Parabelmethode) oder **Punkte** (Neumann'sche-, Kreis-, Ellipsen-, Hyperbelmethode); die Flächenzonen fallen dagegen in Punkte, Linien, Kreise oder Kegelschnitte. Aber man kann nun auch zum

Raume fortschreiten, worin die Zonen nicht mehr als Linien, sondern als Flächen (Zonenflächen) auftreten. Nur meine Projection, von Ditscheiner **Punktmethode** genannt, zeigt die Zone noch in einer **Linie** (Zonenaxe), und erweist sich dadurch immer wieder als die einfachere. Zu dem Ende denken wir uns alle Flächen durch einen gemeinsamen festen Punkt (Nullpunkt) gelegt, dann strahlen alle Zonenlinien von O nach entgegengesetzten Enden ins Unendliche; zwei Zonenlinien bestimmen eine Ebene; drei Zonenlinien bestimmen eine oder drei Ebenen, letztere heißen **Hexaid;** vier Zonenlinien bestimmen eine oder vier Ebenen, letztere bilden Vierzonenkörper oder Oktaide; so kommen wir durch fünf Strahlen zum Decaide, durch sechs zum Dodecaide 2c. Der Mathematiker sieht da leicht ein, daß mittelst Gleichungen der Linien und Flächen nebst Trigonometrie man alle möglichen Rechnungen ausführen kann,

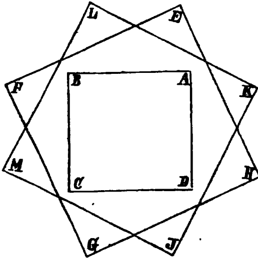
ohne auf die Anschauung der Körper zurückzugehen, Ditscheiner (Sitzungsb. Wien. Akad. 1858 Bd. 28 pag. 201) führt das durch, und nennt den Strahl **Zonengerade.** Die Neumann'sche, von Ditscheiner **Linearmethode** genannt, führt uns dagegen schon zur **Zonenebene**, die durch den Nullpunkt gelegt auf die Zonengerade (Zonenaxe) senkrecht steht. Zu gleicher Zeit steht sie senkrecht auf den Flächenwirtel, der in der Zonenaxe liegt. Denken wir uns die Zonenaxe als Pollinie, so bildet die Zonenebene den Aequator und der Flächenwirtel bestimmt die Meridiankreise. Fassen wir weiter die Pole dreier Zonenaxen ins Auge, so bestimmen dieselben ein körperliches (sphärisches) Dreieck. Legen wir die drei zugehörigen Zonenebenen senkrecht dagegen, so schließen dieselben ein körperliches Dreieck ein, welches mit dem vorigen die Winkel vertauscht. Beide bilden also in Bezug auf einander Polardreiecke, verhalten sich reciprok zu einander. Aber wie bei Dreiecken, so entstehen auch bei andern Ecken mit 4, 5 und n Kanten ähnliche polare Gegensätze, kurz ich bekomme Bild und Gegenbild. Alles das geht aus dem Nullpunkte hervor, und strahlt in den unendlichen Raum hinaus. Denken wir uns nun aber die Zonenaxen als ziehende Kräfte, so ist das Resultat der Zugkraft die Zonenebene: die drei Zonenaxen des Würfels erzeugen ihre eigenen Flächen; die sechs Zonenaxen des Oktaeders dagegen die Flächen des Granatoeders, und die vier Säulenzonen des Granatoeders die Oktaederflächen. Wollen wir uns davon eine Vorstellung machen, so geschieht das am Besten auf der Kugel oder Ebene: das Kugelbild machen wir, wie der Geograph seine Weltkugel, stereographisch, und die Ebene hat dann mit der Mercatorschen Projection gemein, daß die Pole des Tafelkreises in Parallellinien sich auflösen. Wie der Schiffer nur mit Seekarten schiffen, so kann der Krystallograph sich am besten auf Ebenen orientiren, und damit viele Rechnungen ersparen.

Da alle **Kugeln** ähnlich sind, so ist nur ein einziges Bild möglich, falls man den Nullpunkt der Strahlen in den Mittelpunkt legt. In der Ebene gibt es dagegen so viele Figuren, als man Tangentialebenen von verschiedener Lage an die Kugel bringen kann, d. h. Würfel, Oktaeder, Granatoeder, verschiedene Pyramidenwürfel 2c. geben jegliche ein anderes Bild, aber immer mit denselben Zonenpunkten und Flächenlinien. Was die **Zonenkugeln** im Raume betrifft, so bringt man auch diese leicht zur Vorstellung: denn man darf nur von den Flächen eines beliebigen Zonenpunktes ma + nb nach der Kreismethode die Orte suchen, durch den Nullpunkt eine Ebene (Zonenebene) senkrecht gegen die Zonenaxe legen, und im Mittelpunkte des gefundenen Zonenkreises ein Perpendikel errichten, so bestimmt dieses im Schnittpunkte mit der Zonenebene den Kugelmittelpunkt. Da nun alle Zonenkugelflächen, wie die Zonenkreise durch den Nullpunkt gehen müssen, so ist damit die Existenz der Zonenkugeln nachgewiesen. Wenn nun Ditscheiner sogar noch zu den Zonenkegeln und Zonenconoiden fortschreitet, so hat die Sache zwar keinen krystallographischen Werth,

aber sie gibt doch immer einen mathematischen Einblick in den harmonischen Bau der Krystalle.

Das kleine Buch, über die „Methode der Krystallographie 1840, welches ich nach meiner Uebersiedelung von Berlin nach Tübingen im Winter 1837/38 etwas flüchtig niederschrieb, und das daher nicht ohne Mängel, sogar noch mit einigen Fehlern behaftet blieb, hatte den einzigen Zweck, an der Hand der Projection auf populärem Wege die Nothwendigkeit von sechs Krystallsystemen zu beweisen. Dazu bedurfte es nur ein Paar Linien, und des Satzes, daß zwei Dinge entweder gleich oder ungleich sind. Wie von selbst entwickelt sich durch die vier möglichen Säulen zu den acht möglichen Hexaiden auf dem einfachsten Wege die vollständigste Einsicht in die wunderbare Symmetrie der Krystalle, die nicht anders gedacht werden kann, als sie ist. Mag es für den Mathematiker Bedürfniß sein, die Sache von einem höhern aber damit auch unverständlichern Standpunkte zu ergreifen, wie etwa Bravais (Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique 1849, Études cristallographiques 1851), Möbius (Bericht Verh. k. sächs. Ges. Wissensch. 1849 pag. 65), Frankenheim (Ueber die Anordnung der Molecüle im Krystall, Pogg. Ann. 1856 Bd. 97 pag. 337) oder Dr. Sohncke (Pogg. Ann. 1867 Bd. 132 pag. 75), mir wenigstens macht es große Noth, sie zu verstehen. Jedenfalls aber gelangen sie alle immer von neuem wieder zu demselben längst entwickelten Resultate, daß nur sechs Systeme möglich sind. Lassen wir

Möbius sprechen, so heißt es (l. c. pag. 68): „wird in der Ebene „des **regulären Vierecks** ABCD ein fünfter Punkt E hinzugefügt, so „wird damit die Symmetrie im Allgemeinen „aufgehoben. Denn die Figur ABCDE kann „von einer ihr gleichen und ähnlichen abcde „im Allgemeinen nur auf eine Weise gedeckt „werden. Die durch den Zusatz von E verlorenen gegangene Symmetrie wird man aber „dadurch wieder herstellen können, daß man „in der Ebene A...E noch sieben neue „Punkte FGHJKLM hinzusetzt; diejenigen „nemlich, auf welche der Punkt e der Figur „abcde fällt, wenn man das Quadrat ABCD auf die noch übrigen „sieben Arten vom Quadrate abcd gedeckt werden läßt. Denn setzt man „auch zur Figur a...e sieben neue Punkte fg...m hinzu, so daß die „Figur ab...m der Figur AB...M gleich und ähnlich wird, so „werden, so oft sich auf eine der acht verschiedenen Weisen die beiden „Quadrate ABCD und abcd decken, auch die acht Punkte e...m mit „den acht Punkten E...M, nur immer in anderer Ordnung, zusammen „fallen. Es wird daher, so wie das Quadrat ABCD, auch die hinzugefügte Figur E...M, und desgleichen auch die aus beiden zusammengesetzte A...M, jede nach der Zahl 8 symmetrisch sein." Nun, ohne



Kopfzerbrechen versteht man das nicht, und doch liegt für Krystallographen die Einsicht so nahe: denn wenn eine Linie EF die Seiten des Winkels B an der Quadratsäule ungleich schneidet, so fordert die Symmetrie eine Gegenfläche LM, die die Ungleichheit wieder aufhebt, und das an den vier Ecken, weil sie gleich sind, wiederholt, gibt 8 (Handbuch Mineral. 1855 pag. 14). Gar nicht unpassend schlägt der berühmte Mathematiker die neuen Systemnamen vor: irreguläres (vorerstes), erstes, zweites, drittes, viertes und reguläres. Verdoppelt man diese Zahlen, so geht bei den mittlern Systemen die Zahl der gleichen Parallelräume hervor. Das erste ist das 2 + 1gliedrige, das zweite das zweigliedrige, das dritte das dreigliedrige, das vierte das viergliedrige, wie ich die Weißischen Namen mit Ausnahme des ersten schon längst abzukürzen vorschlug (Methode Kryst. 1840 pag. 257 u. 309). Es zeigt sich da immer wieder, daß die ältesten Benennungen die besten sind. Jedes Glied sollte eigentlich ein Doppelglied (Symmetrieglied) sein. Insofern ist das jetzige eingliedrige gliederlos, und steht als irreguläres dem regulären vortrefflich gegenüber. Dann müßte das 2 + 1gliedrige wirklich **eingliedrig** heißen. Aber wird das nicht anfangs die Sprache verwirren? Weiß könnte uns auch hier aus der Noth helfen. Er nannte (Abh. Berl. Akad. 1820 pag. 196) das eingliedrige singularium, das 2 + 1gl. unobinarium, das 2gl. binarium 2c. Würde man das Wort binar mit Paar übersetzen, so wären die Bezeichnungen unpaarig, paarig, zweipaarig, dreipaarig, vierpaarig, vielpaarig gegeben, und man würde mit den „Gliedrigen“ nicht in Collision kommen. Sehr schön werden die Krystalle kaleidoskopischen Figuren verglichen, denn wenn man zwei Spiegel unter Winkeln von 180°, 90°, 60°, 45° an einander setzt, und einen Stab dazwischen stellt, so kommen der Reihe nach 1, 2, 3, 4 Stäbe zum Vorschein, bei 30° 6 (6gliedr.), die Flächenträger der Systeme repräsentirend, und bei drei Spiegeln unter 90°, 60° und 45° zusammengesetzt 24.

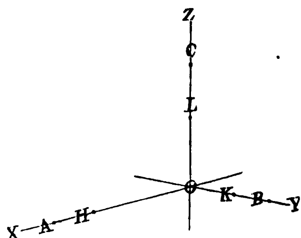
Durch alle jene mathematische Speculation und Bewältigung von Punkt- und Molecülhaufen wird die Nothwendigkeit der Sache der einfachen Anschauung nicht so klar, als wenn man aus dem Begriff des Raumes und der Krystallfläche heraus durch die Säule und das Hexaid zum endlichen Ziele der Zahl 24 fortschreitet. Bei der alljährlichen Wiederholung meiner Vorlesungen ist mir das System zum vollsten Abschluß gediehen. Auch Hr. Dr. Werner (Leitfaden zum Studium der Krystallographie 1867) hat den consequenten Gang klar dargelegt. Die Winkelrechnung betreffend, so findet sie weniger im Raume, als auf der Ebene statt (Beiträge zur rechnenden Krystallographie 1848), es haben daher selbst Mathematiker (Schröder, Elemente der rechnenden Krystallographie 1852) ihr die Aufmerksamkeit zugewendet. Ja was die Figuren dabei für den Einblick zu leisten vermögen, das zeigen unter vielen andern die gründlichen Arbeiten von Hochstetter (Krystallsystem des Rhomboedr. Kalkhaloides 1854,

Denkschr. Wien. Acad. VI), Dr. E. Weiß (Krystallogr. Entwickelung des Quarzsystemes 1860, Abhandl. Naturf. Gesellsch. Halle V) rc., und die herrlichen Krystallzeichnungen, wie sie uns Herr Hessenberg seit 1856 in den Abhandlungen der Senckenberg. Naturf. Gesellsch. zu Frankfurt (II. 158, 243; 1860 III. 255; 1861 IV. 1, 181; 1864 V. 233; 1866 VI. 1; 1868 VII. 1; 1870 VII. 257; 1871 VIII. 1) unter dem bescheidenen Titel „Mineralogische Notizen" oder Herr N. v. Kokscharow (Materialien zur Mineralogie Rußlands 1853—69) vorführen, werden durch ein Paar Linien nach ihrem Zonenverhältniß vollständig klar. Wer den Werth für die Darlegung der schwierigsten Verhältnisse würdigen lernen will, studire die Arbeiten des Herrn vom Rath über den Axinit (Pogg. Ann. 1866 Bd. 128 pag. 227) und besonders über Chondrodit (Pogg. Ann. 1871 Ergänzungsb. V pag. 321), worin der flächenreichste Krystall der Welt in seinen drei verschiedenen Typen auf einem einzigen Bilde mit bewundernswerther Genauigkeit gegeben ist. Man ergeht sich darauf, wie auf einer Landcharte, und sollte irgend ein wichtiger Zonenpunkt nicht sogleich abgelesen werden können, so reicht die einfachste Rechnung mit den Sections- und Zonenpunktformeln zur Ermittelung aus. Eine gewisse Ueberladung der Figuren läßt sich nicht läugnen, wie ein Blick auf die flächenreiche Darstellung des Bleivitriols bei Hr. V. v. Lang (Sitzber. Wien. Akad. 1859 Bd. 36 pag. 241) zeigt, wo die Punkte auf der Kugel durchsichtiger erscheinen, als das darauf folgende Linienbild; aber ich sehe die Flächen in ihrem Verlaufe, was für den Krystallographen eine entschiedene Erleichterung bleibt. Es leuchtet das uns nie besser ein, als wenn wir die Sache lehren sollen. Machen schon die Zonenpunkte dem Anfänger Mühe, so werden bei den Zonenlinien die Schwierigkeiten fast unüberwindlich; nur Mathematiker können noch folgen, und doch sollte die beschauliche Betrachtung gewachsener Wesen nicht der bloßen Rechenkunst anheimfallen.

Mathematiker und Physiker ziehen allerdings die Zonenlinien den Zonenpunkten vor, weil sich darauf der Calcul schematischer anwenden läßt. Prof. W. H. **Miller** zu Cambridge (geb. 1801) hat in einem kleinen Buche (A Treatise on Crystallography 1839. Uebersetzt von Grailich 1856) dazu die Bahn gebrochen, auf welcher besonders die neuern Wiener Mineralogen (V. v. Lang, Lehrbuch der Krystallographie 1866; Dr. A. Schrauf, Lehrbuch der Krystallographie; V. v. Zepharovich, Epidot, Vesuvian rc. Sitzb. Wien. Akad. 1859 Bd. 34. 480, 1864 Bd. 49) und in Deutschland die Physiker (Karsten, Lehrbuch der Krystallographie 1861; Reusch, Pogg. Ann. Bd. 142 pag. 46) wandeln. Mir macht das Verständniß Schwierigkeiten. Gleich der erste Satz lautet abgekürzt:

„Laß OX, OY, OZ sein die Durchschnitte von drei Ebenen durch „einen Punkt O innerhalb des Krystalls; und laß eine Fläche sie treffen „in A, B, C. Dann, wenn eine andere Fläche sie trifft in H, K, L, „wird man finden

$$\frac{1}{h}\frac{AO}{HO} = \frac{1}{k}\frac{BO}{KO} = \frac{1}{l}\frac{CO}{LO},$$



„wo h, k, l mag eine positive oder negative „Zahl sein." Uebersetzen wir das in die seit Weiß gewöhnliche Sprache der Krystallographen, so lautet es:

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{a}{\frac{1}{h}a} = \frac{1}{k} \cdot \frac{b}{\frac{1}{k}b} = \frac{1}{l} \cdot \frac{c}{\frac{1}{l}c} = 1 \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{a}{\frac{1}{\mu}a} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{b}{\frac{1}{\nu}b} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{c}{\frac{1}{\pi}c} = 1,$$

eine Binsenwahrheit, die keinen Anstand hat, während man sich bei Miller lange besinnen muß, um es zu fassen, zumal da er in (7) nochmals darauf weitläufig zurückkommt.

Haben wir dann eine Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi}$, fällen vom Nullpunkte ein Perpendikel OP (Träger pag. 58) darauf, und nennen den Winkel, welchen dieser Träger mit den Axen der XYZ macht, der Reihe nach PX, PY, PZ, so bekommen wir drei rechtwinkliche Dreiecke, worin XYZ die Hypotenusen bilden, der Träger die gemeinschaftliche Kathete, daher

$$\text{Kathete OP} = \frac{a}{\mu} \cos PX = \frac{b}{\nu} \cos PY = \frac{c}{\pi} \cos PZ \ldots (1)$$

Auch dieser Hauptsatz (8), der überall angewendet wird, ist in der Darstellung nicht so leicht durchschaut.

Zur Zonenlehre bedient sich Miller des weitläufigeren Weges der sphärischen Trigonometrie, und kommt zu dem interessanten Hauptsatze: Sind mir auf der Kugel drei Flächenorte (Trägerpunkte)

$$P_1\ (\mu_1\nu_1\pi_1),\ P_2\ (\mu_2\nu_2\pi_2),\ P_3\ (\mu_3\nu_3\pi_3)$$

gegeben, und XYZ die Schnittpunkte der schiefen Axenrichtungen abc, so finden sich durch weitläufige Rechnung folgende (2, 3, 4) Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos P_1X \sin P_2P_3 + \sin P_3X \sin P_1P_2 = \cos P_2X \sin P_1P_3 \\
&\cos P_1Y \sin P_2P_3 + \sin P_3Y \sin P_1P_2 = \cos P_2Y \sin P_1P_3 \\
&\cos P_1Z \sin P_2P_3 + \sin P_3Z \sin P_1P_2 = \cos P_2Z \sin P_1P_3
\end{aligned}\right\} (2)$$

$$\begin{aligned}
&(\cos P_1Y \cos P_3Z - \cos P_1Z \cos P_3Y) \cos P_2X \\
+\ &(\cos P_1Z \cos P_3X - \cos P_1X \cos P_3Z) \cos P_2Y \\
+\ &(\cos P_1X \cos P_3Y - \cos P_1Y \cos P_3X) \cos P_2Z = 0 \ldots (3)
\end{aligned}$$

Da nun Formel (1) für jede Fläche stattfinden muß, so haben wir

$$P_1 \ldots \frac{a}{\mu_1} \cos P_1X = \frac{b}{\nu_1} \cos P_1Y = \frac{c}{\pi_1} \cos P_1Z$$

$$P_2 \ldots \frac{a}{\mu_2} \cos P_2X = \frac{b}{\nu_2} \cos P_2Y = \frac{c}{\pi_2} \cos P_2Z.$$

Aus jeder dieser Doppelgleichungen kann ich zwei Unbekannte bestimmen, folglich Y und Z in X ausdrücken, nemlich:

$$\cos P_1Y = \frac{\nu_1}{\mu_1} \frac{a}{b} \cos P_1X; \; \cos P_2Y = \frac{\nu_2}{\mu_2} \frac{a}{b} \cos P_2X;$$

$$\cos P_1Z = \frac{\pi_1}{\mu_1} \frac{a}{c} \cos P_1X; \; \cos P_2Z' = \frac{\pi_2}{\mu_2} \frac{a}{c} \cos P_2X \ldots (4)$$

Dieß in die Bedingungsgleichung (3) gesetzt, kommt:

$$\left(\frac{\nu_1}{\mu_1} \frac{a}{b} \cos P_1X \cos P_3Z - \frac{\pi_1}{\mu_1} \frac{a}{c} \cos P_1X \cos P_3Y\right) \cos P_2X$$
$$+ \left(\frac{\pi_1}{\mu_1} \frac{a}{c} \cos P_1X \cos P_3X - \cos P_1X \cos P_3Z\right) \cos P_2X \frac{\nu_2}{\mu_2} \frac{a}{b}$$
$$+ \left(\cos P_1X \cos P_3Y - \frac{\nu_1}{\mu_1} \frac{a}{b} \cos P_1X \cos P_3X\right) \cos P_2X \frac{\pi_2}{\mu_2} \frac{a}{c} = o.$$

Hier dividiren sich zunächst P_1X, P_2X und vier a weg, folglich:

$$\left(\frac{\nu_1}{\mu_1 b} \cos P_3Z - \frac{\pi_1}{\mu_1 c} \cos P_3Y\right)$$
$$+ \left(\frac{\pi_1 \nu_2 a}{\mu_1 \mu_2 bc} \cos P_3X - \frac{\nu_2}{\mu_2 b} \cos P_3Z\right)$$
$$+ \left(\frac{\pi^2}{\mu_2 c} \cos P_3Y - \frac{\nu_1 \pi_2 a}{\mu_1 \mu_2 bc} \cos P_3X\right) = o.$$

Dies nach XYZ geordnet, und die Multiplicationen ausgeführt, gibt

$$(\nu_2\pi_1 - \nu_1\pi_2) \, a \cos P_3X$$
$$+ (\mu_1\pi_2 - \mu_2\pi_1) \, b \cos P_3Y$$
$$+ (\mu_2\nu_1 - \mu_1\nu_2) \, c \cos P_3Z = o,$$

oder allgemein

$$Aa \cos P_3X + Bb \cos P_3Y + Cc \cos P_3Z = o \qquad \ldots (5)$$

Nehme ich die dritte Fläche hinzu, so ist nach Gleichung (1)

$$P_3 \ldots \frac{a}{\mu_3} \cos P_3X = \frac{b}{\nu_3} \cos P_3Y = \frac{c}{\pi_3} \cos P_3Z,$$

oder nach obigem (4)

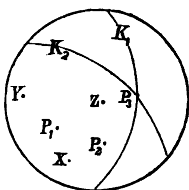
$$\cos P_3Y = \frac{\nu_3}{\mu_3} \frac{a}{b} \cos P_3X \text{ und } \cos P_3Z = \frac{\pi_3}{\mu_3} \frac{a}{c} P_3X,$$

dieß in die Bedingungsgleichung (5) gesetzt, gibt

$$Aa \cos P_3X + Bb \frac{\nu_3}{\mu_3} \cdot \frac{a}{b} \cos P_3X + Cc \frac{\pi_3}{\mu_3} \frac{a}{c} P_3X = o, \text{ d. h.}$$

$$A\mu_3 + B\nu_3 + C\pi_3 = o.$$

Diese Gleichung muß stattfinden, wenn die drei Flächen P_1 P_2 P_3 in einer Zone liegen sollen. Haben wir die Gleichungen von zwei



Punkten P_1 und P_2 hingeschrieben, und suchen die Durchschnittslinie der zu den Punkten gehörigen Krystallflächen, so meinen wir die zugehörigen Zonenkreise K_1 und K_2 mit ihrem Durchschnittspunkte P_3, der dann obige Coordinaten

$$Aa = (\nu_2\pi_1 - \nu_1\pi_2)\, a\,,\ Bb = (\mu_1\pi_2 - \mu_2\pi_1)\, b,$$
$$Cc = (\mu_2\nu_1 - \mu_1\nu_2)\, c$$

hat. Sind mir nun zwei solcher Zonenkreise $K_1(\mu_1\nu_1\pi_1)$ und $K_2(\mu_2\nu_2\pi_2)$ gegeben, so müssen für den Durchschnittspunkt P_3, der jetzt als der Ort einer Fläche angesehen wird, diese zwei Bedingungsgleichungen gelten:

$$\mu_1 a \cos P_3X + \nu_1 b \cos P_3Y + \pi_1 c \cos P_3Z = 0$$
$$\mu_2 a \cos P_3X + \nu_2 b \cos P_3Y + \pi_2 c \cos P_3Z = 0;$$

bei der Elimination kann man die Axen abc als selbstverständlich vernachlässigen, braucht auch das Zeichen cos nicht hinzuschreiben, dann ist

$$\mu_1 P_3X + \nu_1 P_3Y = -\pi_1 P_3Z$$
$$\mu_2 P_3X + \nu_2 P_3Y = -\pi_2 P_3Z,\ \text{d. h.}$$
$$\frac{\mu_1 P_3X + \nu_1 P_3Y}{\mu_2 P_3X + \nu_2 P_3Y} = \frac{\pi_1}{\pi_2},\ \text{oder}$$

$$\mu_1 P_3X + \nu_1 P_3Y = \frac{\pi_1}{\pi_2}(\mu_2 P_3X + \nu_2 P_3Y) = \frac{\mu_2\pi_1}{\pi_2} P_3X + \frac{\nu_2\pi_1}{\pi_2} P_3Y$$

$$\left(\mu_1 - \frac{\mu_2\pi_1}{\pi_2}\right) P_3X = \left(\frac{\nu_2\pi_1}{\pi_2} - \nu_1\right) P_3Y\ \text{oder}$$

$$\frac{a \cos P_3X}{b \cos P_3Y} = \frac{\nu_2\pi_1 - \nu_1\pi_2}{\mu_1\pi_2 - \mu_2\pi_1}.$$

Ganz eben so findet man

$$\frac{a \cos P_3X}{c \cos P_3Z} = \frac{\nu_2\pi_1 - \nu_1\pi_2}{\mu_2\nu_1 - \mu_1\nu_2},\ \text{d. h.}$$

$$\frac{a \cos P_3X}{\nu_2\pi_1 - \nu_1\pi_2} = \frac{b \cos P_3Y}{\mu_1\pi_2 - \mu_2\pi_1} = \frac{c \cos P_3Z}{\mu_2\nu_1 - \mu_1\nu},$$

also eine Fläche

$$P_3 \ldots \frac{a}{A} \cos P_3x = \frac{b}{B} \cos P_3y = \frac{c}{C} \cos P_3Z,$$

worin jetzt die gleichen Werthe von ABC, aber als Divisoren (invertirt) auftreten. Auf diese Weise sind wir im Stande, die cos durch Indices auszudrücken. Es findet aber noch eine dritte Reihe von Gleichungen statt, die durch Elimination von $\sin P_1 P_2$, $\sin P_1 P_3$, $\sin P_2 P_3$ aus den Formeln (2) sich ergeben:

$$\frac{1}{\sin P_1 P_2}(\cos P_1Y \cos P_2X - \cos P_1X \cos P_2Y)$$
$$= \frac{1}{\sin P_2 P_3}(\cos P_2Y \cos P_3X - \cos P_2X \cos P_3Y);$$

$$\frac{1}{\sin P_1 P_2}(\cos P_1X \cos P_2Z - \cos P_1Z \cos P_2X)$$

$$= \frac{1}{\sin P_2 P_3}(\cos P_2X \cos P_3Z - \cos P_2Z \cos P_3X);$$

$$\frac{1}{\sin P_1 P_2}(\cos P_1Z \cos P_2Y - \cos P_1Y \cos P_2Z)$$

$$= \frac{1}{\sin P_2 P_3}(\cos P_2Z \cos P_3Y - \cos P_2Y \cos P_3Z).$$

$$\frac{\cos P_1Y \cos P_2X - \cos P_1X \cos P_2Y}{\cos P_2Y \cos P_3X - \cos P_2X \cos P_3Y} = \frac{\sin P_1 P_2}{\sin P_2 P_3} \text{ etc.}$$

$$\frac{\sin P_1P_2}{\sin P_2P_3} = \frac{\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1}{\mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2} = \frac{\mu_2\pi_1 - \mu_1\pi_2}{\mu_3\pi_2 - \mu_2\pi_3} = \frac{\nu_1\pi_2 - \nu_2\pi_1}{\nu_2\pi_3 - \nu_3\pi_2} = \frac{(P_1P_2)}{(P_2P_3)}.$$

Denn es folgt aus den Gleichungen der drei Flächen sofort:

$$\frac{\mu_1}{a}\cos P_1X . \frac{\nu_2}{b}\cos P_2Y = \frac{\mu_2}{a}\cos P_2X \frac{\nu_1}{b}\cos P_1Y$$

$$\frac{\mu_1\nu_2}{\mu_2\nu_1} = \frac{\cos P_1Y . \cos P_2X}{\cos P_1X . \cos P_2Y}$$

$$\frac{\mu_2}{a}\cos P_2X . \frac{\nu_3}{b}\cos P_3Y = \frac{\mu_3}{a}\cos P_3X \frac{\nu_2}{b}\cos P_2Y$$

$$\frac{\mu_2\nu_3}{\mu_3\nu_2} = \frac{\cos P_2Y \cos P_3X}{\cos P_2X \cos P_3Y} \text{ etc.}$$

Zu **vier Punkten** P_1 P_2 P_3 P_4 und damit zu einer vierten Fläche

$$P_4 \ldots \frac{a}{\mu_4}\cos P_4X = \frac{b}{\nu_4}\cos P_4Y = \frac{c}{\pi_4}\cos P_4Z$$



fortschreitend, gilt für $P_1P_4P_3$ ganz dasselbe, was für $P_1P_2P_3$ galt. Wir dürfen daher in den Formeln nur P_2 mit P_4 und $\mu_4\nu_4\pi_4$ mit $\mu_2\nu_2\pi_2$ vertauschen, und erhalten sofort

$$\frac{\sin P_1P_4}{\sin P_3P_4} = \frac{\mu_1\nu_4 - \mu_4\nu_1}{\mu_4\nu_3 - \mu_3\nu_4} = \frac{\mu_4\pi_1 - \mu_1\pi_4}{\mu_3\pi_4 - \mu_4\pi_3} = \frac{\nu_1\pi_4 - \nu_4\pi_1}{\nu_4\pi_3 - \nu_3\pi_4} = \frac{(P_1P_4)}{(P_3P_4)};$$

$$\frac{\sin P_2P_3}{\sin P_1P_2} = \frac{\sin (P_1P_3 - P_1P_2)}{\sin (P_1P_2)} = \sin P_1P_3 (\text{ctg } P_1P_2 - \text{ctg } P_1P_3);$$

$$\frac{\sin P_3P_4}{\sin P_1P_4} = \frac{\sin P_1P_3 - P_1P_4}{\sin P_1P_4} = \sin P_1P_3 (\text{ctg } P_1P_4 - \text{ctg } P_1P_3);$$

wird hierin durch Division $\sin P_1P_3$ eliminirt, so kommt

$$\frac{\sin P_2P_3 \sin P_1P_4}{\sin P_1P_2 \sin P_3P_4} = \frac{\text{ctg } P_1P_2 - \text{ctg } P_1P_3}{\text{ctg } P_1P_4 - \text{ctg } P_1P_3} \text{ oder}$$

$$\frac{(P_1P_4)}{(P_3P_4)}(\text{ctg } P_1P_4 - \text{ctg } P_1P_3) = \frac{(P_1P_2)}{(P_2P_3)}(\text{ctg } P_1P_2 - \text{ctg } P_1P_3), \text{ d. h.}$$

sind mir die Winkel P_1P_2 und P_1P_3 nebst den Indices von $P, P_2P_3P_4$ bekannt, so kann ich cotg P_1 P_4 finden. Oder kenne ich die drei Winkel P_1 P_2, P_1 P_3, P_1 P_4 und die Indices mnp des Zonenkreises, so lassen sich mittelst der Bedingungsgleichungen $\mu m + \nu n + \pi p = o$ rc. die Indices finden.

Setzt man $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{(P_1P_2)\,(P_3P_4)}{(P_2P_3)\,(P_1P_4)} \cdot \frac{\sin P_2P_3}{\sin P_1P_2}$, so ist

$$\operatorname{tg}(P_1P_4 - \tfrac{1}{2}P_1P_3) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}P_1P_3\ \operatorname{tg}(45^0 - \vartheta).$$

In dieser Weise wird dann weiter verfahren. Erfreulich daran ist, daß Miller, ohne Weiß zu nennen, doch ganz im Geiste von Weiß verfährt, nur daß er im Hinblick auf schiefe Axen auf einem allgemeinern Standpunkte steht. Etwas zu viel Gewicht wird nicht selten auf das Kugelbild gelegt, wie das namentlich aus der Elementary Introduction pag. 46 hervorleuchtet, wo einem neben der Krystallfigur der große Kreis mit seinen Punkten wie ein Himmel voller Sterne vorkommt, der ohne die nöthigen Zonenkreise keinen Werth hat. Damit will ich aber die Vorzüge keineswegs in den Schatten stellen, sondern wir haben jetzt zwei ebenbürtige Wege, die beide aus der Weiß'schen Schule hervorgingen: einen directen und indirecten. Der **directe**, welcher die Fläche als Linie und die Zone als Punkt darstellt, ist nicht blos der anschaulichere, sondern oftmals sogar der kürzere; der **indirecte**, welcher umgekehrt die Fläche als Punkt und die Zone als Linie gibt, wird von Analitikern, denen es mehr um Darlegung allgemeiner Gesetze als einzelner Gestalten zu thun ist, bevorzugt. Da nun für schiefe Axen Coordinaten in mancher Beziehung unbequemer als sphärische Trigonometrie sind, so wenden sich ihr die Rechner immer mehr zu. Die Krystallographie wird dadurch nicht blos für Anfänger, sondern auch für Geübte wesentlich schwieriger.

Ich meine dagegen, daß der eigentliche Weg zum Endziele erst in der Verbindung beider Methoden liege. Der erste Unterricht muß von der unmittelbaren Anschauung der Körper ausgehen, darf nicht mit Punkten, sondern mit Flächen beginnen. Ist auf diese Weise die Anschauung geschärft und erstarkt, so kann man dann weiter zu den Punkten fortschreiten. Aber auch bei diesen sollte über der Rechnung die Entwickelung nie aus den Augen gelassen werden. Da die Ebene wie die Kugel bei den Darstellungen zur Verdeutlichung dient, so muß auch hier wieder die Ebene der Kugel vorausgehen, wie das in nachfolgender Darstellung gezeigt werden soll.

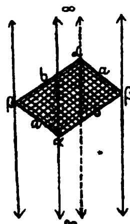
Entwickelung der Systeme.

Krystallographie und **Stereometrie** haben zwar beide die Ausmessung der Körper zum Gegenstande, aber die Krystallographie beschränkt sich auf parallelflächige Formen, hat es daher mit **Parallelräumen** (Krystallräumen) zu thun, welche bei Mineralen den **Blätterbrüchen** entsprechen.

Der **Parallelraum**, d. h. der Raum zwischen zwei einander parallelen Ebenen, ist noch nach zwei Dimensionen bc unendlich, nach der dritten a zwar endlich, aber in der Natur ist diese Endliche äußerst variabel, was die gesetzlose Verziehung der Krystalle bedingt. Wir müssen daher eine der Variabeln durch einen festen Punkt fixiren, und diese fixirte nannte ich **Reductionsebene**, welcher die andere in beliebiger Entfernung parallel geht.

Zwei Parallelräume bilden stets eine **vierseitige Säule** (Prisma), die nach zwei Dimensionen ab endlich variabel, nach der dritten c noch unendlich d. h. ungeschlossen ist.

Wir fixiren sie durch zwei Reductionsebenen $c\mu\nu$ und $c\mu,\nu,$, die wir beide durch Punkt c außerhalb der Zeichnungsebene zz (Projectionsebene) legen. Sie schneiden sich dann in der Linie cp (**Zonenaxe**), welche von dem außerhalb der Projectionsebene angenommenen fixen Punkte c nach dem **Zonenpunkte** p strahlt. Wir lassen in Zukunft die lästige stereographische Zeichnung weg, und stellen die Säule durch ein einfaches Kreuz $\mu\nu$ und $\mu,\nu,$ dar. Dasselbe zeigt uns also zwei Ebenen ab und zwei Winkel $\alpha\beta$, zwischen welchen die Gleichung $a + \beta = 180^0$ besteht.

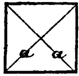


Lassen wir nun die Reductionsebenen ab sich zu **Parallelräumen entfalten**, so haben wir zwei Vorder- und zwei Hinterflächen, die einander parallel gehen, und zwei α und zwei β, die einander gegenüberliegen. Kurz es bestehen die Säulenglieder in 2 Flächen ab und 2 Kanten $\alpha\beta$.

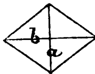
Wenden wir darauf einfach das Princip **Gleich** oder **Ungleich** an, so sind

systematisch 2 . 2 = 4 Säulen möglich:

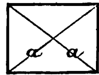
1. **Quadratische Säule** (Quadratsäule), Flächen gleich a = b und Kanten gleich $\alpha = \beta = 90^0$. Nach den zwei endlichen Dimensionen kann ich die Säule ins Gleichgewicht bringen, dann ist der Querschnitt ein Quadrat mit den rechtwinklichen Diagonalen a = a. In der Natur ist das freilich nie der Fall, da finden wir stets verzogene Gestalten, aber mit Gleichbleibung der Winkel. Säule von größter Symmetrie, denn sie zeigt **doppelte Zweiseitigkeit**, nach Flächen und Kanten (doppelpaarig, vierköpfig).



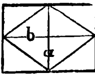
2. **Rhombische Säule** (Rhombsäule), Flächen gleich a = b und Kanten ungleich $\alpha \lessgtr \beta$, kleiner und größer als 90^0. Bringt man sie nach den Flächen ins Gleichgewicht, so ist der Querschnitt ein Rhombus mit rechtwinklichen und ungleichen Diagonalen ab. **Einfache Zweiseitigkeit**, denn diese findet nur noch nach den Flächen statt, nach den Kanten nicht mehr, da tritt schon Einseitigkeit auf (paarig-unpaarig, zweiköpfig).



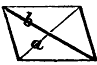
3. **Oblonge Säule** (Oblongsäule), Flächen ungleich, Kanten gleich $\alpha = \beta = 90^0$. Sie ist wie die Quadratsäule wieder rechtwinklich, und ihr Querschnitt ein Oblongum mit gleichen aber schiefwinklichen Diagonalen a = a. Umgekehrt wie bei der Rhombsäule findet die **einfache Zweiseitigkeit** nach den Winkeln, aber Einseitigkeit nach den Flächen statt. Ich kann sie daher nicht mehr ins Gleichgewicht bringen. Wohl aber lassen sich



Rhomb- und Oblongsäule von einander ableiten, wenn man sie symmetrisch gemäß ihrer Ein- und Zweiseitigkeit ordnet. Wie Figur zeigt, stumpfen beide, falls sie in einander eindringen, gegenseitig sich ihre Kanten ab. Das ist der Grund, warum sie immer demselben Systeme zugehören.

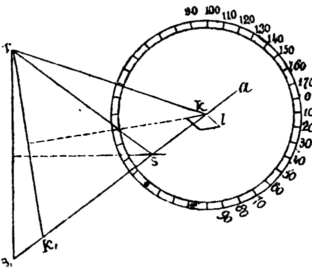


4. **Rhomboidische Säule** (Rhomboidsäule), Flächen und Kanten ungleich. Hier ist von Zweiseitigkeit (Symmetrie) keine Rede mehr. **Einseitigkeit** greift bei **Flächen** und **Kanten** Platz. Daher wird ein Insgleichgewichtbringen in keinem Sinne mehr möglich, der Querschnitt liefert stets ein Rhomboid mit ungleichen und schiefwinklichen Diagonalen ab (unpaarig, schiefköpfig).



Die **Gleichheit der Winkel** wird durch **Messen**, die der Flächen durch physikalische Eigenschaften ermittelt. Doch stehen beide in engstem Verbande, man kann aus der Form auf die Werthigkeit die bestimmtesten Schlüsse machen. Daher bleibt die Mühe des Naturforschers nicht ohne Lohn.

Das **Winkelmessen** geschieht in einer Ebene senkrecht auf die Säule, d. h. in der Geradendfläche, denn nur dieser ebene Winkel ist dem Kantenwinkel gleich, jede andere Fläche hat kleinere Winkel. Das Princip beruht auf dem Reflex äußerer Gegenstände, da gute Krystallflächen wie Spiegel wirken. Man setzt die Säule mit innen getheiltem Verticalkreise



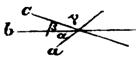
in Verbindung, der sich um eine Horizontalaxe k senkrecht gegen den getheilten Kreis dreht. Die Hauptfertigkeit besteht dann darin, die Säulenkante genau in diese Axe zu bringen. Fixirt man nun von a aus auf der Fläche k im Hintergrunde des Zimmers einen horizontalen Fensterrahmen r, so wird derselbe nach k, geworfen. Jetzt darf ich nur einen drehbaren Spiegel s parallel der Axe so einstellen, daß zugleich der Rahmen r nach s, geworfen sich mit dem Bilde k, deckt. Dann ist damit, sofern das Auge a ruhig bleibt, eine feste Lage gewonnen. Bringe ich nun Fläche l durch Drehung des Kreises in die gleiche Lage, so ist die Säule um 180° — ω gedreht, wenn der Säulenwinkel ω beträgt. War es also ein Kalkspath mit 105° 5′ in der stumpfen Endkante, so lesen wir 180° — 105° 5′ = 74° 55′ ab. Kleine Fehler entstehen durch „Excentricität“, wenn die Kante außerhalb der Kreisaxe fällt, was im Allgemeinen immer der Fall ist. Allein je weiter entfernt man den Fensterrahmen wählt, desto geringer wird der Irrthum. So lange die Säule noch nicht gut eingestellt ist, beschreibt nemlich ihre Kante bei der Drehung um die Axe des Instruments einen Kegelmantel. Allein da im Spiegel der horizontale Rahmen der Kreisaxe parallel geht, so fallen die Bilder erst zusammen, wenn die Parallelität der Krystallfläche mit der Kreisaxe erlangt ist, dann kann die Krystallkante nur noch einen Cylindermantel beschreiben, der zwar kleine Fehler erzeugt, die aber um so geringer werden, je enger der Cylinder ist und je ferner die Fensterrahmen liegen. Der Gebrauch wird in der Physik gelehrt. Siehe Hdb. Mineral. 1863 pag. 13. Genaue Messungen bis auf halbe Minuten haben immerhin ihre Schwierigkeiten, hängen namentlich auch von der Richtigkeit des Instrumentes und dessen Aufstellung ab (Kupffer, Preisschrift über genaue Messung der Winkel an Krystallen. Berlin 1825).

Drei Blätterbrüche (Parallelräume) erzeugen entweder

Sechsseitige Säulen oder Hexaide.

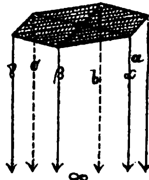
Bei den Säulen liegen die Blätterbrüche in **einer** Zone, bei den **Hexaiden** in **dreien**; Zwei-Zonenkörper sind nicht möglich, was man sich mit drei Brettchen leicht klar macht.

Die **sechsseitige Säule** entsteht durch das Abstumpfen einer Kante der vierseitigen, sie ist also durch ein dreistrahliges Kreuz mit dreierlei Winkeln projicirt. Die Winkel $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ werden durch zwei Messungen bestimmt. Da alle Flächen durch einen außerhalb liegenden gemeinsamen Punkt gehen müssen, so leuchtet das Bild von selber ein. Trifft dagegen die Zonenaxe die Pro-



jectionsebene nicht, so laufen die drei Sectionslinien einander parallel, es können sogar blos zwei Ebenen zum Schnitt kommen, wenn eine der drei dem Projectionsblatte parallel wird.

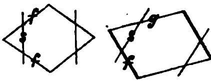
Lassen wir die drei Reductionsebenen abc sich zu Parallelräumen entfalten, so erhalten wir drei Vorder- und drei Hinterflächen, die einander parallel gehen, und worin je zwei Kanten α, β, γ sich gegenüber liegen. Es bestehen daher die Säulenglieder in drei Flächen und drei Kanten. So kann man sich Säulen von 4-, 5-, 6- bis nfacher Zahl denken.



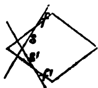
Systematisch sind nur dreierlei sechsseitige Säulen möglich. Dies einzusehen beziehe ich mich auf folgende drei

Symmetriegesetze.

1stes Gesetz. Tritt zu einer Säule eine dritte Fläche s, so muß diese die **gleichen Glieder** ff in **gleicher** (gerade abstumpfen), und die **ungleichen** fg in **ungleicher Weise** treffen (schief abstumpfen). Man kann den Satz auch umkehren; nur der rechte Winkel erleidet Ausnahmen, denn in ihm sind alle Unterschiede aufgehoben. Habe ich daher eine gleichflächige Säule (Quadrat- oder Rhombsäule), so muß durch die Abstumpfung jede der beiden Seiten unter gleichen Winkeln geschnitten werden, dagegen ist das bei den ungleichflächigen (Oblong- oder Rhomboidsäule) nicht möglich. Oft ist freilich die Verschiedenheit unbedeutend, aber das Reflexionsgoniometer wies sie nach. Hauy hatte keine Ahnung davon, denn er nahm beim Kalkspath an, daß der blättrige Bruch die Horizontalkante zwischen sechsseitiger Säule und Geradendfläche gerade abstumpfe, d. h. gegen beide Flächen 135° geneigt sei, während er in Wirklichkeit 135° 24′ mit der Geradendfläche, folglich nur 134° 36′ mit der Säule macht. Dasselbe widerfuhr noch Weiß mit dem Feldspath, wo die beiden ungleichen auf einander rechtwinklichen Blätterbrüche P/M durch Fläche n unter 135° hätten abgestumpft werden müssen, wenn n/n nach der frühern Annahme eine wirkliche quadratische Säule wäre. Allein nach schärfern Messungen von G. Rose am glasigen Feldspathe vom Vesuv ist es eine rhombische Säule von 90° 32′ über dem ersten Blätterbruche P, da P/n 135° 16′, M/n 134° 44′ machen. Nach Hr. v. Kokscharow geht es an sibirischen Adularen auf 90° 7′ 18″ herab. Also ganz wie es die Symmetrie verlangt.



2tes Gesetz. Trifft daher eine Fläche s gleiche Glieder in verschiedener Weise, so fordert sie nothwendig eine Gegenfläche s′, welche diese Ungleichheit wieder aufhebt. Wäre



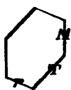
z. B. f/f' die scharfe Kante einer rhombischen Säule, die von s unter ungleichen Winkeln (s/f, s/f') geschnitten ist, so muß nothwendig eine Gegenfläche s' kommen, welche sie unter entgegengesetzter Ungleichheit trifft, es muß Winkel s/f = s'/f' und s'f = s/f' sein. Dadurch ist die Symmetrie wieder hergestellt.

3tes Gesetz. Wird ein Glied beschnitten, so muß jedes ihm gleiche Glied in gleicher Weise beschnitten werden. Ist also bei der Quadrat- und Oblongsäule eine der Kanten abgestumpft, so müssen es nothwendig auch die andern sein. Bei der rhombischen und rhomboidischen findet sich dagegen häufig nur eine, die stumpfe oder scharfe Kante, abgestumpft, oder sind beide abgestumpft, so können die Abstumpfungsflächen nicht gleichwerthig sein.

Nur die **Hemiedrie** (Halbflächigkeit) macht eine Ausnahme, aber gerade dadurch verräth sie sich auch.

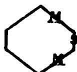
Hieraus geht hervor, daß aus den rechtwinklichen Säulen (Quadrat- und Oblongsäule) wegen der paarigen Kanten sich gar keine sechsseitige entwickeln kann; nur die ungleichkantigen sind dazu brauchbar. Es bleiben daher blos folgende drei Fälle möglich:

1) **Unsymmetrisches Sechsseit.** Entsteht aus der Rhomboidsäule M/T mit schiefer Abstumpfung r: **schief**, weil Winkel r/M vom Winkel r/T verschieden sein muß, da T und M ungleich sind. Epidot liefert ein gutes Beispiel:

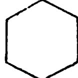


$$M/T = 115^0\ 24'; \; r/T = 128^0\ 18'; \text{ folglich}$$
$$M/r = 116^0\ 18' = 360^0 - (115 . 24 + 128 . 18).$$

2) **Symmetrisches Sechsseit.** Entsteht aus der Rhombsäule M/M mit gerader Abstumpfung s; **gerade**, weil die beiden Winkel M/s einander gleich sein müssen. Ich brauche daher nur einen Winkel zu messen. Es gibt viel gute Beispiele: Schwerspath M/M = 101° 42', folglich $M/s = 180^0 - \frac{1}{2} . 101 . 42 = 129^0\ 9'$.

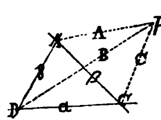


3) **Reguläres Sechsseit.** Mißt die Rhombsäule 120°, so tritt der besondere Fall ein, daß durch die Abstumpfungsfläche der scharfen Kante alle Winkel gleich werden müssen, denn $M/s = 180^0 - \frac{1}{2} . 120^0 = 120^0$. Hier sind nun wieder Flächen und Kanten gleich; im drei- und sechsgliedrigen Systeme sehr gewöhnlich. Ich brauche daran keinen Winkel zu messen, da im Sechsecke die Winkel 2 . 6 — 4 = 8 R betragen, jeder $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ R = 120°.

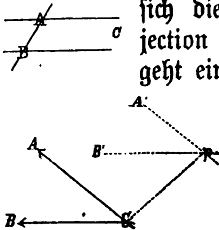


Mit den ungeschlossenen Säulen, mögen sie auch noch so vielseitig sein, kommen wir zu keinem System. Das gelingt erst mit dem

Hexaide (Dreizonenkörper), welches nach allen drei Dimensionen zwar geschlossen, aber variabel ist. Die drei Flächen schneiden sich hier in einem Punkte, bilden eine sogenannte körperliche Ecke, sind daher durch ein Dreieck ABC dargestellt. Die drei Zonenaxen strahlen vom gemeinsamen Punkte p nach den Zonenpunkten ABC. Es liefert den

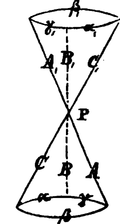


bekannten Körper, an welchem die sphärische Trigonometrie gelehrt wird, wobei wir es mit drei Seiten $\alpha\beta\gamma$ und drei Winkeln ABC, unter welchen



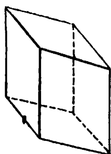
sich die Seiten schneiden, zu thun haben. In der Projection können auch zwei Linien parallel werden, dann geht eine Kante C der Projectionsebene parallel. Ja thut das sogar eine Fläche, dann besteht das ganze Bild nur noch aus einem einfachen Kreuz ABC, da die beiden andern Kanten von p aus nach A' und C' ins Unendliche strahlen, wobei sie den Grundschnitten CA und CB respective parallel bleiben.

Scheitelbreiecke A,B,C,P entstehen, wenn man die drei Flächen



über den gemeinsamen Punkt P hinaus verlängert. Beide Ecken haben zwar dieselben Winkel $\alpha\beta\gamma$ABC, aber sind dennoch nicht congruent, sondern links und rechts gedreht, wie Bild und Spiegelbild. Das beweisen schon die Buchstaben, welche oben wie unten in derselben Reihenfolge stehen, und B, unterhalb des Blattes hinabgeht, d. h. dem B entgegengesetzt zur Blattebene liegt. Denn da beide ihre Spitzen gegen einander kehren, so müssen sie umgekehrt congruent sein. Nun tritt zwar bei Gleichheit von zwei oder drei Winkeln scheinbare Congruenz ein, allein die ist rein mathematisch. Körperlich verräth der Zwilling noch die Verschiedenheit. Denn **Zwilling** ist nichts weiter, als daß die Scheitelbreiecke statt des Punktes P die Basis gemein haben, welche uns, wie wir später sehen werden, das Tetraid gibt. Darin liegt offenbar ein tieferes Gesetz der Materie verborgen.

Das **Hexaid** entsteht, wenn die drei Reductionsebenen $\alpha\beta\gamma$ in Parallelräume auseinander treten. Andere Winkel als die



sechs genannten (ABC$\alpha\beta\gamma$), können dabei nicht entstehen. Darauf beruht ja die Constanz der Winkel, welche schon Steno pag. 3 erkannte. Wir bekommen dann

dreierlei Flächen, viererlei Ecken,
sechserlei Kanten.

Es bilden also, wie bei allen Krystallen, 3, 4, 6 die Grundzahlen, welche sich dann bis auf 12 und 24 entwickeln.

Parallelepiped und Hexaid sind identisch. Ziehen wir darin die 12 Seiten- und 4 Eckdiagonalen, so haben wir mathematisch:

a) 2 . 3 = 6 Grenzflächen, d. h. dreierlei Parallelogramme;
b) 3 . 4 = 12 Kantenlängen, welche je vier gleich lang sind; aber 2 . 6 = 12 Kantenwinkel (Flächenwinkel), da im Parallelogramme die sich gegenüber liegenden gleich bleiben, und nur die den Seiten anliegenden ungleich werden.

c) 2 . 4 = 8 dreikantige Ecken, wovon je zwei sich gegenüber liegende gleich sind, aber sich wie links und rechts zu einander verhalten.

d) 6 . 4 = 24 ebene Winkel, zu je vier gleich, alle zusammen 24 R.

e) 2 . 6 = 12 Seitendiagonalen, paarweis parallel und gleich.

f) 6 Diagonalschnitte, d. h. Parallelogramme, welche durch je zwei gegenüberliegende Diagonalen, Kanten und Ecken gehen. Sie halbiren sich, gehen daher alle durch einen Punkt. Aus gleichem Grunde gehen auch die

g) 4 Eckdiagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, durch denselben Punkt, und müssen sich ebenfalls gegenseitig halbiren.

h) 2 Diagonalschnitte gehören jeder Fläche an, sind einander zugeordnet. Die zugeordneten Diagonalschnitte erzeugen daher drei Axen, welche die Mitte der Flächen verbinden.

In jedem Parallelepiped ist die Summe der Quadrate der vier Eckdiagonalen der Summe der Quadrate aller Kanten gleich (Hohl, die Lehre von den Polyedern pag. 28). Da zu einem Prisma wesentlich eine Basis gehört, so bilden die Parallelepipede im Allgemeinen ein doppeltschiefes vierseitiges Prisma besonderer Art. Die Mathematiker unterscheiden ein rechtwinkliches Parallelepiped, ein Rhomboeder und einen Würfel.

Daß die in einer Eckdiagonale gegenüberliegenden Ecken selbst bei den regulärsten Parallelepipeden sich wie links und rechts verhalten, macht man sich am Würfel klar, indem man die drei Flächen schwarz roth gelb (srg) bemalt, sie absägt und nebeneinander auf die Basis stellt: dann folgen die Farben srg bei den einen links, bei den andern rechts herum.

Systematisch sind **achterlei Hexaide** möglich, wie man sich an der vierseitigen Säule leicht klar macht. Denn Hexaide sind nichts weiter, als vierseitige Säulen mit Endfläche, wornach sie ihren Beinamen bekommen. Daher spricht man von

geraden, schiefen, doppelschiefen Säulen.

Gerade sind sie, wenn die Endflächen **senkrecht** gegen Flächen und Kanten stehen, und das ist wegen des rechten Winkels pag. 78 bei allen möglich. Wir bekommen die

Gerade Quadrat-, -Rhomb-, -Oblong-, -Rhomboidsäule.

Schief sind sie, wenn die Endfläche zwar noch senkrecht gegen eine Kante oder Fläche bleibt, gegen die andere aber sich neigt. Wir bekommen

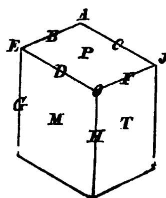
Schiefe Rhomb- und schiefe Oblongsäule.

Doppelschief sind sie, wenn die Endfläche schief gegen Flächen und Kanten steht. Wir bekommen eine

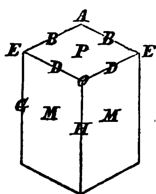
Schiefe Rhomboidsäule.

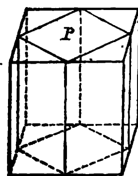
Eine doppelschiefe Endfläche ist bei der Oblongsäule deshalb **unmöglich**, weil sie nach den Kanten zweiseitig ist, also **zwei** haben müßte. Eben so kann man wegen der Zweiseitigkeit nach Flächen und **Kanten** an die quadratische Säule wohl **zwei** Schiefendflächen legen, aber nicht **eine.** Dasselbe gilt von den Flächen der Rhombsäule. Eine Doppelschiefendfläche ist daher nur bei der Rhomboidsäule möglich. Dagegen können bei der (geraden) Quadrat- und schiefen Rhombsäule die Endflächen den Seitenflächen gleich werden, wodurch Würfel und Rhomboeder entstehen. Das wären zwar neun Fälle, aber davon fallen zwei zusammen: gerade Rhomboidsäule und schiefe Oblongsäule, denn ich darf jene nur wenden, so gibt es diese. Da ferner die Rhomb- und Oblongsäulen sich auseinander ableiten, so gelangen wir zu folgenden **sechs Systemen,** welche wir in Hauy'scher Weise darstellen wollen. Derselbe bezeichnete die Flächen mit PMT (PriMiTivform), die Ecken mit den Vokalen AEJO, die Kanten mit den Consonanten BCDFGH, und ließ dann allmählig alle gleich werden, so daß beim regulären Systeme nur noch ABP übrig blieben.

1) **Eingliedriges Hexaid (schiefe Rhomboidsäule,** Henhenoeder, ἕν, ἑνός eins), d. h. rhomboidische Säule M/T mit **doppelschiefer** Endfläche P (schief an- und schief aufgesetzt), weil Kante D verschieden von F ist. Dies gibt den allgemeinsten Körper, worin kein Glied dem andern gleich wird, daher $6 + 4 + 3 = 13$ verschiedene Buchstaben. Es kommt nicht häufig vor, doch bieten Kupfervitriol und Axinit gute Beispiele, während Albit schon den Habitus des $2 + 1$gliedrigen Feldspathes annimmt. Links anders als Rechts, und Vorn anders als Hinten (unpaarig, schiefköpfig).



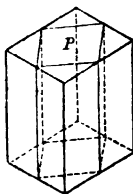
2) **Zwei und eingliedrige Hexaide, schiefe Rhomb-** (2. a) und **schiefe Oblongsäule** (2. b), die beide ihre Schiefendfläche P gemein haben, während ihre Säulen in einander geschachtelt mit genau correspondirenden Buchstaben versehen werden können. Die Schiefendfläche ist gerade aufgesetzt, weil D = D, aber schief angesetzt, weil D keine rechten Winkel sind. Jene rhombische Säule M/M mit Schiefendfläche P nannte Weiß Hendyoeder (2 + 1 Flächner, δύο zwei). MMP, EEAO, BBDDGH bezeugen, daß von den 13 Gliedern sich bereits 4 (M, E, B, D) gepaart haben, und 5 noch einzeln blieben, worin 4 (APOH) in der Vertikalzone sich um die fünfte G (die Medianebene) gruppiren, welche die Bilateralität erzeugte: Links wie Rechts, aber Vorn anders als Hinten (paarig, einköpfig). Die **gerade Rhomboidsäule**, wie sie beim Epidot,





der seinen Namen (ἐπιδίδωμι zugeben) davon hat, vorkommt, wird gewendet einer schiefen Oblongsäule gleich.

3) **Zweigliedrige Hexaide, gerade Rhomb-** (4. a) und **gerade Oblongsäule** (4. b), die beide ihre Geradendfläche P gemein haben, während ihre Säulen in einander geschachtelt mit genau correspondirenden Buchstaben versehen werden können: MMP, AAEE, BBBBGH bezeugen, daß nicht nur Paarung (MM, AA, EE), sondern sogar Vierzahl BBBB (Doppelpaarung) vorkommt, und nur noch drei Einzelglieder übrig bleiben. Hier tritt uns bereits ein Januskopf entgegen: Links wie Rechts und Vorn wie Hinten (zweipaarig, zweiköpfig).

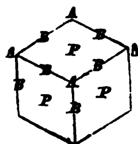


4) **Viergliedriges Hexaid,** Quadratsäule M/M mit Geradendfläche P. Hier braucht man nicht **gerade** hinzuzusetzen, weil nur **eine** geschlossene Säule möglich ist: MMP, AAAA, BBBBGG bezeugen, daß schon die doppelte Vierzahl das Uebergewicht hat, und außer den zwei Paarungen kommt nur noch eine einzige **Eins** P vor, die stets als Horizontalebene gedacht wird. Hier ist sich Vorn, Links, Hinten, Rechts im Kreise gleich. In dieser einen Zone tritt daher schon Regularität ein, mit den Zahlen 4 und 8 (vierpaarig, vierköpfig).

Beim eingliedrigen Hexaide, schlechthin Hexaid genannt, ist in keiner Weise irgend ein Gleichgewicht denkbar, dagegen läßt man bei den rhombischen Säulen des 2 + 1gl. und 2gl., sowie an der quadratischen Säule des 4gliedrigen die Seiten M/M congruent werden, dadurch entstehen die Querschnitte Rhombus und Quadrat, blos das Verhältniß zur Länge bleibt ungewiß. Nur Rhomboeder und Würfel sind ohne Messung des Gleichgewichts fähig:

5) **Dreigliedriges Hexaid, Rhomboeder,** im Gleichgewicht mit drei congruenten Rhomben, wenn die Parallelen nicht gezählt werden. Die Buchstaben PPP, BBB, DDD, EEE und A deuten an, daß sich alles zu drei gruppirt. Daher der glückliche Name. Wie beim Viergliedrigen ist noch **eine** Eins A da, die man ebenfalls aufrecht stellt, woran dann eine senkrechte Ebene gedacht wieder eine reguläre Zone erzeugt wird, aber mit den Zahlen 3 und 6 (dreipaarig, dreiköpfig) wie Cerberus.

6) **Reguläres Hexaid, Hexaeder** oder **Würfel,** im Gleichgewicht mit drei congruenten Quadraten. Hier tritt nun das Maximum der Gleichheit ein, es erscheinen nur noch dreierlei Buchstaben: 3 P, 4 A, 6 B. Viergliedrige Regularität nach drei, und dreigliedrige nach sechs Zonen.



Daher 3 . 8 = 4 . 6 = 24 gleiche Flächen in diesem Systeme möglich (zwölfpaarig, zwölfköpfig).

Dreierlei Glieder im regulären; fünferlei im vier- und dreigliedrigen; siebenerlei im zweigliedrigen; neunerlei im 2 + 1gliedrigen; dreizehnerlei im eingliedrigen System. Die elf ist in dieser Reihe nicht vertreten, man könnte dabei an das siebente Mitscherlich'sche Krystallsystem (diklinometrisch) denken, was aber principiell keine Stelle hat.

Die Uebersicht ergibt nachfolgende Zahlen der 13 Glieder:

System	Flächen	Ecken	Kanten
1. Gleichgliedriges	3	4	6
2. Dreigliedriges	3	3+1	3+3
3. Viergliedriges	2+1	4	4+2
4. Zweigliedriges	1+1+1	4	2+2+2
5. Zweiundeingl.	2+1	2+1+1	2+2+1+1
6. Eingliedriges	1+1+1	1+1+1+1	1+1+1+1+1+1.

Daß überhaupt nur sechs Systeme möglich sind, habe ich schon früher (Methode Kryst. 1840 pag. 117) auf verschiedene Weise bewiesen. Natürlich kann man auch abstract mathematisch zu ähnlichem Ziele gelangen, wie das Bravais, Frankenheim und namentlich Sohncke (Pogg. Ann. 1867 Bd. 132 pag. 75) versucht haben, ohne diesen viel anschaulichern Weg zu kennen und zu erwähnen.

Bemerkung. Es ist gar nicht so leicht, die rechte Benennung für die Systeme zu finden. Weiß nahm gliedrig, man könnte auch paarig sagen, denn das gleichschenkliche Dreieck läßt sich durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke (Paare) zerlegen, das gleichseitige dagegen durch drei Diagonalen in 6 d. h. in 3 Paare. In diesem Sinne ist das reguläre System 12paarig, weil es vier gleichseitige Dreiecke enthält; das viergliedrige mit vier congruenten gleichschenklichen Dreiecken 4paarig; das rhomboedrische mit einem gleichseitigen und drei gleichschenklichen Dreiecken in beiden Weisen 3paarig; das zweigliedrige mit je zwei congruenten gleichschenklichen Dreiecken 2paarig; das 2 + 1gliedrige mit vereinzelten gleichschenklichen Dreiecken 1paarig; es bleibt dann für das 1gl. nur die Unpaarigkeit. Das Wort Kopf würde uns an das organische erinnern: schiefköpfig bezeichnete dann die Unsymmetrie des 1gliedrigen; einköpfig wäre das 2 + 1gliedrige; zweiköpfig d. h. mit dem Januskopf ist das 2gliedrige versehen; dreiköpfig symmetrisch wie Cerberus das rhomboedrische; vierköpfig, der doppelte Janus, das viergliedrige; auf das reguläre kämen dann 12, auf das sechsgliedrige der doppelte Cerberus. Die Phantasie pflegt für solche Bilder empfänglich zu sein. Aus den Köpfen folgt dann die doppelte Zahl der Arme.

Auch ist es nicht zufällig, daß vier Säulen, 2 . 4 = 8 Hexaide, und ohne das sechsgliedrige sechs Systeme möglich sind. Es fallen zunächst auf jede Säule zwei Hexaide: die **Quadratsäule** gibt Würfel und geschlossene Quadratsäule, jedes Quadrat bedeutet Vierpaarigkeit, jedes

Oblongum Zweipaarigkeit, so daß die Quadratsäule sowohl nach den oblongen Flächen wie nach der Geradendfläche sich als vierköpfig ergibt; die **Rhombsäule** gibt uns Rhomboeder und gerade Rhombsäule, die Rhomben am Rhomboeder sind nur paarig, in der Geradendfläche der Rhombsäule aber zweipaarig, während ihre Seitenoblongen nur paarig, und nicht zweipaarig wie bei der Quadratsäule sein können; die **Oblongsäule** gibt gerade und schiefe Oblongsäulen, dort sind die Oblongen doppelpaarig, hier nur paarig; die **Rhomboidsäule** kann gerade und doppelschief sein, jene ist eine gewendete schiefe Oblongsäule. Bleibt nur noch die schiefe Oblongsäule als achte. Da nun schiefe Oblong- und Rhomb-, sowie gerade Oblong- und Rhombsäule zusammen ein System bilden, so sind nur sechs Systeme möglich.

Rechnung.

Sind von den sechs Stücken $ABC\alpha\beta\gamma$ einer körperlichen Ecke (sphärisches Dreieck) drei beliebige bekannt, so kann man die andern drei durch Rechnung finden. Der Astronom, welcher es mit unendlichen Kantenlängen zu thun hat, mißt die ebenen Winkel $\alpha\beta\gamma$ (Seiten), der Krystallograph dagegen die Kanten ABC (Winkel). Zwischen Winkel und Seiten finden folgende trigonometrische Beziehungen statt.

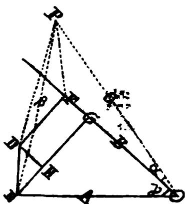
I. $\sin A : \sin B : \sin C = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma\,.$

II.
$$\cos\alpha = \cos\beta\,.\,\cos\gamma + \sin\beta\,.\,\sin\gamma\,.\,\cos A\,.$$
$$\cos\beta = \cos\alpha\,.\,\cos\gamma + \sin\alpha\,.\,\sin\gamma\,.\,\cos B\,.$$
$$\cos\gamma = \cos\alpha\,.\,\cos\beta + \sin\alpha\,.\,\sin\beta\,.\,\cos C\,.$$

III.
$$\cos A = -\cos B\,.\,\cos C + \sin B\,.\,\sin C\,.\,\cos\alpha\,.$$
$$\cos B = -\cos A\,.\,\cos C + \sin A\,.\,\sin C\,.\,\cos\beta\,.$$
$$\cos C = -\cos A\,.\,\cos B + \sin A\,.\,\sin B\,.\,\cos\gamma\,.$$

IV.
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos A\,.\,\sin B + \sin A\,.\,\cos B\,.\,\cos\gamma}{\sin A\,.\,\sin\gamma} = \frac{\cos A \sin C + \sin A \cos C \cos\beta}{\sin A \sin\beta}\,.$$

V.
$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha\,.\,\cos\beta\,.\,\cos C}{\sin\alpha\,.\,\sin C} = \frac{\cos\alpha\,.\,\sin\gamma - \sin\alpha\,.\,\cos\gamma \cos B}{\sin\alpha \sin B}\,.$$



Für I ist $PD \perp \gamma$, $DE \perp A$, $DF \perp B$, folglich $PF \perp B$ und $PE \perp A$, gibt $\frac{PD}{PE} = \sin A$, $\frac{PE}{PO} = \sin\beta$, das Product $\frac{PD}{PO} = \sin A\,.\,\sin\beta$;

$\frac{PD}{PF} = \sin B$, $\frac{PF}{PO} = \sin \alpha$, das Product $\frac{PD}{PO} = \sin B \sin \alpha$.

Für II ziehe $EG \perp OF$, $DH \# OF$, so ist

$$\text{Winkel } DEH = DEO - GEO = \gamma.$$

Folglich $\frac{HD}{DE} = \sin \gamma$, $DE = \cos A \sin \beta$,

$$\text{gibt } HD = \cos A . \sin \beta . \sin \gamma.$$

$\frac{OG}{OE} = \cos \gamma$, $\frac{OE}{OP} = \cos \beta$, $OP = 1$, folglich $OG = \cos \beta . \cos \gamma$

$\cos \alpha = OF = OG + HD = \cos \beta . \cos \gamma + \sin \beta . \sin \gamma . \cos A$.

Für III mache das **Invertirungshexaid**, d. h. lege im offenen Ende einer körperlichen Ecke an die drei Kanten drei Geradendflächen, so müssen diese sich in einem Punkte mit den Seiten $\alpha'\beta'\gamma'$ und mit den Winkeln $A'B'C'$ schneiden. Dann ist $\alpha' = 180^0 - A$ und $A' = 180 - \alpha$ ꝛc., also

$$\cos (180^0 - A) = \cos (180^0 - B) \cos (180^0 - C) + \sin (180^0 - B) . \sin (180^0 - C) \cos (180^0 - \alpha).$$

Für $A = B = C$ wird (III)

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{\cos A + \cos A^2}{\sin A^2},$$

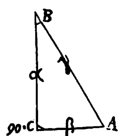
das gilt für Rhomboeder.

Für $A = B = C = \alpha = \beta = \gamma$ wird (II) $\sin \alpha^2 = 1 - \cos \alpha$. Diese Gleichung ist nur möglich für $\cos \alpha = o$, d. h. für rechte Winkel, weil $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$ sein muß.

Für $A = B$, wird (III) $\cos \alpha = \cos \beta = \frac{\cos A(1 + \cos C)}{\sin A \sin C}$,

d. h. die Gleichheit der Winkel bedingt auch die Gleichheit der entsprechenden Seiten.

Für $C = 90^0$ wird $\cos C = o$ und $\sin C = 1$. Die Formeln gehen sofort über in:



I $\sin \alpha = \sin A . \sin \gamma$; $\sin \beta = \sin B . \sin \gamma$.

II $\cos \gamma = \cos \alpha . \cos \beta = \text{ctg } A . \text{ctg } B$ (III).

III $\cos A = \cos \alpha . \sin B$; $\cos B = \cos \beta . \sin A$.

IV $\text{tg } \alpha = \text{tg } A . \sin \beta$; $\text{tg } \beta = \text{tg } B . \sin \alpha$.

V $\text{tg } A = \text{tg } \alpha . \sin \beta$; $\text{tg } . B = \text{tg } \beta . \sin \alpha$.

Die halben Winkel sind in den allgemeinen Formeln für Logarithmen bequemer.

Setzt man $\frac{1}{2}(A + B + C) = S$ und $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \sigma$, so kommt durch Rechnung

$$1) \ \text{tg } \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{- \cos S . \cos (S - A)}{\cos (S - B) . \cos (S - C)}};$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{- \cos S . \cos (S - A)}{\sin B . \sin C}}.$$

$$2)\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(\sigma-\beta) . \sin(\sigma-\gamma)}{\sin\sigma . \sin(\sigma-\alpha)}};$$

$$\sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(\sigma-\beta) . \sin\sigma-\gamma)}{\sin\beta . \sin\gamma}}.$$

$$3)\ \begin{cases} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)} \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}, \text{ bekannt } \alpha BC. \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)} \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B+C) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)} \operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}, \text{ bekannt } A\beta\gamma. \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B-C) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)} \operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}. \end{cases}$$

Für Rhomboeder ist $A = B = C$ oder $\alpha = \beta = \gamma$, folglich nach 1 und 2:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{-\cos\frac{3}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A}} \text{ und } \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\sin\frac{3}{2}A}}.$$

Für bilaterale Hexaide ist $B = C$ oder $\beta = \gamma$, folglich nach 1 und 2:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}A}\sqrt{-\cos S . \cos B} \text{ und } \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1}{\sin\sigma . \sin\beta}}.$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos B} \text{ und } \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}A}{\cos\beta} \text{ nach 3 und 4.}$$

Sind im **Hexaide** die Kantenlängen (Flächenaxen) abc und die Punktwinkel $\alpha\beta\gamma$ gegeben, und nennen wir die Flächendiagonalen (Kantenaxen) d, δ, die Eckenaxen D, so ist

$$d^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab\cos\gamma \text{ und } \delta^2 = a^2 + b^2 \mp 2ab\cos\gamma,$$
$$\text{folglich } d^2 + \delta^2 = 2a^2 + 2b^2.$$
$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \pm 2ab\cos\gamma \pm 2ac\cos\beta \pm 2bc\cos\alpha.$$

Schon die Symmetrie fordert letztere Formel. Nennen wir zum Beweise die Diagonalen einer scharfwinklichen Ecke der Reihe nach d_1, d_2, d_3, so ist

$$d_1^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab\cos\gamma,\ d_2^2 = a^2 + c_2^2 \pm 2\,ac\cos\beta,$$
$$d_3^2 = b^2 + c^2 \pm 2bc\cos\alpha.$$
$$D^2 = d_1^2 + c^2 + x_1 = d_2^2 + b^2 + x_2 = d_3^2 + a^2 + x_3,$$

denn wir haben blos die drei Parallelogramme d_1c, d_2b, d_3a zu machen, worin D die Diagonale bildet, und die x unbekannt sind. Wäre $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$, so ist $\cos 90^0 = 0$, und es wird

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2, \text{ also } x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Wäre dagegen $\alpha = \beta = \gamma = 0$, so ist $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1$, und

$$D^2 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Solche Betrachtungen führen leicht zu der Formel (Kupffer, Handb. rechnend. Kryst. 1831 pag. 37).

Sind in einer Hexaidecke die Vorzeichen der cos bekannt, so erhalten von den übrigen drei um eine Fläche liegenden Ecken je zwei cos das entgegengesetzte Vorzeichen. Also wird z. B.

$$D_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta + 2ac\cos\alpha$$
$$D_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma - 2ac\cos\beta - 2ac\cos\alpha$$
$$D_3^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta - 2ac\cos\alpha$$
$$D_4^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\gamma - 2ac\cos\beta + 2ac\cos\alpha$$
$$D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 = 4(a^2+b^2+c^2) = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2,$$

d. h. wie in jedem Parallelogramme die Summe der Quadrate von den Diagonalen gleich ist der Summe von den Quadraten der Seiten, so ist auch im Hexaid (Parallelepiped) die Summe der Quadrate der vier Eckenaxen (Eckdiagonalen) der Summe der Quadrate aller Kanten gleich, pag. 81. Darin liegt zu gleicher Zeit auch der Beweis für die Formel von D^2. Es ist das ein unerwartetes Resultat. Setzen wir Neigung der Kante c zur gegenüberliegenden Diagonale $d = \varrho$, so ist

$$D^2 = d^2 + c^2 + 2cd\cos\varrho$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 2ab\cos\gamma + 2c\cos\varrho\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha, \text{ daher}$$
$$\cos\varrho = \frac{a\cos\beta \pm b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab\cos\gamma}}.$$

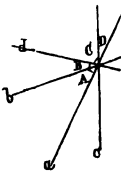
Für Kalkspath wird $\alpha = \beta = \gamma = 101^\circ\, 55'$, und wenn man Kante $a = b = c = 1$ setzt, so ist

$$-\cos\varrho = \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{2 - 2\cos\alpha}} \;\ldots\; 109^\circ\, 9'$$ der Winkel, welchen eine schiefe Flächendiagonale mit der gegenüberliegenden Endkante des Rhomboeders macht.

Vier Blätterbrüche erzeugen dreierlei:

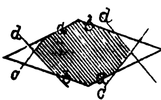
achtseitige Säule, Vierzonenkörper, Oktaid.

Die **achtseitige Säule** entsteht, wenn die vier Reductionsebenen sich in **einer** Kante schneiden. Sie sind, wie das Hexaid, durch drei Winkel ABC bestimmt, da



$$A + B + C + D = 180^\circ$$

werden. Wir kommen damit auf den Begriff der **Zuschärfung**. Denn entwickeln wir je zwei beliebige Strahlen (ab) zu einer vierseitigen Säule, so müssen davon die andern beiden cd eine der Säulenkanten so wegnehmen, daß alle Kanten unter einander parallele Linien bilden: man sagt, cd **schärfen** die Kante ab **zu**, obgleich die neue Kante c/d stumpfer wird als die weggeschnittene a/b. Man hätte eben so gut zustumpfen sagen können. Von der vier-, sechs-, acht- bis zur 2nseitigen Säule ist eine fortlaufende Reihe. An sich ist die Zahl für ungleiche Flächen zwar unbeschränkt,



für gleiche jedoch unsere 8 = 2 . 4 im Viergliedrigen schon das Maximum, wie 12 = 2 . 6 im Dreigliedrigen. Das wird in der Deductionslehre bewiesen werden.

Der **Vierzonenkörper** entsteht durch Abstumpfung einer Hexaidkante $\alpha\delta$ durch Fläche β, was daher nothwendig eine sechsseitige Säule $\alpha\beta\delta$ mit einer Endfläche $\gamma = \gamma_, + \gamma_{,,}$ geben muß. Daher kommen auch nur vier Zonen zum Vorschein: drei vierseitige α/γ, β/γ, δ/γ und eine sechsseitige $\alpha\beta\delta$.

Mathematisch betrachtet gibt es zwei anliegende körperliche Ecken $\alpha\delta\gamma_,$ und $\beta\delta\gamma_{,,}$, zu deren Bestimmung **vier** Kanten gehören, eine mehr, als beim Hexaide. Denn durch die Kanten DBC, kann ich die Seite $\gamma_,$ berechnen. Da ich im Nebendreiecke außerdem nur noch den Nebenwinkel D, kenne, so muß ich nothwendig noch A (oder $C_{,,}$) messen. Für anliegende Dreiecke gelten, wenn wir $C = C_, + C_{,,}$ und $\gamma = \gamma_, + \gamma_{,,}$ setzen, die Sätze:

$$\cos\delta \, . \sin\gamma = \cos\alpha \, . \sin\gamma_{,,} + \cos\beta \, . \sin\gamma_, \, .$$
$$\cos\delta \, . \sin C \, . \sin D = \cos A \sin C_, + \cos B \, . \sin C_{,,} \, .$$

Vierzonenkörper sind sechsseitige Säulen mit Endflächen. Nach den möglichen sechsseitigen Säulen pag. 79 haben wir drei Gruppen:

irreguläre, symmetrische, reguläre.

Wir können zunächst alle drei gerade denken. Alsdann die symmetrische mit schiefer, und die reguläre mit doppelschiefer Endfläche. Das gibt zusammen fünf. Wie die Kanten der Hexaide den dreiaxigen Systemen zur Unterlage dienen, so die der Vierzonenkörper den vieraxigen, wie wir unten bei den Axen auseinandersetzen werden.

Die **Rechnung** mit dem Vierzonenkörper ist für Axenlegung von Wichtigkeit, Hdb. Mineral. 1855 pag. 61. Habe ich zwei beliebige Schenkel durch Axe c in die ungleichen Winkel φ und $\varphi_,$ getheilt, so kann man durch irgend einen Punkt der Axe die Querlinie so legen, daß A = A' wird. Damit haben wir das allgemeine Projectionsbild eines Vierzonenkörpers, worin sich verhält:

$$A : \sin\varphi = c : \sin(\omega + \varphi) \text{ und } A' : \sin\varphi_, = c : \sin(\omega - \varphi_,)$$

$$A = A' = \frac{\sin\varphi}{\sin(\omega + \varphi)} = \frac{\sin\varphi_,}{\sin(\omega - \varphi_,)}$$

$$\sin\varphi(\sin\omega \, . \cos\varphi_, - \cos\omega \, . \sin\varphi_,) = \sin\varphi_,(\sin\omega \, . \cos\varphi + \cos\omega \, . \sin\varphi)$$

$$\sin\omega \, . \sin\varphi \, . \cos\varphi - \sin\omega \, . \cos\varphi \, . \sin\varphi_, = 2\cos\omega\sin\varphi\sin\varphi_,$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{2\sin\varphi\sin\varphi_,}{\sin(\varphi - \varphi_,)} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\varphi_, - \operatorname{ctg}\varphi} \text{ (Basalformel).}$$

Der Satz bleibt derselbe, wenn man unter $\varphi\varphi_,$ die Winkel gegen Axe A und A' versteht.

Hätten wir vorn allgemein eine Fläche $c : \frac{1}{\mu} A$ und hinten $c : \frac{1}{\mu_,} A'$,

so wäre

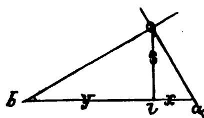
$$\operatorname{tg}\omega = \frac{(\mu + \mu_,)\sin\varphi\,.\,\sin\varphi_,}{\mu\,.\sin\varphi\,.\cos\varphi_, - \mu_,\,.\cos\varphi\,.\sin\varphi_,} = \frac{\mu + \mu_,}{\mu\,.\operatorname{ctg}\varphi_, - \mu_,\operatorname{ctg}\varphi}.$$

Hätte man die Neigung der Schiefendfläche gegen Axe A und A' respective φ und $\varphi_,$ gesetzt, so würde

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{(\mu + \mu')\sin\varphi\,.\,\sin\varphi_,}{\mu_,\sin\varphi\cos\varphi_, - \mu\cos\varphi\sin\varphi_,} = \frac{\mu + \mu_,}{\mu_,\operatorname{ctg}\varphi_, - \mu\operatorname{ctg}\varphi}.$$

Für $\mu = \mu_, = 1$ gehen beide wieder in die einfache Basalformel über.

Wird das **Vierzonenkörperbild rechtwinklich**, so fand es schon bei Hauy und Weiß vielfache Anwendung. Bei letzterm war a und b das rechtwinkliche Axenkreuz, worin das Perpendikel s auf die Hypotenuse ab gefällt den sin von der Neigung der Fläche a : b : c gegen die Hauptaxe c bildete, während Axe c selbst der cos ist. Es war das zugleich einer der Gründe, die Hauptaxe nicht a sondern c zu nennen, um damit auf cos zu deuten. Wir haben in aob drei rechtwinkliche und ähnliche Dreiecke aob ≅ bol ≅ aol. Betrachten wir ob = b als die Basis und oa = a als die Höhe, und dann wieder Linie ab = x + y als die Basis und ol = s als die Höhe, so muß



$$1\,.\,a\,.\,b = s\,.\sqrt{a^2 + b^2},\ s = \frac{a\,.\,b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ sein.}$$

Verbinden wir dann in Gedanken die Hauptaxe c mit l, so ist das Perpendikel vom Mittelpunkte o aus auf cl gefällt

$$p = \frac{c\,.\,s}{\sqrt{c^2 + s^2}} = \frac{a\,.\,b\,.\,c}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}}};$$

der einfachste Weg, die Länge des Perpendikel vom Mittelpunkte auf eine beliebige Fläche a : b : c zu finden.

Aus der Aehnlichkeit der drei Dreiecke folgt die Proportion

$a : s : x = b : y : s = x + y : b : a.$ Folglich

2) $s^2 = x\,.\,y$, weil $s : x = y : s$,

d. h. s ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.

3) $y = \frac{b\,.\,s}{a}$ und $x = \frac{a\,.\,s}{b}$, weil $a : s = b : y$ und $a : x = b : s$.

Daraus folgt $b\,.\,s = a\,.\,y$ und $a\,.\,s = b\,.\,x$

$b^2\,.\,s^2 = a^2\,.\,y^2$ und $a^2\,.\,s^2 = b^2\,.\,x^2$

$b^2\,.\,xy = a^2\,.\,y^2$ und $a^2\,.\,xy = b^2\,.\,x^2$, folglich

4) $b^2\,.\,x = a^2\,.\,y$.

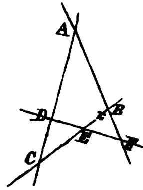
Weil $a : x = x + y : a = \sqrt{a^2 + b^2} : a$, und

$b : y = x + y : b = \sqrt{a^2 + b^2} : b$, so ist

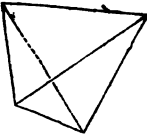
5) $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ und $y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Das Oktaid

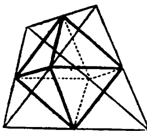
wird durch vier Flächen gebildet, die sich in sechs Zonen schneiden, und ist durch das sogenannte vollständige Vierseit projicirt. Es ist das selbstverständlich: denn man darf sich nur das Hexaid ABC projiciren, und dann die vierte Fläche DF beliebig aber so durchlegen, daß sie in keinen der drei Zonenpunkte des Hexaides fällt, so müssen, da jede Linie jede schneidet, nothwendig drei neue Zonenpunkte DEF entstehen. Zur Bestimmung des Oktaides gehören fünf Winkel, z. B. ABCDE, dann gibt ABC die Seiten des einen großen Dreiecks, DEC die Seiten des kleinen. Damit ist durch einfache Subtraction die kurze Seite x gefunden, neben der dann die Nebenwinkel von B und E zur Bestimmung des kleinen Dreieckes BEF hinreichen, womit zuletzt ADF berechnet werden kann.



So unverständlich auf den ersten Anblick der Körper sein mag, welcher hier dargestellt wird, so ist er doch nichts weiter, als eine körperliche Ecke, die an ihrem offenen Ende durch eine vierte Fläche geschlossen wird, d. h. ein **Tetraid.** Wenn wir von irgend einem Hexaide die Ecke wegsägen, so fällt unser Körper. **Derselbe befindet sich stets im Gleichgewicht.** Dadurch wird er einzig in seiner Art, ein wahrer coelebs pag. 6 dient er zugleich zum Ausgangspunkt unserer ganzen Entwickelung. Machen wir vier beliebige Punkte auf das Papier, wovon nie drei in eine Linie fallen dürfen, und verbinden sie, so haben wir den gesuchten Körper gezeichnet. Eben so leicht wird er durch vier beliebige Schnitte, wovon keiner dem andern parallel gehen darf, hingestellt. Es ist ein Hälftflächner mit 4 Flächen, 4 Ecken, 6 Kanten, worin man die Grundzahlen des Systemes nicht sofort wieder erkennt. Allein sobald man sämmtliche Kanten halbirt, und durch die Halbirungspunkte Linien zieht, so kommt das zugehörige

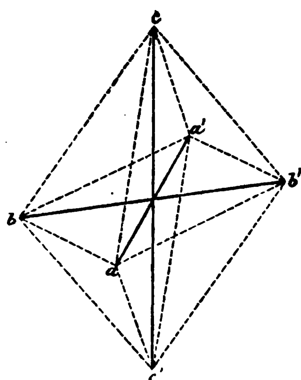


Oktaid, welches von der doppelten Zahl von Dreiecken begrenzt wird, die wegen der Kantenhalbirung respective den Tetraiddreiecken ähnlich sind. Auch dieses Oktaid aus dem Tetraid herausgeschnitten, befindet sich stets im Gleichgewicht, d. h. alle seine Flächen haben nie mehr als drei Seiten. Daher müssen auch die drei Axen durch die Mittelpunkte der Tetraidkanten gehen. Man darf sich das Tetraid nur als eine dreiseitige Pyramide vorstellen, um einzusehen, daß die neuen durch die Halbirungspunkte gelegten vier Flächen, den alten parallel gehen. Die vier Reductionsebenen sind damit zu Parallelräumen entwickelt. Daraus folgen dann sofort die allgemeinen

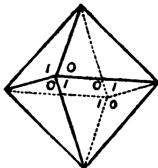


Eigenschaften des Oktaides: vier Parallelräume

abc # a'b'c', ab'c # a'bc',



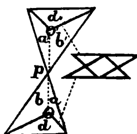
a'bc ⧣ ab'c', a'b'c ⧣ abc';
drei Paar gegenüberliegende Ecken
a und a', b und b', c und c';
sechs parallele Paare Kanten, wovon vier Paare die Endkanten
ca ⧣ c'a', cb ⧣ c'b',
ca' ⧣ c'a, cb' ⧣ c'b
und zwei Paare die Seitenkanten
ab ⧣ a'b' und ab' ⧣ a'b
bilden. Darin stecken die Grundzahlen 3, 4, 6. Die Kanten gruppiren sich zu drei Parallelogrammen
aca'c', bcb'c', aba'b',
Basalschnitte genannt. Da nun die Axen aa', bb', cc' die Diagonalen derselben sind, so müssen sie sich im Mittelpunkte halbiren. Daher ist a : b : c das passendste Symbol für eine Oktaidfläche. Die Länge dieser Axen und die von ihnen eingeschlossenen Winkel $\alpha\beta\gamma$, welche den gleichnamigen Buchstaben abc gegenüberliegen, liefern in Zukunft die Data, womit wir rechnen. Da es sich bei den Axenlängen immer nur um das Verhältniß handelt, so können wir eine derselben z. B. c = 1 setzen. Dann ist jegliches Oktaid mit fünf Stücken $\alpha\beta\gamma$ab bestimmt, wie wir



oben schon sahen. Schreibe auf irgend eine der Flächen Null, auf die drei anliegenden Eins und so fort, lasse erst die Flächen mit 1 wachsen und die mit 0 verschwinden, dann umgekehrt die 0 wachsen und die 1 verschwinden, so haben wir wieder die ursprünglichen Tetraide 1111 und 0000, die sich gegenseitig wie links und rechts verhalten.

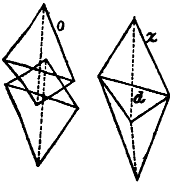
Da mit jedem Tetraide sofort das zugehörige Oktaid durch Halbirung der Tetraidkanten gegeben ist; da sie sich ferner stets im Gleichgewicht befinden, d. h. alle, deren Flächen nicht aus ihrer gegebenen Parallelität heraustreten, einander ähnlich bleiben; da endlich weniger Reductionsebenen als vier zu einem geschlossenen Körper undenkbar sind: so erscheint er unter den beweglichen Elementen für die Systematik wie ein fester Punkt.

Das **Links** und **Rechts** in den Scheiteldreiecken wird uns jetzt sofort klar, denn das Tetraid ist ja nichts weiter als ein

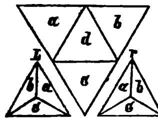


durch d geschlossenes körperliches Dreieck. Lassen wir die Basen d und d, sich decken, so kreuzen sie sich, denn wir müssen erwägen, daß wenn 0 oben, so muß 0' unten aus der Zeichnungsebene heraustreten. Unter **Kreuzen** verstehen wir immer, daß die entsprechenden Seiten der beiden congruenten Dreiecke einander parallel gehen. Kehre ich daher zwei Tetraide mit der gleichen Fläche kreuzweis so gegeneinander, daß

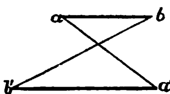
die homologen Seiten einander parallel stehen, so gehen auch die übrigen homologen Flächen parallel, ich erzeuge das vollflächige Oktaid o; decken sich dagegen die Dreiecke d, so kommt der Zwilling z. Daher sagte Weiß passend: die beiden Zwillingsstücke haben eine Fläche d (**Zwillingsebene**) gemein, und liegen umgekehrt. **Parallel** und **umgekehrt**, das sind die unzweideutigen Bestimmungen. Ja wollte man das Kreuzen von d und d, nicht „gemeinhaben" nennen, sondern nur die wirkliche Deckung, so könnte man das „Umgekehrt" als selbstverständlich ganz weglassen.



Links und Rechts greift bis ins reguläre Tetraid (Tetraeder). Zu dem Ende machen wir uns ein Netz abcd durch Halbirung der Seiten eines gleichseitigen Dreiecks. Schlägt man jetzt die Dreiecke abc hinauf, so liegt abc rechts gedreht r; schlägt man hinunter, links gedreht l. Ganz wie ein rechter Handschuh durch Umstülpen zur linken Hand paßt. Das ist wieder allgemeines Gesetz, und gilt nicht blos für Tetraide, sondern für alle Hälftflächner.

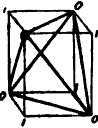


Dieß Gesetz, was mit linken und rechten Gliedmaßen übereinstimmt, verdient, daß man es sich vollständig klar mache, es könnte das **Polaritätsgesetz** heißen. Der Raum ist unendlich, ziehen wir darin eine unendliche Linie, so wird jeder vereinzelte Punkt dieselbe halbiren. Machen wir mehrere Punkte hintereinander, und lassen eine so gezeichnete Linie in zwei Parallelen auseinander treten, so können wir die Punkte immer wieder zur Deckung bringen, lediglich durch Parallelbewegung. Ganz anders wird die Sache, wenn wir die gleichnamigen Punkte aa' und bb' durch Strahlen erzeugen, jetzt können wir die Punkte durch bloße Parallelbewegung nicht mehr zur Deckung bringen, denn legen wir a auf a', so müssen sich b und b' polar gegenüber stehen, und umgekehrt. Nur wenn man die eine Linie dreht, wird die Deckung möglich, oder wenn in der Polarlage, wo a die a' deckt, wir die b' durch die dritte Dimension hindurch auf die b herüberklappen. Bei der Parallelbewegung blieben wir in zwei Dimensionen, durch das Herüberklappen, d. h. mit Zuhilfenahme der dritten Dimension bringen wir die Deckung in diesem Falle noch zu Stande. Die Deckung könnte auch so geschehen, daß wir in der Polarlage von b und b' die b' durch die b hindurchziehen, gleichsam links machen. Bis jetzt hatten wir es nur mit Flächenpunkten zu thun. Nehmen wir nun noch einen dritten Raumpunkt cc' hinzu, dann ist keine Deckung mehr möglich, weil es dem Raume an einer vierten Dimension fehlt. Die beiden Tetraide verhalten sich wie ein linker und rechter Handschuh, nur wenn ich den einen umkrempele, kann ich ihn über den andern herziehen. Nehme ich zwei solche, abc mit den entsprechenden a'b'c', so habe ich den Zwilling. Zwilling ist also



im Allgemeinen nichts weiter, als die Verwachsung eines **Krystalls** mit seinem Spiegelbilde: ich darf den Krystall nur mit der **Zwillingsebene** auf den Spiegel legen, um sofort das Bild zu haben.

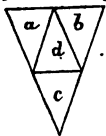
Systematisch sind die Tetraide durch das Hexaid gegeben, denn das Tetraid stumpft von den acht Ecken wechselsweise vier ab, gemäß der Stellung von 0 und 1. In jedes Hexaid kann ich daher zwei Tetraide (Kerntetraide) einschreiben, deren Kanten kreuzweis den Hexaiddiagonalen entsprechen. Wir gelangen damit zu **achterlei**, die man sich am besten durch die Netze klar macht.



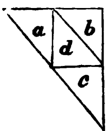
1. **Gleichflächige Tetraide** entstehen aus Würfel, Quadrat- und gerader Oblongsäule. Ihr Netz wird höchst einfach durch Halbirung der Seiten eines Dreiecks gewonnen. Das

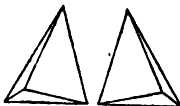
reguläre, wie vorhin, durch Halbirung der Seiten eines gleichseitigen Dreiecks, daher sind alle Flächen gleichseitig; das

viergliedrige Netz erhalten wir durch die Halbirung sämmtlicher Seiten eines gleichschenklichen Dreiecks, daher werden alle Flächen abcd wieder gleichschenklich, unter einander congruent und dem großen Hauptdreiecke ähnlich. Wie im regulären Tetraeder die Flächen den Flächen des regulären Oktaeders, so sind hier die Flächen den Flächen des viergliedrigen Oktaeders ähnlich, aus welchen es entstand. Das

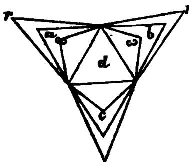


zweigliedrige verlangt ein ungleichseitiges Dreieck, daher sind alle Flächen ungleichseitig. Im Halbirungspunkte jeglichen Dreieckes liegen die drei Seiten (ebene Winkel) der Ecken. Diese Tetraide haben daher die merkwürdige Eigenschaft, daß in jeder Ecke die Summe der Seiten = 180° beträgt. Im regulären folgt das von selbst, weil 3 . 60° = 180°; im viergliedrigen liegen je zwei Winkel der Basis und einer aus der Spitze; im zweigliedrigen dreierlei, weil im ebenen Dreieck die Summe zwei Rechte ist. Schlägt man im letztern die Ecken des Netzes herauf und hinunter, so gibt das zwei Körper, die einander nicht mehr mathematisch congruent sind, wie im regulären und viergliedrigen System, sondern sich wie Bild und Spiegelbild verhalten, d. h. auch äußerlich links und rechts gestaltet sind.



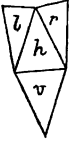


2. Das 3 + **1flächige Tetraid** gehört dem **Rhomboeder** im dreigliedrigen Systeme an. Es hat noch ein gleichseitiges Dreieck d im Centrum, die übrigen drei sind gleichschenklich, an der Spitze bald stumpfer ω, bald schärfer r als reguläre. Das gleichseitige Dreieck a auf den Flügeln zwischen ω und r bildet den Grenzfall, welcher dem regulären Tetraeder angehört. Unter den stumpfen ist das mit rechtem Winkel bemerkenswerth, welches einer Würfelecke



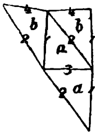
entspricht. Was innerhalb a fällt, knickt sich in den Ecken der Basis d nach Innen, was herausfällt nach Außen.

3. Die 2 + 2**flächigen Tetraide** sind gleichschenklich und ungleichseitig. Die

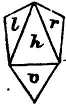


gleichschenklichen gehören dem zweigliedrigen Systeme, und kommen von der **geraden rhombischen Säule**, sind also links l wie rechts r, und vorn ν wie hinten h. Von ihnen kommen das Oblongoktaeder und Zwillinge. Die

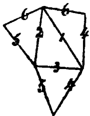
ungleichseitigen gehören dem 2 + 1gliedrigen Systeme und kommen von der **schiefen Oblongsäule.** Wie bei den gleichflächig-zweigliedrigen sind die Seiten des geknickten Dreieckes im Netz auch halbirt, aber die Summe der Seitenwinkel in den Ecken beträgt mehr oder weniger als 180°, obwohl Gleichheit zufällig möglich ist. Es ist doppelpaarig und erzeugt das 2 + 1flächige monokline Oktaid, welches, wie sein Tetraid, viererlei Kanten hat und ebenfalls doppelpaarig ist.



4. Das 2+1+1**flächige Tetraid** entsteht aus der schiefen Rhombsäule, es hat noch zwei gleichschenkliche aber ungleiche Dreiecke νh, weil es dem 2 + 1gliedrigen Systeme angehörend vorn ν anders als hinten h sein muß, während die Dreiecke links und rechts rl ungleichschenklich aber congruent (paarig) bleiben. Es erzeugt das schiefe Oblongoktaeder, und dient zur Zwillingsbildung. Endlich restirt noch



5. das **ungleichflächige Tetraid** aus der schiefen Rhomboidsäule des 1gliedrigen Systems. Hier sind alle Dreiecke nicht blos ungleichseitig, sondern auch unter einander ungleich. Das einzige Gesetz ist, daß die Seiten, mit welchen je zwei Dreiecke zusammenstoßen, gleich sein müssen, woher die sechserlei Kanten entstehen. Es ist das allgemeinste Tetraid, aus welchem die andern hervorgehen.



Die drei **unsymmetrischen** Tetraide mit ungleichseitigen Dreiecken zerfallen daher in:

a) **gleichflächige**, Repräsentant des **Zweigliedrigen** Systems;

b) **halbgleichflächige**, die sich in 2 + 2 Flächen, d. h. augitartige Doppelpaare zerlegen, Repräsentant des **Zwei und eingliedrigen** Systems;

c) **ungleichflächige**, Repräsentant des **Eingliedrigen** Systems.

Allen dreien fehlt jede Spur von Symmetrie, und sie tragen schon äußerlich Rechts und Links (Bild und Spiegelbild) zur Schau. Diesen stehen nun

die fünf **symmetrischen** gegenüber, welche nur innerlich Rechts und Links verrathen, was sofort zur Anschauung kommt, wenn man die drei Flügel des Netzes statt nach oben nach unten kehrt (links macht). Wir bringen mit dieser Manipulation zu gleicher Zeit den Zwilling zu

Stande, welcher die Basis zweier umgekehrter Individuen gemein hat. Hier kann das Umkehren, wie bei einem linken und rechten Handschuh als Umkrempeln gedacht werden. Zu gleicher Zeit sind es die besten systematischen Körper, aus deren Dreiecken ich sofort das Maximum gleicher Glieder ablese: denn wenn wir uns der Platonischen Knickung pag. 5 erinnern, so können auf einem gleichseitigen Dreiecke sechs congruente Dreiecke sich erheben, auf einem gleichschenklichen nur zwei, da ich es blos nach der Höhe in gleiche Hälften zerlegen kann:

1) **reguläres** Tetraid, schlechthin Tetraeder genannt, aus dem Würfel geschnitten, mit vier gleichseitigen Dreiecken, muß darnach 4 . 6 = 24 = 2 . 12 gleiche Glieder haben, also **zwölfpaarig** sein;

2) **viergliedriges** Tetraid, aus der Quadratsäule geschnitten, mit vier gleichschenklichen Dreiecken, muß 4 . 2 = 8 gleiche Glieder haben, also **vierpaarig** sein;

3) **dreigliedriges** Tetraid, aus dem Rhomboeder geschnitten, mit einem gleichseitigen und drei congruenten gleichschenklichen Dreiecken, muß sowohl nach diesen als nach jenem 3 . 2 = 6 gleiche Glieder haben, also **dreipaarig** sein;

4) **zweigliedriges** Tetraid, aus der geraden Rhombsäule geschnitten, mit 2 + 2 gleichschenklichen Dreiecken, muß nach beiden 2 . 2 = 4 gleiche Glieder haben, also **zweipaarig** sein;

5) **zwei und eingliedriges** Tetraid, aus der schiefen Rhombsäule geschnitten, hat nur noch zweierlei gleichschenkliche und zwei congruente ungleichseitige Dreiecke, kann daher nach beiden nur noch zwei gleiche Glieder haben, also **paarig** sein.

Erst das **eingliedrige** ist völlig **unpaarig.** Nehmen wir dazu dann noch das durch den Tetraederzwilling entstehende **sechsgliedrige** System mit 2 . 3 = 6 Paaren, so fällt uns sofort die einfache Reihe

0=, 1=, 2=, 3=, 4=, 6=, 12paarig

für die Systeme in die Augen, würde man die Enden Unpaarig (Triklin) und Vielpaarig (Regulär) nennen, so bliebe für das zwei= und ein=gliedrige der passende Name **Paarig**, welchem dann zwei=, drei=, vier= und sechspaarig sich äußerst klar anschlössen. Die Axen derselben ergeben sich aus den Kanten der zugehörigen Hexaide, wie wir unten sehen werden. Allein man kann nun selbst wieder alle diese

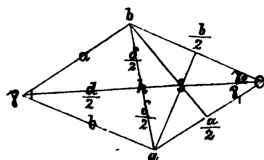
Tetraide als drei Axen abc ansehen, welche von der vierten Ebene in a : b : c geschnitten werden. Keppler pag. 6 nannte das Tetraeder prophetisch coelebs, denn es steht vereinsamt zwischen den Krystallen, und von ihm gehen alle feste Bestimmungen aus. Das Hexaid mit den Winkeln ABC und $\alpha\beta\gamma$ kann nur nach seinen sechs Winkeln bestimmt werden, wovon **drei** gegeben sein müssen, um die andern drei trigonometrisch zu finden. Jetzt kommt noch die vierte Fläche hinzu, und schneidet die drei Axen nach ihrer Länge im Verhältniß

$$a : b : c = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} : 1 = m : n : 1,$$

worin abc jedes rationale oder irrationale Maß bezeichnen. Da durch Division das Verhältniß sich nicht ändert, so müssen noch zwei Unbekannte m und n bestimmt werden, im ganzen also fünf Stücke. Habe ich in der Fläche a : b : c einen Punkt P_1, so darf ich nur $P_1 p_1$ parallel oc, d. h. der Axe der z ziehen, und in der Ebene xy das Parallelogramm op_1 mit den Seiten x und y vollenden, so ist der Punkt P_1 durch das Hexaid oP_1 im Raume gegeben. Eben so ein zweiter Punkt P_2 durch $P_2 p_2$ und op_2, und ein dritter Punkt P_3 durch $P_3 p_3$ und op_3. Drei Punkte bestimmen die Ebene, wie zwei Punkte die Linie, daher ist mit einem Hexaide der Punkt, mit zwei Hexaiden die Linie, mit drei Hexaiden die Ebene im Raume gegeben. Diese Hexaide haben alle Winkel gleich, sind nur durch die drei Kantenlängen $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ verschieden. Darauf beruht die Coordinatentheorie. Auch die Länge der trigonalen Axen $oP_1 = D_1$, $oP_2 = D_2$, $oP_3 = D_3$, die nach pag. 88 eine Function von $abc\alpha\beta\gamma$ ist, könnte benutzt werden. Graßmann nannte sie auch Träger, und gleiche Träger bedingen gleiche Flächen. Daraus könnte man die Systeme ableiten.

Wir haben an jedem Hexaide 8 **Ecktetraide** und 2 **Kerntetraide.** Jedes Ecktetraid hat zur Basis eine Fläche des Kerntetraides, man nimmt daher die drei Pyramidenkanten der Ecktetraide zu Axen. Die Sache wird sofort klar, wenn man in ein beliebiges Hexaid das Kerntetraid einträgt. Da die gegenüberliegenden Kerntetraide sich wie links und rechts verhalten, so theilen sich die 8 in 4 rechte + 4 linke. Folglich muß auch von den zugehörigen Kerntetraiden eins rechts, und eins links sein. Was man links und rechts heißen will, ist natürlich willkürlich. Der **Schwerpunkt** eines Tetraides wird gefunden, wenn man sämmtliche Seiten der Dreiecke halbirt, die drei Diagonalen zieht, und durch dieselben und die gegenüber liegenden Ecken Flächen legt. Es fällt dann jede Fläche in eine Kante und zwei Diagonalen; da wir 6 Kanten und 12 Diagonalen haben, so gibt das neue Flächen, Dodecaide $a : a : \infty a$ und Leucitoide $a : a : \frac{1}{2}a$. Es sind das die nächst einfachen Körper.

Zur **Winkelberechnung** nehmen wir ein **Ecktetraid.** In jedem



Dreieck liegt der Schwerpunkt s im Durchschnitte der Diagonalen, die sich dritteln, weil nach dem Kantenzonengesetz 2 + 1 = 3 ist. Nehmen wir den Winkel $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ scharf zwischen den Axen oa = a und ob = b an, so ist im Parallelogramm $ob\gamma a$ die

lange Diagonale $d^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos\gamma$,

kurze Diagonale $\delta^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$ pag. 87,

und im Dreieck oah

$$\frac{\delta}{2} = \sqrt{a^2 + \frac{d^2}{4} - ad \cos\gamma_1}; \text{ daraus findet sich}$$

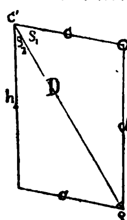
$$\cos\gamma_1 = \frac{a + b\cos\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}} = \frac{a + b\cos\gamma}{d} \text{ und}$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{b + a\cos\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}} = \frac{b + a\cos\gamma}{d}.$$

Für $\gamma = 90^0$ wird $\cos\gamma = 0$, folglich

$$\cos\gamma_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ und } \cos\gamma_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ziehen wir von der aufrecht gedachten pyramidalen Endecke nach dem Schwerpunkte der Basis, so ist die Linie $\frac{1}{3}D$. Nehmen wir diese als Axe, so gelangen wir zu den drei- und einaxigen Systemen, so daß schon im Tetraide, gleichsam wie im Keime, die drei- und vierseitige Stellung verborgen liegt. Wollen wir den Winkel des Trägers D gegen die Kanten und Flächen finden, so machen wir uns blos einen Hauptschnitt durch Axe c und die zwischen den Axen ab gelegene Diagonale, und nennen die Winkel $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$, so ist



$$d^2 = c^2 + D^2 - 2cD\cos\varrho_1$$

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma = c^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma$$
$$+ 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha - 2cD\cos\varrho_1$$

$$2cD\cos\varrho_1 = 2c^2 + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\varrho_1 = \frac{c + a\cos\beta + b\cos\alpha}{D}.$$

Ebenso ist auf der andern Seite

$$c^2 = d^2 + D^2 - 2dD\cos\varrho_2,\ 2dD\cos\varrho_2 = d^2 + D^2 - c^2$$

$$2dD\cos\varrho_2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma + a^2 + b^2 + c^2$$
$$+ 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha - c^2$$

$$2dD\cos\varrho_2 = 2d^2 + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\varrho_2 = \frac{d^2 + ac\cos\beta + bc\cos\alpha}{dD}.$$

Für den **Würfel** ist $\alpha = \beta = 90^0$, $D = \sqrt{3}$, $d = \sqrt{2}$, folglich
$\cos\varrho_1 = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \ldots 54^0\ 44'\ 8''$, $\cos\varrho_2 = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \ldots 35^0\ 15'\ 52''$.

Kalkspathrhomboeder. Endkante 105 . 5; Flächenwinkel $\alpha = \beta = \gamma = 101 . 55$; die Kantenlängen $a = b = c = 1$ gesetzt, wird nach pag. 88

$$D = \sqrt{3 - 6\cos\alpha} = \sqrt{1{,}761} = 1{,}327,\ \lg D = 0{,}12288.$$

Es gilt für die einzige Hauptaxe das negative Zeichen, weil α stumpf ist. Für die andern drei gleichen trigonalen Axen ist daher

$$D_{,} = \sqrt{3 + 2\cos\alpha} = \sqrt{3{,}413} = 1{,}847,\ \lg D_{,} = 0{,}26657.$$

Die kürzern Flächendiagonalen

$$d = \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} = \sqrt{1{,}588} = 1{,}2598, \; \lg d = 0{,}10029.$$

Die längern Flächendiagonalen

$$\delta = \sqrt{2 + 2 \cos \alpha} = \sqrt{2{,}413} - 1{,}5534, \; \lg \delta = 0{,}19128.$$

Winkel c gegen die Hauptaxe

$$\cos \varrho_1 = \frac{1 - 2 \cos \alpha}{D} = \frac{0{,}588}{0{,}327} \ldots . \; 63 \,.\, 45.$$

$$\cos \varrho_2 = \frac{d^2 - 2 \cos \alpha}{dD} = 45 \,.\, 24, \; \varrho_1 + \varrho_2 = 109^0\, 9' \text{ pag. } 88.$$

Die trigonalen Axen D, machen in den Seitenecken mit Kanten und Flächen

$$\cos \varrho_3 = \frac{1 + 2 \cos \alpha}{D,} = \frac{1{,}433}{1{,}847} \ldots 40^0\, 7'',$$

$$\cos \varrho_4 = \frac{d^2 + 2 \cos \alpha}{dD,} \ldots 30^0\, 44', \; \varrho = \varrho_3 + \varrho_4 = 70^0\, 51'.$$

Feldspath. Hendyoeder PTT. Herr v. Kokscharow (Materialien Miner. Rußlands 1867 V. pag. 129) fand am Adular Säule

$$T/T = C = 118^0\, 47', \; P/T = A = 112^0\, 12'\, 40''.$$

Daraus ergeben sich die den Kanten AAC gegenüberliegenden Seiten $\gamma = 113^0\, 16'\, 10''$ und $\alpha = 103^0\, 58'\, 41''$.

Setzen wir die Längen der beiden gleichen Hendyoederkanten A = A = 1, so findet sich nach pag. 87 im Medianschnitte die schiefe Diagonale

$$d = \sqrt{1 + 1 - 2 \cos \gamma} = \sqrt{1{,}209} = 1{,}0995;$$

die zweite quer dagegen stehende der Weiß'schen Axe b entsprechende Diagonale

$$\delta = \sqrt{1 + 1 + 2 \cos \gamma} = \sqrt{2{,}791} = 1{,}67.$$

$$\mathrm{l}d = 0{,}04121, \; \mathrm{l}\delta = 0{,}22271.$$

Die Neigung von Kante C gegen Diagonale d in der Schiefendfläche

$$\cos \varrho = \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{2 - 2 \cos \gamma}} = 116^0\, 3',$$

oder das Supplement P/C = 63° 57'.

$$\mathrm{l} \cos \alpha = 9{,}38300, \text{ num. } 0{,}24165;$$

$$\mathrm{l} \cos \gamma = 9{,}59715, \text{ num. } 0{,}3955.$$

Die Diagonale d auf Schiefendfläche P ist unabhängig von der Länge der Kante C des Hexaides, da ihre Mittellage durch die Symmetrie von P gegeben ist. Um nun die Basis y im hintern Ecktetraide zu bestimmen, müssen wir noch den Winkel von y zur Fläche P oder T messen. Wählen wir P, so ist in der Verticalzone

$$P/y = 99^0\, 42'\, 16'', \text{ folglich Supplement } y/d = 80 \,.\, 17 \,.\, 44.$$

Es war aber hinten P/C = d/C = 63 . 56 . 46, folglich

$$C/y = 180 - (80 \,.\, 17 \,.\, 44 + 63 \,.\, 56 \,.\, 46) = 35^0\, 45'\, 30''.$$

7*

Das gibt

$$C = \frac{\frac{1}{2}d \,.\, \sin 80 \,.\, 18}{\sin 35 \,.\, 45} = \sqrt{0,86}$$

$$lC = 9,96724, \text{ num. } 0,927.$$

Also verhält sich $A : A : C = 1 : 1 : 0,927$, was vom Rhomboeder $1 : 1 : 1$ nur wenig abweicht. Rechnen wir dann weiter, so sind auf den Säulenflächen T die Diagonalen

$$d_1 = \sqrt{1 + C^2 + 2C \cos \alpha} = \sqrt{2,308};$$
$$\delta_1 = \sqrt{1 + C^2 - 2C \cos \alpha} = \sqrt{1,412}.$$

$C \cos \alpha = 0,224$. Die Diagonalen lassen sich nicht verwechseln, da die größere den stumpfen α gegenüber $+ 2C \cos \alpha$ haben muß.

$$D_1^2 = 2A^2 + C^2 - 2A^2 \cos \gamma - 4AC \cos \alpha$$
$$= 2 + 0,86 - 0,791 - 0,896 = 1,173$$
$$D_2^2 = 2A^2 + C^2 - 2A^2 \cos \gamma + 4AC \cos \alpha$$
$$= 2 + 0,86 - 0,791 + 0,896 = 2,965$$
$$D_3^2 = 2A^2 + C^2 + 2A^2 \cos \gamma + o$$
$$= 2 + 0,86 + 0,791 + 0 = 3,651$$
$$D_4^2 = 2A^2 + C^2 + 2A^2 \cos \gamma + 0$$
$$= 2 + 0,86 + 0,791 + 0 = 3,651$$

Zur Controle findet sich die Summe der vier Quadrate $= 11,44$

$$d^2 + \delta^2 = 1,209 + 2,791 = 4,000 = 4A^2,$$
$$d_1^2 + \delta_1^2 = 2,308 + 1,412 = 3,720 = 2A^2 + 2\,C^2,$$
$$d^2 + 2d_1^2 + \delta^2 + 2\delta_1^2 = 11,44.$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{1 + C \cos \alpha}{\sqrt{1 + C^2 + 2C \cos \alpha}} = \frac{1,224}{\sqrt{2,308}} \,.. \; 36^0\, 19',$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{C + \cos \alpha}{\sqrt{1 + C^2 + 2C \cos \alpha}} = \frac{1,1686}{\sqrt{2,308}} \,.. \; 39^0\, 42',$$

giltig für den scharfen Winkel, daher $\alpha_1 + \alpha_2 = 76^0\, 1'$, das Supplement zu $\alpha = 103^0\, 59'$.

Im stumpfen Winkel ist

$$\cos \alpha_1 = \frac{1 - C \cos \alpha}{\sqrt{1 + C^2 - 2C \cos \alpha}} = \frac{0,776}{\sqrt{1,412}} \ldots 49^0\, 13',$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{C - \cos \alpha}{\sqrt{1 + C^2 - 2C \cos \alpha}} = \frac{0,6854}{\sqrt{1,412}} \ldots 54^0\, 46'.$$

$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha = 103^0\, 59'$, der größern Axe A liegt auch der größere Winkel gegenüber, wornach man sich leicht orientiren kann.

$$\cos \varrho_1 = \frac{C - 2 \cos \alpha}{D,} = \frac{0,444}{\sqrt{1,173}} \ldots 65^0\, 47',$$

$$\cos \varrho_2 = \frac{d^2 - 2C \cos \alpha}{dD,} = \frac{0,761}{d\sqrt{1,173}} \ldots 50^0\, 16',$$

$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 = 116^0\, 3'$. So können wir mit Leichtigkeit auf

bequeme Weise alle möglichen Winkel der Hexaidlinien sammt dem Ecktetraide finden.

Gewöhnlich läßt man C als Hauptaxe, führt aber statt A und A die Diagonalen d und δ ein. Nach obigen haben wir

$$d : \delta : C = a : b : c = 1{,}0995 : 1{,}67 : 0{,}927 = 1{,}186 : 1{,}8 : 1.$$

Schiefe der Axen $a/c = 63^0\ 57'$.

Das Verhältniß bleibt gleich, wenn wir die Axen durch den Schwerpunkt ziehen, wo sie sich halbiren. Es gienge dann Fläche

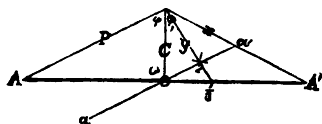
$$y = A : A : C \text{ von } \tfrac{1}{2}d : C = \tfrac{1}{2}a : c = a : 2c;$$
$$x = a : c \text{ von } 2A : 2A : C = A : A : \tfrac{1}{2}C,$$

wie man sich am Hendyoeder leicht klar macht. Naumann setzt unser

$$a : b : c = b : c : a = 1 : 1{,}519 : 0{,}843.$$

Kokscharow weicht davon nochmals ab, und setzt unser

$$a : b : c = b : c : a = 1{,}1875 : 1{,}80058 : 1.$$



Um nun zu den Weiß'schen ursprünglich angenommenen Axen zu kommen, müssen wir die neue Axenlinie AA' so durch den Schwerpunkt o legen, daß

$$P = A : C \text{ und } x = A' : C$$

wird, dann bleiben Axe c und b noch wie vorhin, nur die neue Axe A wird nach dem Rechnungssatze des Vierzonenkörpers pag. 89 gefunden:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{2}{\operatorname{ctg} \varphi_1 - \operatorname{ctg} \varphi} = \frac{2}{\operatorname{ctg} 65 \,.\, 47 - \operatorname{ctg} 63 \,.\, 57} = 88^0\ 53'.$$

Da der Ausdruck negativ ist, so liegt der stumpfe Winkel $\omega = 91^0\ 7'$ auf der Vorderseite.

Den Winkel $\varphi_1 = x/c$ finden wir nach der bekannten Formel (Dr. Kroll, Grundriß der Mathematik für Gymnasien. Eisleben 1839 pag. 277):

$$\operatorname{ctg} \varphi_1 = \frac{\mu}{a \,.\, \sin \omega} - \operatorname{ctg} \omega = \frac{1}{a \sin \omega} - \operatorname{ctg} \omega$$

giltig für eine Fläche $\frac{a}{\mu} : c$, weil $c = 1$ und $x = a : c$ ist.

Diesen Weg der Berechnung schreibt uns gleichsam die Natur vor. Denn bei den Systemen mit paarigen und unpaarigen Flächen pag. 84 greift man gern nach einem ausgedehnten Hexaide. Ist das nach zwei oder drei Winkelmessungen erkannt, so muß man dann noch zu irgend einem Ecktetraide schreiten. Die **Kerntetraide** aus den Basen von vier Ecktetraiden gebildet führen uns zur Rechnung der

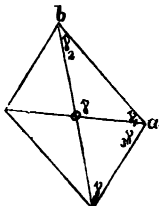
Oktaide $a : b : c$. Darin werden die Kanten des zugehörigen Hexaides zu Axen des Oktaides, und alle drei halbiren sich im Mittelpunkte desselben. Die Kanten des Oktaides stimmen daher mit den halben Diagonalen d der Hexaidflächen, und die Quadrate der sechs Kanten müssen der vierfachen Summe der Axenquadrate gleich sein:

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

Man wird die Oktaidkanten immer so ordnen, daß

$$d_1 = a : b = a' : b'; \; d_2 = a : b' = a' : b;$$
$$d_3 = a : c = a' : c'; \; d_4 = a : c' = a' : c;$$
$$d_5 = b : c = b' : c'; \; d_6 = b : c' = b' : c.$$

Die Winkel, welche diese Kanten in den Hauptschnitten mit der Axe bilden, sind in den Formeln für $\gamma_1 \gamma_2$ pag. 98 zwar schon gefunden, doch drücken wir sie jetzt bequemer in den neuen Axenelementen aus. In nebenstehendem Basalschnitt verhält sich:



$$\sin \gamma_1 : b = \sin \gamma_2 : a = \sin (\gamma + \gamma_1) : a$$
$$a \sin \gamma_1 = b \sin (\gamma + \gamma_1) = b (\sin \gamma \cos \gamma_1 + \cos \gamma \sin \gamma_1)$$
$$\frac{a}{b} = \sin \gamma \operatorname{ctg} \gamma_1 + \cos \gamma. \quad \text{Daher}$$

im Dreieck aob ... $\operatorname{ctg} \gamma_1 = \dfrac{a}{b \sin \gamma} - \operatorname{ctg} \gamma;$

$$\operatorname{ctg} \gamma_2 = \frac{b}{a \sin \gamma} - \operatorname{ctg} \gamma.$$

im Dreieck aoc ... $\operatorname{ctg} \beta_1 = \dfrac{a}{c \sin \beta} - \operatorname{ctg} \beta;$

$$\operatorname{ctg} \beta_2 = \frac{c}{a \sin \beta} - \operatorname{ctg} \beta.$$

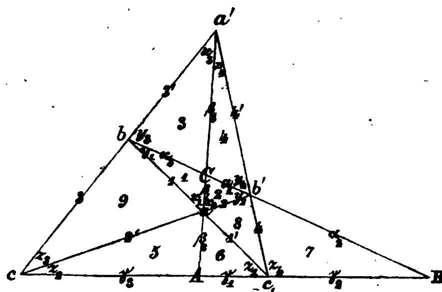
im Dreieck boc ... $\operatorname{ctg} \alpha_1 = \dfrac{b}{c \sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha;$

$$\operatorname{ctg} \alpha_2 = \frac{c}{b \sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha.$$

Ist $\gamma = 90^0$, so wird $\operatorname{ctg} \gamma = 0$, $\sin \gamma = 1$, und

$$\operatorname{ctg} \gamma_1 = \frac{\cos \gamma_1}{\sin \gamma_1} = \frac{a}{b} \text{ etc.}$$

Für die trigonometrische Berechnung der Kanten nimmt man am bequemsten eine sogenannte Viertelpyramide, wobei man die Winkel der Axenebenen ABC nennt, und die Kanten, welche die Axenebene mit der Oktaidfläche der Viertelpyramide macht xyz. Zu dem Ende entwirft man sich als Schema eine allgemeine Projection des Oktaides 1234 und des Hexaides abc. Heißen also die Hexaidkanten ABC, so ergeben sich die xyz von selbst. Wir dürfen dabei ganz von der Anschauung des Krystalles absehen, und lediglich uns an das Projectionsbild halten: Fläche 1 1' schneidet Linie aa' in x_1, Linie bb' in y_1, Linie cc, in z_1;



Fläche 2 2′ schneidet Linie aa′ in x_2, Linie bb′ in y_2, Linie cc, in z_2 ꝛc. Auf der Linie des Hauptschnittes bb′ liegen die Seitenwinkel $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, wovon $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha =$ dem Winkel zwischen den Axen bc sind; auf Linie aa′ liegen $\beta_1\beta_2\beta_3$, wovon $\beta_1 + \beta_2 = \beta =$ dem Winkel zwischen den Axen ac sind; auf Linie cc, liegen $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, wovon $\gamma_1+\gamma_2=\gamma$ = dem Winkel zwischen den Axen ab sind. In jedem Hauptschnitte bekommen wir am Krystall viererlei Winkel $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, wovon der vierte in unserer Figur fehlt, weil $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 180^0 = 2$ R sind, wie obiger Basalschnitt zeigte. Folglich findet sich der vierte γ_4 durch einfache Addition und Subtraction. Ebenso ist $\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 180^0$. Alles das geht für Sachverständige so klar aus der Figur hervor, daß es weiter keiner Worte bedarf. Haben wir also von den 12 Winkeln ($\alpha\beta\gamma$) der drei Hauptschnitte 9 berechnet, so müssen die drei übrigen sich durch Summation ergeben.

In den sieben Triangeln Nro. 1 bis Nro. 7 kenne ich je zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, sie werden also alle auf die gleiche Weise berechnet:

$$\text{1stes Dreieck}\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x_1 + y_1) = \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_3 - \beta_1)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha_3 + \beta_1)}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x_1 - y_1) = \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_3 - \beta_1)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha_3 - \beta_1)}\ \text{etc.}$$

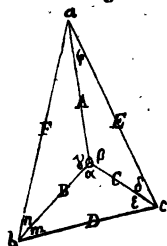
Es bleiben dann noch die Seiten 1—4, die sich durch die Formel

$$\sin(1) = \frac{\sin C \sin\beta_1}{\sin y_1},\ \sin(2) = \frac{\sin C \sin\beta_1}{\sin y_2}\ \text{etc.}$$

ergeben. Damit sind zugleich die Zwischendreiecke Nro. 8 und Nro. 9 bekannt.

Axenberechnung.

Die Hexaide geben die Axen des Tetraides, und damit des Oktaides. Wenn daher eine vierte Fläche irgend eine Hexaidecke abstumpft, so sind damit alle nöthigen Unbekannten eines Systems gegeben. Im **Eingliedrigen Systeme** sei an einer doppelschiefen Rhomboidsäule die Ecke ABC durch die Basis abc, welche einer Tetraidfläche entspricht, abgestumpft. Dann sind oa = a, ob = b, oc = c die drei Axen. Unbekannte Kantenwinkel sind überhaupt sechs ABCDEF vorhanden. Fünf pag. 91 genügen zur Bestimmung. Ich kann also sechs Mal fünf herausgreifen, je nachdem ich einen Buchstaben weglasse:



ABCDE ABCDF ABCEF ABDEF ACDEF BCDEF.

Wählen wir den ersten Fall, wo ABCDE durch Messung gegeben sind, so ist

in Ecke ABC:

$$\cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(A + C - B) \cdot \cos \frac{1}{2}(A + B - C)}{\sin B \cdot \sin C}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(B + C - A) \cdot \cos \frac{1}{2}(B + A - C)}{\sin A \cdot \sin C}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(C + B - A) \cdot \cos \frac{1}{2}(C + A - B)}{\sin A \cdot \sin B}};$$

in Ecke CDE:

$$\cos \tfrac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(D + E - C) \cdot \cos \frac{1}{2}(D + C - E)}{\sin C \cdot \sin E}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(E + D - C) \cdot \cos \frac{1}{2}(E + C - D)}{\sin C \cdot \sin D}}.$$

Fünf Sinus und sechs Cosinus müssen aufgeschlagen werden, um die nöthigen fünf Seiten $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ zu finden. Setze ich dann weiter Axe $c = 1$, so ist in der Seite BCD

$$1 : \sin(\alpha + \varepsilon) = b : \sin \varepsilon,\ b = \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\alpha + \varepsilon)};$$

in der Seite ACE

$$1 : \sin(\beta + \delta) = a : \sin \delta,\ a = \frac{\sin \delta}{\sin(\beta + \delta)}.$$

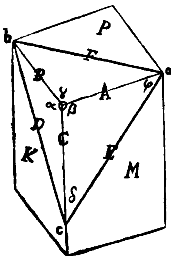
Darnach sind die fünf nothwendigen Axenelemente $\alpha\beta\gamma$ab bekannt. Im **Zweiundeingliedrigen Systeme** wird die Rechnung schon viel einfacher, namentlich wenn wir von der

a) **schiefen Oblongsäule** ausgehen, dann ist $A = C = 90°$, d. h. nach III, pag. 85

$\cos \alpha = \cos \gamma = 0$, also $\alpha = \gamma = 90°$; und $\cos \beta = \cos B$, d. h. die Schiefe der Axen a/c unmittelbar durch B gegeben. Das monokline System der Ebenen fällt mit dem monoklinen der Axen zusammen. Zur Messung bleiben nur noch BDEF übrig, woraus ich viermal drei (BDE, BDF, BEF, DEF) auswählen kann. Sehen wir von F zunächst ab, so bleiben zur Bestimmung nur noch nothwendig:

$$\cos \delta = \frac{\cos D}{\sin E} \text{ und } \cos \varepsilon = \frac{\cos E}{\sin D},$$

die sich aus dem bei C rechtwinklichen Dreiecke CDE ergeben. Da $\alpha = 90°$, so ist Axe



$$b = tg\varepsilon \text{ und } a = \frac{\sin \delta}{\sin(\beta + \delta)}.$$

Beispiel. Feldspath. Hätten wir zur Pyramide MPk und zur Basis o (Dreieck abc) gewählt, so ergibt die Messung:

P/k = 63.56 = B; M/o = 63.8 = E; k/o = 68.32 = D

P/k = β = 63.56 ist die Schiefe der Axen a/c.

$$
\begin{array}{rll}
 & l\cos D = 9{,}56343 & l\sin D = 9{,}96878 \\
\beta = 63.56 & l\sin E = 9{,}95039 & l\cos E = 9{,}65506 \\
\delta = 65.47 & l\cos\delta = 9{,}61304 & l\cos\varepsilon = 9{,}68628 \\
\beta+\delta = 129.43 & l\sin\delta = 9{,}95999 & \mathrm{tg}\,\varepsilon = 10{,}25535 \;..\; \text{num. } 1{,}800 = b. \\
50.17 & l\sin(\beta+\delta) = 9{,}88605 & \\
 & l\,a = 10{,}07394 & \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \text{num. } 1{,}185 = a.
\end{array}
$$

Die sichere Führung der Rechnung wird erleichtert, wenn man sich an einem Holzblock die Buchstaben einzeichnet.

Mit BDE ist BFE vollständig symmetrisch, es ist nur F mit D zu vertauschen. Im **dritten** Falle, wo DEF gegeben, habe ich die Ecken a und c. In Ecke c sind wieder

$$\cos D = \cos\delta \,.\, \sin E,\ \cos E = \cos\varepsilon \,.\, \sin D,\ \text{und}\ \mathrm{tg}\,\varepsilon = b.$$

In Ecke a muß noch $\cos F = \cos\varphi \sin E$ zu Hilfe genommen werden, dann ist die Schiefe der Axen $a/c = \beta = 180^0 - (\varphi + \delta)$, und Axe $a = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}$. Endlich der letzte Fall BDF gibt zwar die Axenschiefe $\beta = B$ wieder unmittelbar, allein da wir nur die einzige schiefwinkliche Ecke b haben, so müssen die allgemeinen Formeln

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}m = \sqrt{\frac{-\cos S \,.\, \cos(S-F)}{\cos(S-B) \,.\, \cos(S-D)}}$$

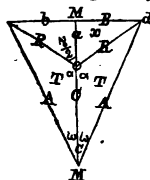
$$\text{und}\ \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}n = \sqrt{\frac{-\cos S \,.\, \cos(S-D)}{\cos(S-B) \,.\, \cos(S-F)}}$$

wieder in Anwendung gebracht werden, um dann sofort, da $\alpha = \gamma = 90^0$, die Axen

$$b = \mathrm{ctg}\, m \ \text{und}\ a = b\,\mathrm{tg}\, n$$

zu erlangen. Das

b) **Hendyoeder** führt etwas weitläufiger zum Ziele. Gehen wir beim Feldspath auf der Hinterseite von TTx aus, und nehmen $y = \frac{1}{3}a' : c : \infty b$ (Ebene des Papieres) als Basis, so reduciren sich die nothwendigen fünf Winkel AARRC auf drei Unbekannte ARC. Halbiren wir durch M die bilaterale Pyramide, so haben wir unten in der rechtwinklichen Ecke MTy die Seite



$$(1)\ \cos\omega = \mathrm{ctg}\, A \,.\, \mathrm{ctg}\, \tfrac{1}{2}C.$$

Im rechtwinklichen Dreiecke MxT wird

$$(2)\ \cos\alpha = \mathrm{ctg}\, R \,.\, \mathrm{ctg}\, \tfrac{1}{2}C;$$

$$(3)\ \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin R},$$

$$(4)\ \cos r = \frac{\cos R}{\sin\frac{1}{2}C},$$

unter r, welches der Kante R gegenüberliegt, die Schiefe verstanden, unter welcher sich die Axen a/c schneiden. Im schiefwinklichen Dreiecke ACR ist für c = 1 und od = d

$$d : \sin\omega = 1 : \sin(\alpha + \omega),\ d = \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha+\omega)}.$$

Daraus folgt sofort im rechtwinklichen Dreiecke abR,

$$a = d \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma \,.\, \sin\omega}{\sin(\alpha+\omega)},$$

$$b = d \,.\, \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma \,.\, \sin\omega}{(\sin\alpha+\omega)}.$$

Beispiel. Feldspath in der Säule T/T nach G. Rose $\frac{1}{2}C = 59^0\ 24'$; $T/x = R = 110^0\ 40'$; der scharfe Winkel $T/y = A = 45^0\ 41'$. Zur Controle diene $y/x = B = 30^0\ 3'$.

45.41	l ctg A = 9,98964		
59.24	l ctg ½C = 9,77188	. . l cos = 9,70675	. . l sin = 9,93487
	l cos ω = 9,76152		
69.20	l ctg R = 9,57657	. . l sin = 9,97111	. . l cos = 9,54769
102.53	l cos α = 9,34845	l cos ½γ = 9,73564	l cos r = 9,61282
			. . 65⁰ 48′ = r
54.44	l sin ω = 9,91194	stumpfer Axenwinkel 114⁰ 12′.	
22.23	l sin (α+ω) = 9,58070		
	l d = 10,33124		
	l cos ½γ = 9,73564		
	l a = 10,06688	. . num. 1,1665 . . = a	
	l sin ½γ = 9,92384		
	l b = 10,25508	. . num. 1,7992 . . = b.	

Im verticalen Dreiecke coa, welches der Medianebene M entspricht, liegt der eben gefundene Winkel $c/a = 114^0\ 12'$, sammt $y/x = B = 30^0\ 3'$. Axe $c = 1$, $a = 1{,}1665$. Aus zwei Seiten ac und dem eingeschlossenen Winkel können wir die Winkel B und D an der Basis finden, weil

$$\frac{a - c}{a + c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(D - B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(D + B)}.$$

D + B = 180 — 114 . 12 = 65 . 48, daher

tg ½(D + B) =	9,81086	. . . . 32 . 54
0,1665 l (a — c) =	9,22141	
	9,03227	
2,1665 l (a + c) =	10,33576	
l tg ½(D — B) =	8,69651	. . . . . 2 . 51

$\frac{1}{2}(D + B) - \frac{1}{2}(D - B) = B = 30^0\ 3'$.

Hätte ich BCR gemessen, so würde die Rechnung noch einfacher.



Ich fände dann die Axenschiefe a/c mittelst $\cos r = \frac{\cos R}{\sin\frac{1}{2}C}$. Da B = 30 . 3 = x/y, so gibt nebenstehende Construction y/c = 35 . 45, und a : sin 35 . 45 = 1 : sin 30 . 3. Wir sind vorhin pag. 99 von der Vorderseite P des Feldspathes ausge=

gangen, jetzt von der Hinterseite x; b ist in beiden gleich geblieben, aber a und die Schiefe der Axen haben sich ändern müssen. Gingen wir in der schiefen Oblongsäule von **Mxk** und n als Basis aus, so käme a = 1,166 und b = 0,899. Der Grund davon ist, daß

$$n = a : \tfrac{1}{2}b : c$$ hat, denn 2 . 0,899 ist 1,798 = b.

Etwas anderes ist es dann wieder, die Weiß'schen Axen zu finden, wie wir oben pag. 101 gesehen haben.

Im **zweigliedrigen** Systeme behandeln wir auch zunächst die

a) **gerade Oblongsäule**, welche alle drei Winkel $A = B = C = 90^0$ hat. Es bleiben zwar noch, wie bei der schiefen Oblongsäule, die beiden Formeln

$$\cos \delta = \frac{\cos D}{\sin E} \text{ und } \cos \varepsilon = \frac{\cos E}{\sin D},$$

allein bei $\alpha = \beta = 90^0$ werden die beiden Axen für c = 1

$$a = \operatorname{tg} \delta \text{ und } b = \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Beispiel. Schwefel. Bildet häufig einfache Rhombenoktaeder, woran

Kante b : c = 84 . 58, die Hälfte = D = 42 . 29;
Kante a : c = 106 . 38, die Hälfte = E = 53 . 19.

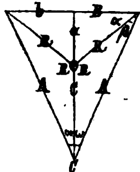
$$\begin{array}{ll} l \cos D = 9{,}86775 & l \sin D = 9{,}82954 \\ l \sin E = 9{,}90415 & l \cos E = 9{,}77626 \\ \hline \cos \delta = 9{,}96360 & \cos \varepsilon = 9{,}94672 \end{array}$$

$l \operatorname{tg} \delta = 9{,}6306 \ldots\ldots = l\, a$, $l \operatorname{tg} \varepsilon = 9{,}7221 \ldots\ldots = l\, b$.

Die Ecke der geraden Oblongsäule steckt hier im Mittelpunkte des Oktaeders, da seine Seiten mit den Basalschnitten zusammenfallen, und die Oktaederfläche außen die Basis des Schnittes bildet.

Auch die

b) **gerade Rhombsäule** führt leicht zum Ziele, wenn wir Kanten B und C messen. Es ist dabei gleichgültig, ob wir die stumpfe oder scharfe Ecke wählen, die Axen ab vertauschen sich dann blos. Unsere 2 + 1flächige Pyramide mit den vier rechten Winkeln R (2 Kanten und 2 Seiten) steht auf gleichschenklicher Basis, welche einem Oblongoktaeder a : c : ∞b entspricht. Da die obere Pyramidenfläche (Geradendfläche der Säule) senkrecht gegen Kante C steht, so ist der ebene Winkel $\gamma = C$ durch die Diagonale a halbirt, folglich $\alpha = 90^0 - \frac{1}{2}C$. Die rechtwinkliche Ecke $B\alpha\beta$ gibt daher sofort



$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} B \,.\, \sin \alpha.$$

Für Axe c = 1 haben wir in dem rechtwinklichen ebenen Dreiecke ACR die

$$\text{Kantenlänge } R = \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} B \,.\, \sin \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} B}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} B}{\cos \frac{1}{2}C}.$$

$$R \,.\, \cos \tfrac{1}{2}C = \operatorname{ctg} B = a.$$

Wir können dieses einfache Resultat gleich ablesen, denn Axe c steht

senkrecht gegen Axe a, und B ist der Winkel, welchen die Basis der Pyramide mit a macht. Die zweite Axe

$$b = R \,.\, \sin \tfrac{1}{2}C = \operatorname{ctg} B \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C.$$

Beispiel. Schwerspath nach Kupffer die Säule M = a : b : ∞c = 101° 40′, und das Oblongoktaeder o = b : c : ∞a = 105° 24′ in Axe b. Da dieses auf die scharfe Säulenkante von 78° 20′ = C aufgesetzt ist, so wird $\tfrac{1}{2}$C = 39° 10′, die Neigung von o gegen b = 52° 42′ = B. Die Axen a und b müssen hier also vertauscht werden, und wir erlangen

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} B &= 9{,}88184 \;\ldots\ldots\; \text{num. } 0{,}762 = b. \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C &= 9{,}91095 \\ \hline & \quad 9{,}79279 \;\ldots\ldots\; \text{num. } 0{,}621 = a. \end{aligned}$$

Messung AB gibt in der rechtwinklichen Ecke ARB

$$\cos \alpha = \frac{\cos A}{\sin B} \text{ und } \cos \beta = \frac{\cos B}{\sin A}.$$

Für Axe c = 1 war aber im Dreiecke ACR Kantenlänge od = d = ctg β. Folglich

$$\text{Axe } a = d \,.\, \sin \alpha = \operatorname{ctg} \beta \,.\, \sin \alpha.$$
$$\text{Axe } b = d \,.\, \cos \alpha = \operatorname{ctg} \beta \,.\, \cos \alpha.$$

Schwerspath hat Kante M/o = 120° 10′, gibt den scharfen Winkel A = 59° 50′.

$$\begin{aligned} \cos A &= 9{,}70115 & \sin A &= 9{,}93680 \\ \sin B &= 9{,}90062 & \cos B &= 9{,}78246 \\ \hline \cos \alpha &= 9{,}80053 & \cos \beta &= 9{,}84566 \\ \operatorname{ctg} \beta &= 9{,}99241 \\ \hline \lg a &= 9{,}79294 \;\ldots\ldots\; \text{num. } 0{,}621 = a. \\ \sin \alpha &= 9{,}88947 \\ \hline \lg b &= 9{,}88188 \;\ldots\ldots\; \text{num. } 0{,}762 = b. \end{aligned}$$

Endlich Messung AC. Weil hier in der untern Ecke AAC auch die Winkel ω = ω werden, so könnte man direct

$$\cos \omega = \frac{\cos A + \cos A \cos C}{\sin A \,.\, \sin C} = \frac{\cos A\,(1 + \cos C)}{\sin A \,.\, \sin C}$$
$$= \frac{2 \cos \tfrac{1}{2}C^2 \operatorname{ctg} A}{\sin C}$$

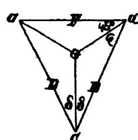
finden, allein es ist besser, den Winkel C durch die Medianebene zu halbiren. Dann bekommen wir zwei congruente rechtwinkliche Dreiecke, worin

$$\cos \omega = \operatorname{ctg} A \,.\, \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}C.$$

Im rechtwinklichen Dreiecke ACR ist Kantenlänge R = tg ω. Daraus ergibt sich im Dreiecke abR

$$\text{Axe } b = \sin \tfrac{1}{2}C \,.\, \operatorname{tg} \omega \text{ und Axe } a = \cos \tfrac{1}{2}C \,.\, \operatorname{tg} \omega.$$

Im **viergliedrigen Systeme**, wo uns die Quadratsäule zu Gebote steht, wird diese Basis wieder gleichschenklich, und damit die rechtwink-



liche Pyramide 2+1flächig: A=B pag. 104 bedingt jetzt die beiden gleichen Seitenaxen aa; D = E die gleichen Seiten $\delta = \varepsilon$. Wir brauchen nur noch den einen Winkel D oder F zu messen.

Bei bekanntem D bekommen wir in der rechtwinklichen Ecke c

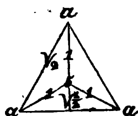
$$\cos \delta = \text{ctg}\, D \text{ und } \text{tg}\, \delta = a.$$

Bei bekanntem F benutzt man die 45° im gleichschenklichen Dreiecke aoa, daher in der rechtwinklichen Ecke a

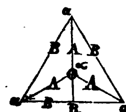
$$\text{tg}\, \varphi = \text{tg}\, . F . \sin 45^0 = \text{tg}\, F . \sqrt{2}.$$

$$\text{Axe } a = \text{ct}\, \varphi = \text{ctg}\, F . \sqrt{2}.$$

Im **regulären Systeme** mit **Würfel** bedarf es daher gar keiner Messung, denn die Basis bildet ein gleichseitiges Dreieck aaa. Daher müssen die Pyramidenkanten alle gleich lang sein, und können = 1 gesetzt werden. Dann ist die Basalseite aa = $\sqrt{2}$. Das Perpendikel vom Gipfel o auf die Basalseite $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Folglich machen die Pyramidenflächen (Würfel) mit der Basalfläche (Oktaeder) sin : cos = $1 : \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} : 1$, d. h. tg = $\sqrt{2}$. Die Würfelkante zur Oktaederfläche umgekehrt sin : cos = $\sqrt{\frac{1}{2}} : 1$, d. h. tg = $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Kurz alles ist ohne Messung bekannt.



Das **dreigliedrige System** mit **Rhomboeder** bedarf auch nur, wie das viergliedrige, der Messung **eines** Winkels. Denn wir haben drei gleich lange und gleich schiefe Kanten oa und α. Wir dürfen daher nur in der ersten besten allgemeinen Formel



$$\cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(A + C - B) . \cos \frac{1}{2}(A + B - C)}{\sin B . \sin C}}$$

Winkel A = B = C setzen, so kommt

$$\cos \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\cos \frac{1}{2}A}{\sin A}.$$

Oder wie wir oben pag. 87 schon sahen

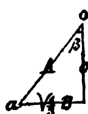
$$\text{tg}\, \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{-\cos \frac{3}{2}A}{\cos \frac{1}{2}A}}.$$

Die drei Kantenlängen A = 1 und die drei Winkel α reichen zur Bestimmung hin. Wir hätten dann vollständige Analogie mit dem regulären Systeme, nur daß die gleichen Axen sich unter gleichen schiefen Winkeln schneiden. Man zieht es jedoch bei uns vor, die drei gleichen Basallinien B, welche sich unter 60° schneiden, als Seitenaxenrichtungen zu wählen, und als Hauptaxe das Perpendikel c, welches von der Spitze o zum Mittelpunkte der Basis geht. Denken wir uns jetzt die Pyramide durch drei Medianebenen halbirt, wie aoR eine vorstellt, so entstehen um die Axe c im Wirtel sechs congruente körperliche Dreiecke, die in

der Mitte der Pyramidalflächen ihren rechten Winkel R, und in der Axe c Kanten von 60° haben. Die Neigung der Kante oa zur Axe c heiße β, so ist

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{A}{2} \,.\, \operatorname{tg}\beta.$$

Das Perpendikel aR in der Basis (vom Gipfel a nach R gezogen) ist $\sqrt{B^2 - \frac{1}{4}B^2} = \frac{1}{2}B\sqrt{3}$, wenn wir unter B die Seitenlänge aa verstehen. Dasselbe wird durch den Mittelpunkt des Dreiecks gedrittelt. Machen wir uns daher einen Aufriß durch den Theil $\frac{2}{3}$, so ist



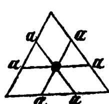
$$B\sqrt{\tfrac{1}{3}} : \sin\beta = c : \cos\beta, \text{ gibt für } c = 1$$
$$\operatorname{tg}\beta = B\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Dieses in vorige Formel gesetzt, kommt

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{A}{2} \,.\, B\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sqrt{\frac{-\cos\frac{3}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A}}.$$

$$B = aa = \sqrt{3}\sqrt{\frac{-\cos\frac{3}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A^3}}.$$

Man pflegt nun aber in dem regulären Dreieck die Axen a so zu wählen, daß $a = \frac{1}{3}B$ wird, folglich $a\sqrt{3} = B\sqrt{\frac{1}{3}} = b$, wie nebenstehende Figur veranschaulicht, worin die Axen vom Mittelpunkte o ausstrahlen, und die den Rhomboederflächen $a : a : \infty a : c$ entsprechenden Seiten B dreimal länger sind als a, daher das neue



$$a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{3}{2}A}{3\cos\frac{1}{2}A^3}};$$

Axe b entspricht dabei der langen Zwischenaxe.

Man kann auch von den 60°, welche die sechs Dreiecke im Wirtel der Axe c haben, Nutzen ziehen. Dann ist

$$\cos\beta = \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}A\,\operatorname{ctg}60^0 = \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}A\sqrt{0{,}333\ldots}$$
$$a = \operatorname{tg}\beta\sqrt{0{,}333\ldots}$$

Denn im Aufriß oac verhält sich $b : \sin\beta = 1 : \cos\beta$.

Hätten wir den Kantenwinkel B gemessen, welcher durch die Neigung der Rhomboeder- gegen die Geradendfläche entsteht, und nennen die Neigung der Linie oa gegen die Basis β', so ist in der Ecke a

$$\operatorname{tg}B = \operatorname{tg}\beta' \,.\, \sin 30^0 = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\beta.$$

Nun verhält sich aber im ebenen Dreieck coa die Seite

$$c : \sin\beta' = b : \cos\beta',\ b = a\sqrt{3} \text{ und } c = 1,$$

folglich

$$a\sqrt{3} = \operatorname{ctg}\beta = 2\operatorname{ctg}B,\ a = \operatorname{ctg}B\sqrt{\tfrac{4}{3}}.$$

Die Oktaide

kann man auch selbstständig auffassen, wie ich das, Methode der Kryst. 1840 pag. 136, nach den basischen Schnitten gethan habe. Man kommt

hier zwar auf große Mengen, die man sich leicht durch Netze klar macht, aber über die sechs Systeme nicht hinaus. Wie es viererlei Säulen gab, eben so viel Basalschnitte sind möglich.

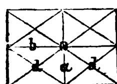
Die Axen bestimmt, wie wir schon pag. 76 bei den Säulen sahen, im Basalschnitte

Nr. 1 das Quadrat, gleich und rechtwinklich;
Nr. 2 das Oblongum, gleich und schiefwinklich;
Nr. 3 der Rhombus, ungleich und rechtwinklich;
Nr. 4 das Rhomboid, ungleich und schiefwinklich.

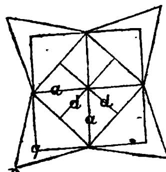
Zu je drei mit oder ohne Wiederholung combinirt gelange ich zu allen Oktaiden, nur sind viele davon nicht möglich, weil die drei Axen schon aus zwei Basalschnitten folgen. So ist z. B. ein Oktaid 1 2 3 d. h. mit Quadrat, Oblongum und Rhombus undenkbar, weil 1 das Quadrat a = b und 2 das Oblongum b = c voraussetzt, also müssen alle drei a=b=c einander gleich, und können nicht mehr ungleich sein, wie Rhombus 3 verlangen würde.

Symmetrie kann nach den Flächen, nach den Kanten und nach beiden, den Flächen und Kanten Statt finden. Flächensymmetrie findet auf dem Oblongum (2), Kantensymmetrie auf dem Rhombus (3), Flächen-Kantensymmetrie auf dem Quadrat (1) Statt. Die **Flächensymmetrie** liefert uns das wichtigste Merkmal der Oktaide, und den sichersten Einblick in die Systeme. Da nur gleichseitige und gleichschenkliche Dreiecke symmetrisch halbirt werden können, so sind die ungleichseitigen blos noch der Kantensymmetrie fähig, d. h. die Kantenwinkel werden durch die Basalschnitte halbirt. Zeichnen wir zu dem Ende als Basalschnitt ein

Oblongum hin, und setzen im Mittelpunkte o die aufrechte Axe c senkrecht ein, so haben wir **zweigliedrige** Ordnung; tritt Axe c in den Symmetrieebenen aoc oder boc aus ihrer senkrechten Stellung heraus, d. h. bewegen wir sie in einer dieser Ebenen, so kommt 2 + 1gliedrige Ordnung; in jeder beliebigen Zwischenrichtung, namentlich auch in den Diagonalebenen doc, tritt eingliedrige Ordnung auf. Schreiben wir dann in das Oblongum einen Rhombus, so gelangen wir mit denselben Stiftbewegungen zu denselben Systemen, aber statt der Flächen- mit Kantensymmetrie. Hätten wir für das Oblongum ein Quadrat gewählt, so würde der eingeschriebene Rhombus wieder ein Quadrat. Daher muß hier das Zusammenfallen von Flächen- und Kantensymmetrie möglich sein.



I. **Quadrat** als Basis gibt die rechtwinklichen Seitenaxen a = b, während die aufrechte c den Seitenaxen gleich oder ungleich sein kann. Ist c = a, so entsteht ein

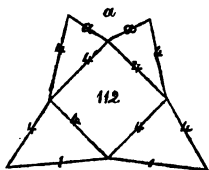


1. **Reguläres Oktaeder** 111 mit drei congruenten Quadraten in den Basalschnitten. Daher alle Axen a : a : a rechtwinklich und gleich; alle Kanten gleich,

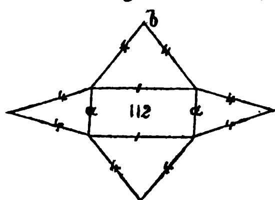
folglich die Dreiecke gleichseitig, wie das Netz r zeigt. Es ist nicht blos einmal, sondern dreimal symmetrisch nach Flächen und Kanten, d. h. regulär, indem sich jene Flächen-Kantensymmetrie an allen Ecken wiederholt. Der Stift c muß in diesem Falle senkrecht und gleich den Seitenaxen sein.

Bewegen wir Stift c = a im Basalschnitte ac, so kommt das

schiefe Quadratoktaeder 112 mit Kantensymmetrie und 2 + 2 gleichschenklichen Flächen, die sich um den Stift zwei und eingliedrig gruppiren, vorn ein Paar und hinten ein Paar; die gleichen Zahlen bedeuten die gleichen Kantenlängen. Der Mediansschnitt in den Axen ac bildet das Oblongum Nr. 2. Legen wir nun dieses gleiche Oktaeder 112 auf seinen oblongen Basalschnitt, so bilden alle gleichen Kanten 4 die vierseitige 2 + 2flächige Pyramide darauf, wir bekommen also ein



Oblongoktaeder besonderer Art, worin alle Eckaxen gleich lang sind. Was also in der ersten Lage auf dem quadratischen Basalschnitte 2+1gliedrig erschien, ist jetzt in der That zweigliedrig. Da Nr. 1 rechtwinkliche und gleiche Axen, Nr. 2 aber schiefwinkliche und gleiche bekunden, so haben wir ein gleichaxiges monoklines System erlangt.



Bewegen wir Stift c = a in der Symmetrieebene dc, so kommt ebenfalls ein schiefes Quadratoktaeder 122, aber mit Flächensymmetrie und 2 ungleichschenklichen und 1+1 gleichschenklichen Dreiecken, die sich um den Stift c 2 + 1gliedrig gruppiren. Legen wir das Oktaeder auf eines seiner Oblongen 2, so haben wir statt 2gliedriger jetzt 1gliedrige Ordnung. Wie wir auch jedenfalls nicht über das eingliedrige bei jeder andern Zwischenbewegung des Stiftes hinausgelangen.

2. **Viergliedriges Oktaeder** q 133 entsteht, wenn c größer oder kleiner als a ist. Wir haben darin ein Quadrat a, daher Quadratoktaeder genannt, und zwei congruente Rhomben 3 = 3, weshalb es 2 + 1axig a : a : c wird. Die Kanten zerlegen sich in 4 + 2, d. h. vier gleiche End- und zwei gleiche Seitenkanten. Nur noch in einer Stellung (Endecke) symmetrisch nach Flächen und Kanten; in den Seitenecken existirt nur Kantensymmetrie von 2gliedriger Ordnung.

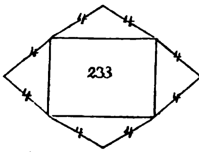
Wir haben auf diese Weise mit gleichen Axen aaa viererlei Oktaeder construirt: reguläre 111, 2gliedrige 112, 2 + 1gliedrige 122, 1gliedrige 122·; worin der Punkt bedeutet, daß 2 von 2· in Beziehung auf ihre Axenwinkel verschieden sind.

Mit ungleicher Axe aac bekommen wir ganz auf dieselbe Weise nur dreierlei: bei aufrechter Stellung zunächst obiges viergliedrige 133. Durch Bewegung des Stiftes c in cd das 2 + 1gliedrige Oktaeder 134

symmetrisch nach den Ebenen, wie 122; Bewegung in ca das 2 + 1-gliedrige Oktaeder 134 symmetrisch nach den Kanten, wie 112. Zuletzt durch Zwischenbewegung des eingliedrigen Oktaeders 144. Wenn wir nun bedenken, daß im regulären auch die dreigliedrige Ordnung steckt, sobald wir das Oktaeder auf die Fläche legen, so ist mit dieser Darstellung schon wieder die ganze Uebersicht gewonnen.

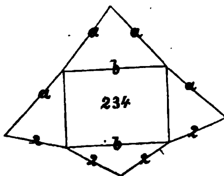
II. Auf dem **Oblongum** pag. 111 fallen nun bei ganz gleicher Behandlung die Systeme von höherer Symmetrie weg, falls wir die Länge der Axen gehörig berücksichtigen.

3. **Zweigliedriges Oktaeder** 233 (Oblongoktaeder) entsteht, wenn wir auf dem oblongen Basalschnitte 2 den Stift c senkrecht im Mittelpunkte erheben. Wir haben 2+2 gleichschenkliche Dreiecke; 4 + 1 + 1 Kanten, d. h. vier gleiche Endkanten, die Schenkel, und zwei ungleiche Seitenkanten, die Basen der Dreiecke. Wir können dreierlei rechtwinkliche Axen abc wählen, oder zweierlei ddc, müssen dann aber den schiefen Winkel d/d mit in Rechnung nehmen, so daß dadurch keine Unbekannte gewonnen wird. Im Allgemeinen hat dieses Oblongoktaeder 233, d. h. ein Oblongum mit zwei congruenten Rhomben, so lange c von d verschieden ist. Sobald wir aber c = d setzen, geht 233 in 211 über. Aber zum regulären 111 und viergliedrigen Oktaeder 133 gelangen wir in keiner Weise mehr. Das ist jetzt abgeschnitten.



Da die Endkanten zwischen 90° (Oblongsäule) und 180° (Endfläche) liegen und die Seitenkanten sogar zwischen 0° und 180°, so ist eine Länge der Axe c möglich, wo die vier Endkanten einer der Seitenkanten gleich werden, dann haben wir ein Oktaeder mit fünf gleichen Kanten, ohne daß die sechste gleich ist (Methode Krystall. pag. 153 Gruppe 10 ist daher nicht richtig). Erst beim Quadrate gibt dieser Fall das reguläre Oktaeder.

4. **2+1gliedriges Oktaeder** 234, das man, gegenüber dem vorigen geraden, **schiefes Oblongoktaeder** nennen könnte, entsteht durch Bewegung des Stiftes in der Ebene ac (oder bc), dann bleiben die Dreiecke vorn und hinten noch symmetrisch, wenn auch ungleich, aber die links und rechts werden ungleichseitig. Der Krystall ist also links wie rechts, aber vorn anders als hinten. Die Endkanten zerfallen daher in 2+2, und die Seitenkanten bleiben 1 + 1.

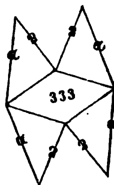


Man kann übrigens auch hier ganz so verfahren, wie beim Quadrat: d. h. wir gehen, wie dort von 111, so hier von 222 aus, das gibt das

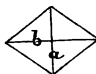
5. **3gliedrige Oktaeder** 222, worin alle drei Oblongen einander

congruent sind, d. h. alle drei Axen ddd gleich lang und gleich schief gegen einander. Wir kommen darauf, wenn wir Stift c = d machen, und nun c zwischen dem stumpfen Winkel in ac, oder zwischen dem scharfen in b so weit bewegen, bis der Winkel cod = dod wird: dort über a haben wir dann ein stumpfes, hier über b ein scharfes Rhomboeder mit Geradendfläche, die c : d : d zum Ausdruck hat. Nur diese Geradendfläche ist noch gleichseitig, die drei übrigen sind gleichschenklich, und unter einander congruent. Daraus ergibt sich dann 222· als schiefes Oblongoktaeder, und 22·2·· als eingliedriges von selbst. Doch will ich hier nicht erschöpfen, sondern nur andeuten. Symmetrische Flächen erreichen wir blos mit Quadrat und Oblongum; mit Rhombus und Rhomboid bleiben alle Flächen unsymmetrisch, nur die Kanten können sich noch paarig ordnen. Wir sehen das gleich

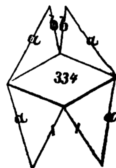
III. auf dem **Rhombus** 333, wo der Stift c, verschieden von a und b, sich senkrecht im Mittelpunkte erhebt. Wegen seiner drei verschieden rhombischen Basalschnitte heißt es **Rhombenoktaeder** (gerades) mit vier congruenten ungleichseitigen Dreiecken, 2 + 2 + 2 Kanten, drei verschiedenen Ecken. Wie das gerade Oblongoktaeder nach den Flächen, so ist dieses nach den Kanten links wie rechts und hinten wie vorn. Sie stehen zu einander in derselben Wechselbeziehung wie Rhomb- und Oblongsäule. Denken wir uns jetzt statt der offenen Säulen den senkrechten Stift c, und legen die



Flächen a : b : c, a : c : ∞b und b : c : ∞a, so müssen die Kanten a : c und b : c die gleichschenklichen Dreiecke berühren und halbiren. Beim viergliedrigen Oktaeder entsteht dadurch, weil a = b ist, wieder ein viergliedriges Oktaeder mit congruenten gleichschenklichen Dreiecken. Durch Bewegung des Stiftes in der Ebene ac entsteht daher das



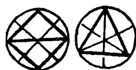
schiefe Rhombenoktaeder 334, welches noch zwei Rhomben 33 zu Basalschnitten hat, während das dritte 4 im Medianschnitte ein Rhomboid bildet. Es besteht aus zwei augitartigen Paaren, ein vorderes und ein hinteres, die sich gerade so zur schiefen Oblongsäule verhalten, wie das gerade Rhombenoktaeder zur geraden Oblongsäule. Zuletzt bleibt für das



6) **eingliedrige Oktaeder**, Rhomboidoktaeder, hauptsächlich der Fall 444, wo alle Basalschnitte Rhomboide, folglich alle Axen schief und ungleich sind. Wie acht Hexaide, so haben wir auch acht systematische Oktaide, je eins für regulär, 4gl., 3gl. und 1gl.; je zwei für 2gl. und 2 + 1gl.

Die **ganze Systematik** läuft auf circuläre und elliptische Symmetrie hinaus, wobei der Kreis den drei obern, die Ellipse den drei untern Systemen angehört. Der

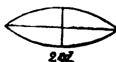
Kreis tritt drei- (3gl.) und viertheilig (4gl.) auf; die **Ellipse** vier- (2gl.), zwei- (2 + 1gl.) und ungleichtheilig (1gl.).



Zweiecke sind durch große Kreise auf der Kugel möglich. Wenn man diese statt der Ellipse nimmt, so haben wir **gleichseitige** mit zwei Medianschnitten (quer und senkrecht) für das 2gliedrige; **ungleichseitige** mit einem Medianschnitt für das 2 + 1gliedrige; dann bleibt für das 1gliedrige System noch das ungleichseitige ohne Medianschnitt.







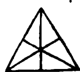
Dreiecke gibt es drei:

1) **Gleichseitige Dreiecke**, um die ein Kreis geschrieben werden kann. Dieselben sind nur möglich im

regulären Systeme in vier Stellungen, da ich das Tetraeder vier Mal auf eine andere Fläche legen kann; im

dreigliedrigen Systeme in einer Stellung, da das dreigliedrige Tetraid nur ein gleichseitiges Dreieck hat. Darnach ist das Regulärsystem vierfach rhomboedrisch.

Im gleichseitigen Dreiecke sind aber durch



dreifache Knickung sechs congruente ungleichseitige Dreiecke möglich. Daher bringt es das rhomboedrische System zu 6, das reguläre zu 4 . 6 = 24 gleichen Krystallräumen.

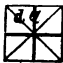
2. **Gleichschenkliche Dreiecke**, um welche eine Ellipse geschrieben werden kann, werden schon durch Knickung bilateral, und die beiden Dreiecke sind ungleichseitig, also einer weitern symmetrischen Theilung nicht zugänglich. Lege ich daher einen Krystall auf irgend ein solches ihm zugehöriges Dreieck, so sind seine Flächen 2 + 1gliedrig geordnet: im 1gl. ist daher kein gleichschenkliches Dreieck möglich, im 2 + 1gl. sind nur vereinzelte, im 2gl. paarige, im 3gl. dreifache, im 4gl. vierfache, im regulären zwölffache vorhanden. Vergleiche hier auch die symmetrischen Tetraide pag. 95.



3. **Ungleichseitige Dreiecke** lassen sich nicht mehr in obigem Sinne knicken, sie nehmen in keiner Weise symmetrische Lage an. Sie als Einzelglieder führen uns zum Maximum gleicher Zahlen. Wenn die Parallelflächen nicht gerechnet werden, so erlangt das eingliedrige 1, das zweiundeingliedrige 2, das zweigliedrige 4, das dreigliedrige 6, das viergliedrige 8, das reguläre 24 congruente Dreiecke. Aus dem Maximum der Gleichzahl hätte die passendste Benennung hergenommen werden können, doch läßt sich das jetzt nicht mehr wohl ändern, ohne zeitweise Verwirrung anzurichten.

Vierecke erscheinen im Oktaide nur als Parallelogramme, welche man durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen kann, woraus wieder obiges Zahlenmaximum hervorgeht.

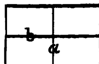
Das **Quadrat** gehört zur vierseitigen Kreisstellung, die beim 4gl. ein Mal, beim regulären drei Mal möglich ist. Darnach ist das Regulärsystem dreifach quadratisch, wie es vierfach rhomboedrisch war, was 3 + 4 = 7 mögliche Kreisstellungen gibt. An der einen Gruppe nimmt das vier-, an der andern das dreigliedrige Theil. Daher die Zweitheilung der Systeme, gleichsam in höhere und niedere Ordnung. Durch die Haupt- a und die Zwischenaxen d kommen acht ungleichseitige congruente Dreiecke zu Stande. Darauf beruht das Maximum der Zahl 8 und 8 . 3 = 24.

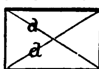


Der **Rhombus** gehört zur elliptischen Stellung, gleichsam die Grundfläche des 2gliedrigen Systems. Er wird durch zwei Diagonalen schon in vier ungleichseitige Dreiecke getheilt, repräsentirt daher die Vier. Folglich muß das Regulärsystem sechs congruente Rhomben (Granatoeder), das viergliedrige 2 (Basalschnitte), das zweigliedrige 1, das zweiundeingliedrige einen halben, das eingliedrige einen Viertel-Rhomben haben. Das **Rhomboeder** wird zwar mathematisch von Rhomben begränzt, krystallographisch sind die Rhomben aber **bilateral**, denn wenn z. B. die dicken Kanten der stumpfen Endecke, so liegen die dünnen der scharfen Seitenecke zu. Die Knickung nach a gibt daher ein Paar, aber die Knickung nach b nur Einzelflächen. Deshalb konnte auch das rhomboedrische System als dreifach 2 + 1gl. angesehen werden.

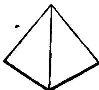


Das **Oblongum** ist krystallographisch höchstens 2 + 2seitig, und gehört dann dem zweigliedrigen. Durch Halbirung nach a und b entstehen zwar wieder vier Oblongen, aber je mit viererlei Seiten, d. h. das Maximum der Zahl. Beim Würfel gibt der Fall nur zweierlei, daher gelangt man zu acht. Durch die Diagonalen kommen 2 + 2 gleichschenkliche Dreiecke, wie sie sich in außerordentlicher Pracht bei den Frischschlacken (Hdb. Miner. pag. 266) finden. Verbände man beide Arten von Diagonalen (ab, dd), so kämen nie 8 gleiche, sondern nur 4 + 4 congruente Dreiecke. Bei dem zweiundeingliedrigen kann das Oblongum nur noch bilateral sein. Endlich bleibt dann für das eingliedrige das Rhomboid noch über.

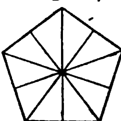




Die **Deltoide**, d. h. symmetrischen Trapezoide, bilden eine andere Abtheilung von Vierecken, wie wir sie bei den Leucitoedern haben. Sie können nur nach der Längsdiagonale geknickt zwei gleiche Glieder geben. Daher darf man gewisse 48flächner als geknickte Leucitoeder ansehen. Die unsymmetrischen **Trapezoide** sind wieder wesentlich eingliedrig, und keiner symmetrischen Theilung fähig.

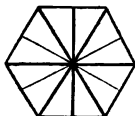


Fünfecke, gleichseitig gedacht, wie im Platonischen Dodecaeder, sind krystallographisch nicht möglich, da durch Theilung 10 congruente Dreiecke entstehen, welche 10 . 12 = 120 Flächen geben würden. Das Fünfeck, welches beim Pentagondode-



caeder des Schwefelkieses vorkommt, ist symmetrisch, kann daher nur noch halbirt werden.

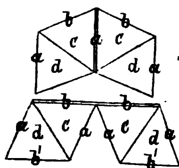
Ein **reguläres Sechseck** kommt vor, wie schon die sechsseitige Säule



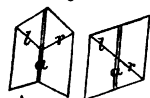
beweist. Man kann es auch als Durchwachsung zweier gleichseitiger Dreiecke betrachten, die Würfel und Gegenwürfel oder Rhomboeder und Gegenrhomboeder repräsentiren. Am Viereck können solche Durchkreuzungen nicht stattfinden, wie später aus der Deductionslehre folgt. Auf solchem Sechseck sind 12 congruente Dreiecke, also halb so viel, als im regulären Systeme möglich. Das führt uns auf das 6gliedrige System und die

Zwillinge.

Diese entstehen durch Verwachsung linker und rechter Individuen pag. 93. Es bleibt dabei ziemlich gleichgültig, ob sie blos an einander oder auch durch einander wachsen. Zum Verständniß nehme man zwei gleiche Oktaide zur Hand, denke sich dieselben in zwei Säulen (a/b, c/d)



zerlegt, die sich durchdringen, so brauchen wir nur mit Säulen zu verkehren. Haben also zwei reguläre Oktaeder die Säulenfläche a gemein, und liegen umgekehrt, so ist der Zwilling bestimmt. Wäre b gemein, d. h. spiegelte b ein, so würde das im Wesen nichts ändern, denn ich dürfte im untern Bilde nur eines gegen das andere parallel mit sich so verrücken, bis b in b′ fällt, um das obere Bild wieder zu haben. Dieses Gesetz gilt für alle Systeme, nur das eingliedrige kann wegen der absoluten Unsymmetrie nicht darunter fallen. Gewöhnlich sind die Individuen nach einer Richtung verkürzt, und es erscheint dann, als wäre das Oktaid parallel einer



Fläche a halbirt, und beide Flächen lr um 180° gegeneinander verdreht. Das sind die berühmten Hauy'schen Hemitropien, wobei a Zwillingsebene genannt wird, gegen welche die Zwillingsaxe (Drehaxe) senkrecht steht. Obgleich diese rein mathematische Definition für gewachsene Wesen sich wunderlich genug ausnimmt, so pflegt sie doch noch immer bevorzugt zu werden.

Im 1gliedrigen Systeme scheint blos ein Ausgleichungsgesetz aufzutreten, wonach linke und rechte Individuen sich so aneinander legen, daß der Unterschied zwischen Links und Rechts wieder aufgehoben wird. Weiß erklärte dieß, und einige andere Fälle (Staurolith) durch

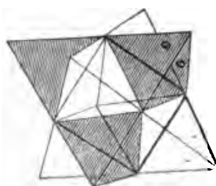
Hemiedrie (Theilflächigkeit).

Sie läßt sich am besten zur Anschauung bringen, wenn man auf eine Fläche 0 (Null) und auf die anliegenden 1 (Eins) schreibt. Wachsen nun die einen oder die andern, so kommt ein Haupt- und Gegenkörper, die sich natürlich vollständig gegen einander vertauschen. Wie wir

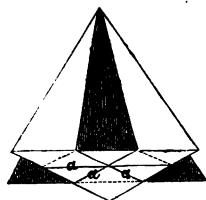
später sehen werden, kommt auf diese Weise **Tetraedrie**, **Pyritoedrie** und **Gyroedrie** zu Stande. Nur ein Fall, die Oktaeder von Zwischenstellung, wie sie im 4gliedrigen Systeme (Tungstein) so ausgezeichnet vorkommen, ist nicht darunter. Zu diesen zu gelangen, muß man die Flächen nach ihren Zonen gruppiren, und in den Zonen mit Null und Eins fortfahren, was Cycloedrie (κύκλος, Kreis) heißen könnte. Oefter fällt Cycloedrie mit einem der drei vorigen zusammen, aber nicht immer.

Tetraeder können nur auf zweierlei Weise mit einander symmetrisch verwachsen: entweder kreuzen sich alle Kanten rechtwinklich, oder nur drei Kanten eines Dreiecks unter 60°. Im

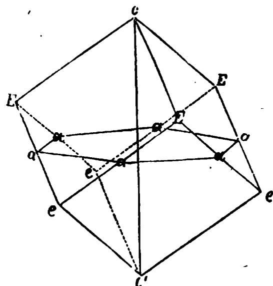
ersten Falle tritt nur das Gleichgewicht wieder ein, indem der gemeinsame Kern das ursprüngliche Oktaeder wieder hinstellt, aus welchem das dunkele und lichte Tetraeder durch Wachsen von 0 und 1 entstand. Es ist ein Herstellen des frühern Gleichgewichtes. Nur im



zweiten Falle haben wir es mit wahren Zwillingen zu thun: hier entsteht als gemeinsamer Kern eine reguläre sechsseitige Pyramide, welche sich auf der Basis eines regulären Sechsecks erhebt, dessen drei gleiche Diagonalen aaa die zugehörigen horizontalen Axen bilden. Da man nun das Tetraeder als die Endecke eines Rhomboeders betrachten kann, so leuchtet ein, daß durch die Zwillingsverwachsung des Rhomboeders ein



Dihexaeder entsteht, der Repräsentant des **sechsgliedrigen Systems**. Demselben liegen drei gleiche Horizontalaxen aaa zu Grunde, die sich unter 60° schneiden. Senkrecht dagegen steht Axe c. Sie entsprechen den vier Zonen einer regulären sechsseitigen Säule pag. 79; wie also den dreiaxigen Systemen ein Hexaid, so liegt den vieraxigen ein Vierzonenkörper zu Grunde. Sein Zeichen ist a : a : ∞a : c. Eigentlich genügen auch hier drei Ausdrücke a : a : c, denn der vierte ∞a folgt daraus durch Rechnung, da das allgemeine Zeichen nothwendig die Form



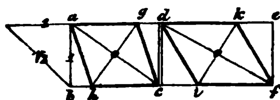
$$\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : \frac{a}{\nu - \mu} : c$$

annimmt. Die Dreiecke sind alle gleichschenklich, und daher nochmals einer Knickung fähig, wodurch das Maximum der Zahl 12 entsteht, die nach der gewöhnlichen Ableitung um eine Ecke nicht möglich ist. Das **sechsgliedrige** scheint daher als ein **dirhomboedrisches**, aus Durchwachsung zweier Rhomboeder entstandenes angesehen werden zu müssen. Es

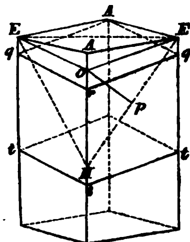
kommen zwar im regulären Systeme beim gewöhnlichen Pyramidenwürfel, Pyramidengranatoeder, Leucitoide 113 ꝛc. dihexaedrische Ecken mit sechs gleichen Kanten vor, allein eine Weiterentwickelung zur Zwölf (Discalenoeder) kann nur durch den Zwilling erklärt werden.

Verfertigung der Dihexaeder. Da man den Würfel nach einer der vier Eckaxen cc′ aufrecht gestellt als ein Rhomboeder mit je drei Endkanten cE und sechs Zickzackkanten eE ansehen kann, so darf ich nur die Zickzackkanten in dem Punkte a halbiren, und es entsteht wie bei allen Rhomboedern ein reguläres Sechseck, dessen Seiten halb so lang sind, als die Horizontaldiagonalen EE der Flächen. Ziehe ich daher oben und unten drei Mal die Fläche c : a : a, und schneide die Ecken E und e weg, so entsteht ein Dihexaeder. Wie die Würfel, so verhalten sich sämmtliche Rhomboeder, ich kann daher auch aus diesen Dihexaeder schneiden.

Verfertigung der Rhomboeder. Das Rhomboeder betrachten wir als eine schiefe Rhombsäule, deren Endkanten der Säulenkante gleich geworden sind. Um eine **geschobene Säule** möglichst vortheilhaft zu schneiden, hobelt man einen Parallelraum aefb, setzt die Dicke ab = 1, und construirt im rechtwinklichen Dreiecke 11 die Hypotenuse $\sqrt{2}$; mißt ferner das Oblongum abcd ab,



worin ad = $\sqrt{2}$, zieht die Diagonale ac, halbirt sie in o, richtet dadurch das Perpendikel gh, so ist agch ein Parallelogramm mit dem Winkel des regulären Oktaeders 1 : $\sqrt{2}$, denn die rechtwinklichen Dreiecke cad und oag haben den Winkel bei a gemein, sind daher ähnlich. Macht man weiter de = ac = $\sqrt{2}$, und errichtet in cdef das Perpendikel ik auf die Mitte von df, so entsteht aus denselben Gründen ein Parallelogramm dkfi von 1 : $\sqrt{3}$ mit 120°. Auf diese Weise kann man jeden beliebigen Winkel construiren, und zur Verfertigung der Modelle verwerthen, ohne auch nur einen unnöthigen Hobelschnitt zu machen. Dabei erhält das Modell stets den größtmöglichen Umfang. Wer mit Decimalzahlen arbeitet, muß dieselben vom Maßstabe abnehmen, und auf die Seiten des Oblongums eintragen. Wir machen nun von der Eigenschaft des Rhomboeders Gebrauch, daß eine durch die Zickzackecken gelegte Fläche EEE ein gleichseitiges Dreieck bilden muß. Nehmen wir daher für das



stumpfe Rhomboeder die lange Diagonale EE in den Zirkel, und machen EH = EE, so kann man dieses gleichseitige Dreieck EEH als die Endfläche eines Rhomboeders ansehen. Wir dürfen daher nur in der Hälfte von EH das Perpendikel po errichten, so ist o die Spitze des gesuchten Rhomboeders mit dem Endkantenwinkel der angewendeten Säule, das

Dreieck EEo gibt uns die gesuchte Schiefe an. Machen wir nun or=Ao=Eq, so ist rqAq die vollständige Schiefendfläche, rq die Länge der Rhomboederkante. Mache ich dann Hs = Ao, und ziehe durch s Parallelen mit obiger Schiefendfläche, so wird stqAqtr das gewünschte stumpfe Rhomboeder. Für das

scharfe Rhomboeder muß die kurze Diagonale AA′ in den Zirkel und AH = AA′ genommen werden, dann gibt das Perpendikel auf AH im Mittelpunkt p errichtet und bis zum Durchschnitte mit der stumpfen Kante verlängert den gesuchten Punkt o, welcher mir die Schiefe oH bestimmt. Ich darf jetzt nur die eigentliche Fläche durch E legen, indem ich Eq der oH parallel ziehe. Mache ich dann E′r = 2Aq, so ist rqEq′ die Fläche des Rhomboeders mit dem scharfen Säulenkantenwinkel in der Endkante. Eq = qr ist die Länge der Kanten, und um Eqst den Umriß der Fläche zu bekommen, macht man nur die Kanten Et = q′s′ = qs = rr′, so ist Ets′q′rqsr′ das gesuchte Rhomboeder.

Verfertigung der Oktaeder geschieht ebenfalls aus der vierseitigen Säule. Zum **regulären Oktaeder** bedarf ich der geraden rhombischen Säule von $1 : \sqrt{2}$, die den Oktaederwinkel von 109° 28′ hat. Zu dem Ende trage man die kurze Diagonale AA nach AH, mache EG = AH, halbire dieselbe in C, ziehe von C jederseits nach den vier Punkten AAHH, so entsteht das Oktaeder CAAHHC mit 12 gleichen Kanten. Denn AAHH ist ein Quadrat mit der Seite 1, während Axe CC = EE = $\sqrt{2}$ ist. Mache ich ein Rhomboeder über die scharfe Kante weg, so gibt das zwei reguläre Tetraeder in den Endkanten, während das Zwischenstück mit den Zickzackkanten auch ein reguläres Oktaeder gibt.

Viergliedrige Oktaeder werden genau auf dieselbe Weise wie das reguläre verfertigt, man braucht blos den Säulenwinkel zu ändern: ist die Seitenkante größer als ein rechter, so verfertigt man über die stumpfe Säulenkante hinweg, ist sie kleiner als ein rechter, über die scharfe, indem man die lange Diagonale EE nach EG trägt, und in der stumpfen Kante den Halbirungspunkt anbringt. Ist die Säule rechtwinklich, so kommt ein Oktaeder, woraus das Granatoeder durch Abstumpfen der Seitenecken entsteht.

Gerade Oblongoktaeder des 2gl. Systems gehen hervor, sobald man, im stumpfen oder scharfen Winkel, die abgetragene in C halbirte Linie länger oder kürzer als die Diagonalen der rhombischen Säule nimmt. In allen den Fällen über die stumpfe Kante hinweg ist cc

die Hauptaxe, welche senkrecht auf den Medianschnitt der Säule AAHH steht. Daraus leuchtet ein, wie die

schiefen Oblongoktaeder des 2 + 1gl. Systems entstehen: man darf nur die Linie EG in C ungleich theilen, aber dergestalt, daß CE links der CG rechts gleich bleibt, und nach diesen Punkten von AA und HH hinziehen. Die Axe CC steht dann in der Ebene EEGG schief gegen die Oblongbasis AAHH. Auf diese Weise sind alle Oktaeder mit bilateralen Flächen erschöpft. Es bleiben nur noch die

Oktaeder mit ungleichseitigen Dreiecken, wozu der Säule eine Schiefendfläche angelegt werden muß, natürlich so, daß dadurch kein Rhomboeder entsteht. Legen wir dann die Diagonale AA nach AH, und verfahren im Uebrigen ganz auf die gleiche Weise, so entsteht das **Rhombenoktaeder** mit lauter congruenten Dreiecken. Ist AA größer oder kleiner als AH, so entsteht das **schiefe Rhombenoktaeder** pag. 114 des 2 + 1gliedrigen Systems. Beide sind noch bilateral. Zuletzt bleibt die Säule mit doppelschiefer Endfläche über, die uns in letzter Weise das eingliedrige Rhomboidoktaeder gibt, wo von keiner Symmetrie irgendwie mehr die Rede ist.

Ein einfacherer Weg zur Beschaffung der sogenannten Grundkörper ist wohl nicht denkbar. Die Erkenntniß derselben lag für Mathematiker nahe, allein man hielt sich anfangs zu ängstlich an das Vorkommen in der Natur, und hütete sich wohl, zu „hypothetischen Flächen" seine Zuflucht zu nehmen. Prof. Bernhardi (Gehlen, Journal für Chem. Phys. Miner. 1807 Bd. V. 187), jener würdige Vorläufer von Weiß pag. 37, und diesem wohl an mathematischer Kenntniß überlegen, sagte, „wenn „es die Aufgabe wäre: man solle aus der möglichst kleinen Anzahl „möglichst einfacher Formen auf die möglichst einfache Weise alle be„stimmbaren Krystallisationen herleiten, so könnten wir mit sechs, nem„lich: 1. dem Würfel, 2. dem Rhomboeder, 3. dem Quadratoktaeder, „4. dem Rhombenoktaeder, 5. dem einfachen und 6. dem dreifachen „Rhomboidaloktaeder ausreichen." Das ist mathematisch bündig und klar, er gründet darauf hauptsächlich seine neue Bezeichnungsmethode, indem er den Ecken einen Buchstaben gibt, und darum die vier Zahlen setzt, welche das Verhältniß der Schnitte angaben. Das Symbol

10
9 A 6
5

bedeutete eine Fläche, welche die vier gleichen Endkanten im Verhältniß $\frac{1}{10} : \frac{1}{9} : \frac{1}{6} : \frac{1}{5}$ schnitt, und er bemerkte schon, daß aus je drei Nennern der vierte abgeleitet werden könne, weil die gegenüberliegenden Zahlen (9 + 6 = 10 + 5) gleiche Summen geben müßten. Es ist das unser Kantenzonengesetz. Man schritt jedoch auf diesem Wege nicht fort, sondern bevorzugte mit Recht die

Axen.

Schon derselbe Bernhardi sprach von Flächenaxen und Eckenaxen, fügt man zu diesen noch die Kantenaxen, so sind damit die drei Axensysteme gegeben, welche den Grundzahlen 3, 4, 6 entsprechen, da jedes Oktaeder 4 Flächenaxen durch den Mittelpunkt der Flächen, 6 Kantenaxen durch die Mitte der Kanten und 3 Eckenaxen durch die gegenüberliegenden Ecken gehend, in sich vereinigt. Alle strahlen vom Centrum des Körpers aus. Den Oktaederebenen gehen drei Flächen- und drei Kantenaxen parallel; in den Basalschnitten (Würfelflächen) liegen zwei Ecken- und zwei Kantenaxen; in den Medianschnitten (Granatoederflächen) zwei Flächenaxen nebst einer Kanten- und einer Eckenaxe. Ja denken wir uns einen beliebigen Strahl durch den Mittelpunkt gelegt, so schneidet derselbe die gegenüberliegenden Oktaederebenen in gleichwerthigen Punkten, welche in den congruenten Dreiecken dieselbe aber umgekehrte Lage haben. Man kann auf diese Eigenschaften Rechnungen und Combinationen gründen, allein das Wesen und die einfachste Einsicht beruht doch immer auf den drei Linien, welche im Oktaide von Ecke zu Ecke gehen, und sich im Mittelpunkte halbiren, da sie zu je zwei Diagonalen eines Parallelogrammes bilden. Daher konnte auch für die Oktaederflächen kaum ein passenderes Zeichen als a : b : c gefunden werden, welches Weiß (Abh. Berl. Akad. 1816 pag. 308) zuerst in die Wissenschaft einführte. Alle andern Symbole, soweit sie nicht unmittelbar auf diesem Grunde beruhen, sind Mißgeburten. Dabei wurde ein für alle Mal die aufrechte Axe c (Höhenaxe), die seitliche von links nach rechts gehende b (Breitenaxe), und die nach vorn gewendete a (Tiefenaxe) genannt. Es wäre vielleicht besser gewesen, Weiß hätte, um parallel den Coordinaten xyz zu bleiben, a und b mit einander vertauscht, dann wäre c die Axe der z, b der y und a der x. Jedenfalls muß bei der Rechnung diese lexicographische Correspondenz festgehalten werden, wie schon Miller gethan hat. Ich bleibe trotzdem bei der Weiß'schen Benennung stehen und bedaure, daß Naumann die aufrechte Axe a und die vordere c nannte, während auch er für die seitliche b beibehielt, was in keiner Weise eine Verbesserung war (Naumann, Lehrb. Mineral. 1828 pag. 15), um so weniger, als sein Lehrer Mohs (Grund-Riß der Mineralogie 1822 pag. 57) b und c in anderem Sinne genommen hatte, so daß folgendes bunte Schema besteht:

Weiß	a : b : c
Mohs	b : c : a
Naumann	c : b : a
Miller	b : a : c
Mathematiker	y : x : z

worin die über einander stehenden verschiedenen Buchstaben dieselben Axenrichtungen bedeuten.

Außer diesen Axenlinien hat man auch Axenebenen, die in je zwei Axenlinien fallen, und den drei Basalschnitten der Oktaeder entsprechen. Sie bilden zusammen das deducirte Hexaid, wie wir weiter unten sehen werden. Nach beiden Anschauungen, der Linien wie Ebenen, sind mathematisch nach den Axenwinkeln vier Fälle möglich:

alle drei rechtwinklich (orthometrisch);
zwei rechtwinklich und die dritte schief (monoklin);
eine rechtwinklich und zwei schief (diklin);
alle drei schief (triklin).

Nach den Axenlängen sind drei Fälle:

alle Axen gleich aaa,
zwei Axen gleich von der dritten verschieden aac,
alle drei ungleich abc.

Axenlängen mit Axenwinkeln combinirt müßten 12 Systeme geben, allein es zeigt sich, daß mit dem Eintritt schiefer Axen die Axenlänge auf die Symmetrie keinen ausschließlichen Einfluß mehr haben kann. Daher hielten Hausmann und seine Schüler (Uhde, Versuch einer genetischen Entwickelung der mechanischen Krystallisationsgesetze 1833 pag. 212) die „Arten der Krystallisationensysteme“ mit vier Abtheilungen erschöpft:

1) isometrische (gleichaxige, regul. S.);
2) monodimetrische (2 + 1axige, 4gl.);
3) trimetrische (ungleichaxige, 2gl.);
4) monotrimetrische (3 + 1axige).

Mohs sprach das nur in seiner Weise verhüllter aus (Grund = Riß Min. 1822 I pag. 90 u. 172): 1) die ungleichschenkliche=, 2) die gleichschenkliche Pyramide, 3) das Rhomboeder und 4) das Hexaeder „sind die Grundgestalten des Mineralreichs, daraus entspringen vier verschiedene Crystall=Systeme; und es kann deren nicht mehrere geben.“ Das 5te und 6te Bernhardi'sche System pag. 121 wurden von Mohs nur als Unterabtheilungen (hemi= und tetartoprismatisch) angesehen. Weiß sträubte sich sogar gegen schiefwinkliche Axen, und suchte denselben so viel als möglich auszuweichen, was ihm auch bei seinen annähernden Winkelmessungen gelang. Mohs (Grund=Riß Miner. 1824 II. 35. 69 ꝛc.) führte zwar zuerst schiefe Axen ein, aber willkürliche, ohne deren Nothwendigkeit bewiesen zu haben. Denn wer durchaus schiefe Axen will, hat beim 2 + 1gl. und 1gl. Systeme Gelegenheit genug dazu. Der Beweis der Nothwendigkeit ist nicht so leicht zu führen! Für die Feldspäthe lag der Beweis allerdings in den Messungen von G. Rose (Gilbert's Ann. 1823 Bd. 73 pag. 173), aber schon Marx (Geschichte der Crystallkunde 1825 pag. 239) fand es „auffallend, daß die neu beobachteten Flächen S. 187 nach Hauy's Methode bezeichnet sind.“ Die Rechnung mit schiefen Axen hatte eben ihre Schwierigkeiten. Erst Kupffer (Poggendorf's Ann. 1828 Bd. XIII pag. 212) zeigte, daß am Kalifeldspath vorn P/T 112° 16′ und hinten x/T 110° 40′ mache, was nothwendig

eine Schiefe der Axen a/c von 91° 10′ auf der Vorderseite bedinge. Schon Weiß pag. 47 machte dagegen allerlei triftige Einwendungen. Hr. v. Kokscharow (Materialien Min. Rußl. 1867 Bd. V pag. 151), ein anerkannter Meister in der Kunst des Winkelmessens, stellt seine Messungen mit den Rose'schen zusammen, unter 9 Winkeln stimmen 5 vollkommen, aber 4 weichen bis zu 36 Minuten ab, während nach der Rechnung der wahrscheinliche Messungsfehler der Rose'schen Winkel unter einander keine ganze Minute (0′,82) betragen kann. Es sind das Fragen, welche Mathematiker und Physiker von Fach zu entscheiden haben. Auf die Anschauung im Großen übt es nur unwesentlichen Einfluß.

Unter den Linien darf man sich das Maß wirkender Kräfte denken, deren Resultanten die Anordnung der Flächen bedingten, wie das Graßmann und Uhde schon weitläufig entwickelten. Die **Axenebenen**, welche Hr. Naumann wegen der Rechnung bevorzugte, unterscheiden sich dagegen von gewöhnlichen Flächen in keiner Weise. Nun fallen zwar für beide Anschauungen das Ortho-, Monoclino- und Triclinometrische bei den Linien wie Ebenen zusammen. Aber bei dem Diclinometrischen mit zwei schiefen Ebenen ist das nicht der Fall: ein **diklines System der Ebenen**, wie es Mitscherlich pag. 54 bei der unterschwefligsauren Kalkerde nachgewiesen haben wollte, und was lange als 7tes Mitscherlich'sches Krystallsystem figurirte, ist ein **triklines nach den Linien.** Dieser innere Widerspruch wurde schon in der „Methode der Krystallographie 1840 pag. 131" nachgewiesen. Ohnehin sind Oblongsäulen mit einer doppelschiefen Endfläche pag. 82 krystallonomisch unmöglich. Daß man in Deutschland so lange gegen das Symmetriegesetz verstoßen konnte, fällt um so mehr auf, als Hauy über das Ebenmaßgesetz der Krystallbildung (übersetzt von Hessel 1819) frühzeitig sich ausgelassen hatte; von Weiß zu geschweigen, der mit Recht nichts davon hielt. Wie denn auch in der That die Rechtwinklichkeit an genannten Krystallen nicht existirt.

Die drei Axen der Oktaide entsprechen nach ihrer Richtung den Kanten der Hexaide. Es sind daher achterlei (pag. 81) Axensysteme denkbar.

A) Nach der **Länge** zerfallen dieselben in drei Abtheilungen:

1) **Gleichaxige**, wozu **Würfel** im regulären und **Rhomboeder** im drei- und sechsgliedrigen Systeme gehören. Bei beiden sind sämmtliche Neigungswinkel gleich, dort recht-, hier schiefwinklich.

2) **Zweiundeinaxige**, wohin **Quadrat-**, **gerade** und **schiefe Rhombsäule** zählen, der Reihe nach dem vier-, zwei- und zweiundeingliedrigen Systeme angehörig. Der Ausdruck **monodimetrisch** ist daher dreideutig.

3) **Ungleichaxige**, den Rest, **gerade** und **schiefe Oblongsäule** nebst **doppelschiefer Rhomboidsäule**, einschließend, so daß die Bezeichnung **anisometrisch** auch wieder dreideutig wird.

B) Nach der **Neigung** können wir vier Abtheilungen auszeichnen:

1) **Orthometrisch**, **Würfel**, **Quadrat-** und **gerade Oblongsäule**, die

in Deutschland allgemein als die Repräsentanten des **Regulären, Vier- und Zweigliedrigen** angesehen werden. Sie nehmen die Hälfte der Systeme in Anspruch.

2) **Isoklin** ist nur das **Rhomboeder**, der Grundkörper des drei- und sechsgliedrigen Systems.

3) **Monoklin** begreift wieder zwei Hexaide, die **gerade Rhomb- und schiefe Oblongsäule**, und damit zwei Systeme, wovon jenes dem Zweigliedrigen, und dieses dem Zweiundeingliedrigen zugehört. Also auch hier ist der viel gehörte Name **zweideutig**. Auch

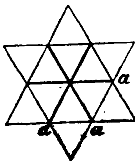
4) **Triklin** wird zweideutig, denn es umfaßt die **schiefe Rhomb- und doppelschiefe Rhomboidsäule.** Letztere das Hexaid im allgemeinsten Sinne mit triklinen Kanten und Seiten, d. h. drei ungleichen Winkeln und drei ungleichen Linien und Seiten. Werden daran zwei Linien gleich, so müssen es auch zwei Winkel und Seiten werden, ohne daß sie ihre Schiefe aufzugeben haben. Es ist das von Weiß beim Feldspath so ausgezeichnete Hendyoeder mit monoklinen Kanten und Seiten.

Ein **diklines** System erscheint auch hier nicht. Dagegen bildet **Triklin,** in Neigung und Axenlänge ungleich; **Monodiklin,** in Neigung und Axenlänge 2 + 1theilig; **Isoklin,** in Neigung und Axenlänge gleich, eine logisch geordnete Reihe, und wer Kalkspath isoklin stellt, müßte consequent auch den Feldspath 2 + 1axig nehmen, wie das Hauy bei einigen 2 + 1gliedrigen Systemen that. Feldspath, Hornblende ꝛc. haben sogar ein auffallend rhomboedrisches Ansehen. Der Vortheil zweier gleichen Axen ist gar nicht so gering anzuschlagen. Daher blieben auch die Franzosen nach dem Vorgange Hauy's noch bei der 2 + 1axigen aber monoklinen geraden Rhombsäule stehen. Man kann dann beim 2gl. wie 2 + 1gl. den einen schiefen Winkel meist unmittelbar messen. In Deutschland verwerthen wir die Monodimetrie nicht, sondern substituiren statt dessen die eingeschriebene pag. 76 gerade und schiefe Oblongsäule, wodurch sich auch dann sofort die nothwendige Hexaid-Zahl 8 bei sechs Systemen erklärt. Es gibt dann außer den **einzigen** Körpern (Würfel, Quadratsäule, Rhomboeder, Hexaid) nur noch **gerade** und **schiefe** Säulen, jene dem 2gl., diese dem 2 + 1gl. angehörig, und man kann sich der Versuchung nicht erwehren, die Reihe der 2gl., 2 + 1gl. und 1gl. Systeme als gerade, schiefe und doppelschiefe zu benennen.

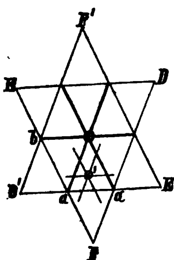
Weiß hat nun aber auch **3 + 1-Axe** eingeführt, entsprechend den Kanten des **Vierzonenkörpers** pag. 89. Allgemein fallen davon drei in die Horizontalebene, und diese entsprechen drei diagonalen Axen (Kantenaxen pag. 122), die vierte, zu den trigonalen Axen (Flächenaxen) gehörig, steht quer dagegen, und alle schneiden sich in einem Punkte. Sie bilden für sich zwar wieder ein selbstständiges Ganze, aber sind aus trigonal-digonalen Axen gemischt, und da nur eine trigonale vorhanden ist, so müssen in jedem Körper vier solcher Axensysteme möglich sein. Nun existiren fünf Vierzonenkörper pag. 89, also müssen wir auch

eben so vielerlei Axen zusammen stellen können, die aber blos drei Gruppen geben.

1) **Reguläres Sternkreuz** a : a : a, gleichwinklich. Entsteht durch Kreuzung gleichseitiger Dreiecke, auf welchen sich eine gleichkantige Pyramide erhebt. Ist nur im **regulären** und **rhomboedrischen** Systeme möglich. Drei gleiche Horizontalaxen aaa schneiden sich unter 60°, und die vierte C steht senkrecht dagegen. Es gibt die Projectionsfigur der regulären sechsseitigen Säule. Axe C muß nothwendig senkrecht stehen, denn würde sie sich gegen eine Axe neigen, so müßte sie das auch gegen die zwei andern thun. Am leichtesten macht man die Sache mit Tetraedern klar. Da es nur zwei Tetraide mit einem gleichseitigen Dreiecke pag. 96 gibt, so leuchtet daraus alles ein. Im regulären finden jedoch vier solcher Axenkreuze statt; aber im rhomboedrischen bleibt nur eins möglich, denn die drei andern gehören dem schiefen Vierzonenkörper. Diese Eindeutigkeit und Einfachheit kommt der Anschauung sehr zu Hilfe, daher vertauscht man sie auch nur ungern gegen die isoklinen Axen. Im regulären Systeme verhält sich a : c = $\sqrt{2} : \sqrt{3}$.



2) **Symmetrisches Sternkreuz** a : a : b, zwei- und einwinkelig. Entsteht durch Kreuzung gleichschenklicher Dreiecke, die sich in Oktaedern gegenüberliegen, und so längs der Dodecaidkante bewegt werden, daß ihre Schwerpunkte, durch welche die Dodecaidkante geht, zusammenfallen. Daher bleiben in der Horizontalebene nur zwei Axen und zwei Winkel gleich. Die aufrechte Axe C erhebt sich schief aus dem Mittelpunkte o in der Medianebene FCF′. Das Sternkreuz in Verbindung mit der schiefen Axe C gibt uns die Projection eines **schiefen Vierzonenkörpers.** Fällen wir in der Medianebene ein Perpendikel Co′, und rücken in deren Fußpunkt o′ die drei Horizontalaxen aab parallel mit sich selbst, so können wir diese zwar als neue Axen betrachten, allein ihre Schnitte mit den Flächen des schiefen Dihexaeders stehen unter einander in irrationalem Verhältniß. Dennoch ist dieser Punkt von Wichtigkeit, da er den Fußpunkt der Zwillingsaxe bildet, um welche das eine Stück 180° gedreht ist.



Der Einfachheit wegen denken wir uns statt der Oktaide ihre Tetraide. Dann sind alle symmetrischen Tetraide mit einem oder mehreren gleichschenklichen Dreiecken solcher Zwillingsstellung fähig, und verhalten sich folgendermaßen:

1) Das **viergliedrige System** hat vier gleiche symmetrische Sternkreuze, in allen ist

CD = CE = DF = EF und CF = DE.

Um das einzusehen, dürfen wir uns nur auf dem Dreiecke DEF

eine schiefe dreiseitige Pyramide denken, mit dem Gipfel C nach oben und vorn gekehrt. Was von dem einen Dreiecke DEF, gilt auch von dem Dreiecke D'E'F', nur daß in der Zwillingsstellung sich der Gipfel C' eben so nach hinten kehrt, wie C nach vorn.

2) Das **dreigliedrige** System hat drei gleiche symmetrische Sternkreuze. In allen ist:

CD = CE = DE und CF = DF = EF.

Denn jene drei Linien entsprechen der gleichseitigen Basis, und diese der Pyramide, wenn man in den Tetraiden die gleichschenklichen Dreiecke sich kreuzen läßt. Die Kreuzung der gleichseitigen Dreiecke gab ein reguläres Sternkreuz.

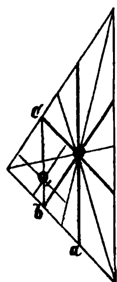
3) Das **zweigliedrige** System hat 2 + 2 gleiche symmetrische Sternkreuze, entsprechend den 2 + 2 gleichschenklichen Dreiecken sowohl im Tetraeder als Oktaeder. In allen ist noch wie bei viergliedrigen

CD = CE = DF = EF, aber CF ungleich DE.

4) Das **zwei und eingliedrige** System hat 1 + 1 ungleiche symmetrische Sternkreuze. In beiden ist:

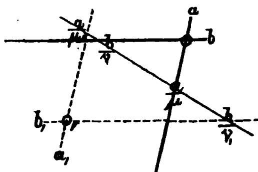
CD = CE; DF = EF und CF ungleich DE.

3) **Unsymmetrisches Sternkreuz** a : b : c, ungleichwinklich. Entsteht durch Kreuzung ungleichseitiger Dreiecke. Man darf zu dem Ende nur den Schwerpunkt o durch Halbirung der Seiten suchen, und durch denselben die abc respective den Seiten parallel ziehen. Die Diagonalen von den Ecken nach den gegenüberliegenden Seiten-Mittelpunkten gezogen, entsprechen dann den Zwischenaxen. Von Symmetrie ist hier nirgends mehr die Rede. Auch die Axe C erhebt sich schief und unsymmetrisch, d. h. macht nach keiner Richtung hin rechte Winkel. Fälle ich ein Perpendikel nach o,, so kann ich zwar ebenfalls das Sternkreuz hineinrücken, allein es scheint in diesem Falle kein Zwilling zu entstehen. Das zweigliedrige Tetraeder, was zum Rhombenoktaeder gehört, gibt vier solcher gleichen Sternkreuze; das zwei und eingliedrige vom schiefen Oblongoktaeder hat außer den symmetrischen noch zwei gleiche unsymmetrische; das 2 + 1-gliedrige vom schiefen Rhombenoktaeder hat 2 + 2, und das eingliedrige lauter unsymmetrische Sternkreuze. Ueberhaupt gilt die einfache Regel, **gleiche Flächen haben gleiche Sternkreuze.**



Bewege ich zwei gleiche aber beliebige Axenkreuze parallel mit sich auseinander, so muß eine Ebene $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi}$ beide Kreuze unter denselben Verhältnissen schneiden.

Wir brauchen uns diesen wichtigen Satz nur in **einer** Axenebene ab klar zu machen, denn was für eine gilt, gilt auch für die übrigen.



Haben wir an den Axen ab im Mittelpunkt o den Schnitt $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$, so trifft derselbe die durch den Punkt o, gelegten Axen a,b, in $\frac{a}{\mu_,} : \frac{b}{\nu_,}$. Da nun diese Linie $\frac{a}{\mu_,} \frac{a}{\mu} \frac{b}{\nu} \frac{b}{\nu_,}$ beiden Kreuzen gemein ist, a der a, und b der b, parallel geht, so muß wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke sich $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} = \frac{a}{\mu_,} : \frac{b}{\nu_,}$ verhalten. Das neue Axenkreuz wird also in derselben Proportion geschnitten. Und auf diese Proportion kommt es nur an, nicht auf die absolute Länge. Der Krystallograph muß sich überhaupt alles in der Bewegung denken. An einem Würfel bietet jede der acht Ecken ein Axenkreuz, und alle diese acht Axenkreuze laufen einander parallel, wird davon nun eine in dem Verhältniß a : a : a d. h. in der Gleichheit geschnitten, so alle. Was vom Würfel, das gilt vom Rhomboeder, ja von jedem beliebigen Hexaide. Insofern verhalten sich alle Systeme gleich.

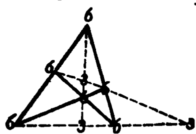
Bei den 3 + 1 Axen genügen ebenfalls drei Linien, die nicht in einer Ebene liegen, die 4te wird immer durch einfache Addition oder Subtraction nach dem Kantenzonengesetze gefunden. Denn haben wir $c : \frac{a}{2} : \frac{a}{5}$, so hat die dritte der horizontalen Axen, wenn sie außen liegt, $2 - 5 = 3$, also $\frac{a}{2} : \frac{a}{5} : \frac{a}{3}$; wenn sie aber dazwischen liegt, $5 + 2$ also $\frac{a}{2} : \frac{a}{7} : \frac{a}{5}$. Der Vierzonenkörper, d. h. eine sechsseitige Säule mit Endfläche, bietet uns 12 Ecken, d. h. 12 parallele Axenkreuze, wo nur allemal die mittlere von den Horizontalen fehlt, die sich einfach durch Addition der Nenner findet, wenn der Ausdruck zuvor auf reine Bruchform mit dem Zähler 1 gebracht ist. Wird nun eine dieser Ecken in beliebiger Weise abgestumpft, z. B. in $c : \frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu + \nu} : \frac{a}{\nu}$, so müssen alle übrigen 11 Axenkreuze gehörig verlängert unter dem gleichen Verhältniß geschnitten werden. Daher konnten wir oben den Axenmittelpunkt o, beliebig verrücken, ohne daß die Flächenzeichen alterirt wurden.

Deductionslehre.

Sie beruht auf den Zonen, welche Weiß schon 1804 in der deutschen Uebersetzung von Hauy's Lehrbuch der Mineralogie in Anwendung brachte. Nachdem er Band I pag. 365 seine „dynamische Ansicht der Krystallisation" der französischen Atomlehre entgegengestellt hatte, worin er sich bemüht, die Systeme aus dreifacher (Rhomboeder) und vierfacher „Abstoßung" (Oktaeder) abzuleiten pag. 26, gruppirt er Bd. II pag. 723 die Flächen des Feldspathes nach vier „Zonen": horizontale (k, T, z, M ꝛc.) in der Säule; verticale (k, y, x, q, P ꝛc.) über den Scheitel; und zwei schräge (später Diagonalzonen genannt), vorn M, n, P ꝛc., hinten M, o, x ꝛc. Bei Gelegenheit des Epidots pag. 27 beweist er dann schon, wie die Lage einer Fläche geometrisch bestimmt sei, wenn sie in zwei solcher Zonen falle. Damit war für die Behandlung der Krystalle ein ganz neuer Weg eröffnet. Unter Zone verstand er nichts anderes, als Parallelität der Kanten. Die Wichtigkeit der Sache konnte erst durch die **Projection** recht klar werden, womit uns F. E. Neumann (Beiträge zur Krystallonomie 1823) später bekannt machte. Allein derselbe begünstigte die Punktmethode mit Zonenlinien pag. 63, während für die unmittelbare Anschauung die Linearmethode mit Zonenpunkten, wie sie in Poggendorff's Annalen 1835 Bd. XXXIV pag. 503 und 651 von mir auseinandergesetzt ist, den Vorzug verdient. Weiß bediente sich in seinen Schriften jener Punktmethode nie, aber kaum ward ihm die Linearmethode (im Frühjahr 1834) bekannt, so hat er viele seiner Hauptarbeiten (Abh. Berl. Akad. 1834) nochmals an der Hand dieser Projection revidirt. Die Zonen wurden eben dadurch so übersichtlich, weil alle Parallellinien in einen Punkt fallen, und man es bei der Entwickelung nur mit Punkten zu thun hat, während man bei Neumann immer erst tasten oder rechnen muß, welche Punkte (Flächenorte) in eine Zone fallen.

Zwei Linien geben eine Zone; drei Linien $1 + 2 = 3$ Zonen; vier Linien $1 + 2 + 3 = 6$ Zonen; fünf Linien $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ Zonen, und so kann man fortmachen. Mit vier Linien und sechs Zonen

gelangen wir schon zum **Oktaide** 666666. Dreimal sind zwei Sechsen



nicht verbunden, führen wir das durch die punktirten Linien aus, so bestimmen dieselben die Lage eines zugehörigen **Hexaides** mit den Kanten 333. Kennen wir das Oktaid mit seinen fünf gemessenen Winkeln, so kann daraus das zugehörige Hexaid mit seinen Kanten und Seiten ohne weitere Messung berechnet werden, das nennt man **ableiten** (deducere), durch Zonen bestimmen. Die Triangulation pag. 102 ergibt das.

Fünf Winkel abcde muß ich in jedem Oktaide messen, um fünf Gleichungen zu bekommen, dann ergibt sich der sechste f durch Rechnung. Daher brauche ich im

regulären Oktaeder keinen zu messen, weil ich weiß, daß alle sechs Winkel aaaaaa gleich sind, und ich auf diese Weise fünf Gleichungen

$$a = b, \ a = c, \ a = d, \ a = e, \ a = f$$

bekomme. In der „Methode der Krystallographie" pag. 153 habe ich daher gefehlt pag. 113. Denn man kann sehr gut Oktaeder mit fünf gleichen Winkeln construiren, ohne daß der sechste ebenfalls nothwendig gleich würde: denken wir uns nemlich ein Oblongoktaeder mit vier gleichen Endkanten xxxx und ungleichen Seitenkanten y und z, so kann ich durch Verkürzen oder Verlängern der aufrechten Axe c, von welcher die gleichen x ausstrahlen, die x stetig so vergrößern oder verkleinern, daß sie einer der Seitenkanten y oder z gleich werden. Wäre also y = x, so würde Axe

$$b = \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}x \ \text{und} \ a^2 = \frac{b^2 + 1}{b^2 \operatorname{tg} x^2 - 1}.$$ Im

viergliedrigen Oktaeder sind die Endkanten abcd und die Seitenkanten ef einander gleich. Ich bekomme nur vier Gleichungen

$$a = b, \ a = c, \ a = d, \ e = f,$$

und muß daher durch Messung **eines** beliebigen Winkels mir die fünfte Gleichung verschaffen. Eben so im

dreigliedrigen Oktaeder, denn hier sind abc und def gleich, was wieder vier Gleichungen

$$a = b, \ a = c, \ d = e, \ d = f$$

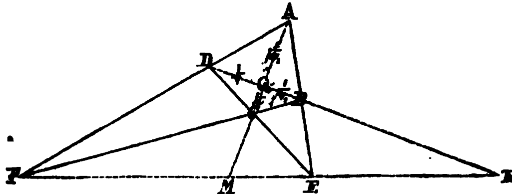
gibt, weshalb auch nur **ein** Winkel gemessen zu werden braucht. Im

zweigliedrigen Rhombenoktaeder ist a = b, c = d, e = f, es fehlen also noch zwei Gleichungen, folglich müssen **zwei** Winkel gemessen werden, die natürlich nicht einander gleich sein dürfen. Im **Oblongoktaeder** sind vier Winkel abcd gleich, das gibt ebenfalls nur drei Gleichungen a = b, a = c, a = d. Beide gehören daher zum zweigliedrigen Systeme. Im

zweiundeingliedrigen schiefen Oblongoktaeder und **schiefen Rhombenoktaeder** sind nur noch je zwei Winkel a = b und c = d gleich, es fehlen also noch **drei** Messungen. Daher hat man denn auch ein System mit **vier** Messungen, das dikline gesucht, um endlich zum

eingliedrigen mit **fünf** Messungen zu gelangen. Allein so verführerisch auch die Reihe 0, 1, 2, 3, 4, 5 sein mag, so ist sie doch den Systemen nicht ganz adäquat, da schon eine Messung zwei Systemen (4- und 3gl.) angehört, folglich auch eben so gut eine (mit vier Messungen) wegfallen kann.

Der Kundige erkennt in dieser Figur sogleich das sogenannte „vollständige Vierseit" ABCDEF mit seinen drei punktirten Diagonalen MNQ, die Hexaidlinien AC, BD, EF werden also durch die Punkte MNQ, welche die Zonenpunkte der Hexaidkanten bilden, harmonisch geschnitten. Es finden die Proportionen statt:



$$FN : EN = FM : EM, \quad FN = EN + EM + FM;$$
$$DN : BN = DQ : BQ, \quad DN = BN + BQ + DQ;$$
$$AM : CM = AQ : CQ, \quad AM = CM + CQ + AQ.$$

Herr Prof. Proß (Programm Polyt. Schule zu Stuttgart 27. Sept. 1850) hat sämmtliche Eigenschaften dieser merkwürdigen Figur zusammengestellt. Setzt man $QC = \frac{1}{\mu}$, $QA = \frac{1}{\mu_{,}}$, $QB = \frac{1}{\nu_{,}}$, $QD = \frac{1}{\nu}$, so ist nach unserer Sectionslinienformel

$$QM = \frac{2}{\mu - \mu_{,}}, \quad QN = \frac{2}{\nu_{,} - \nu}, \text{ folglich}$$

$$CM = QM - QC = \frac{\mu + \mu_{,}}{\mu - \mu_{,}} \cdot \frac{1}{\mu} \text{ und}$$

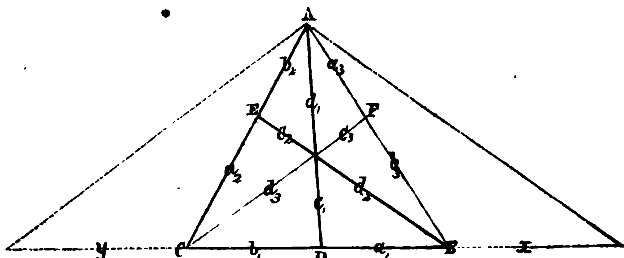
$$BN = QN - QB = \frac{\nu_{,} + \nu}{\nu_{,} - \nu} \cdot \frac{1}{\nu_{,}}.$$

Da $AM = QM + AQ = \frac{2}{\mu - \mu_{,}} + \frac{1}{\mu_{,}} = \frac{\mu + \mu_{,}}{\mu - \mu_{,}} \cdot \frac{1}{\mu_{,}}$, so verhält sich

$$\mu : \mu_{,} = AM : CM \text{ und } \nu_{,} : \nu = DN : BN \text{ etc.}$$

Schon Weiß (Abhandl. Berl. Akad. 1818. 270; 1824. 241; 1826. 93) über die **Theilung des Dreiecks** gab eine Fluth von Sätzen, die, wie folgende Figur zeigt, auf das Engste mit dem vollständigen Vierseit zusammenhängen. Denn man dürfte nur D mit E verbinden, um die allgemeine Projection vom Oktaid und zugehörigen Hexaid zu haben. Ziehen wir durch A eine Hilfslinie rechts parallel BE, so finden zwischen den Seitenabschnitten die Gleichungen statt:

$$x : a_1 = d_1 : c_1 \text{ und } x : a_1 + b_1 = b_2 : a_2, \text{ folglich}$$



$$x = \frac{a_1 d_1}{c_1} = \frac{(a_1 + b_1)b_2}{a_2}, \text{ oder}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ a_1 a_2 d_1 = (a_1 + b_1)b_2 c_1 \\ 2)\ a_2 a_3 d_2 = (a_2 + b_2)b_3 c_2 \\ 3)\ a_3 a_1 d_3 = (a_3 + b_3)b_1 c_3 \end{array}\right\} \text{I.}$$

2 und 3 folgen aus der Symmetrie der Buchstaben; oder man muß der Reihe nach durch B mit CF und durch C mit AD Parallelen legen.

Ziehen wir links durch A eine Parallele mit CF, so ist

$$y : b_1 = d_1 : c_1 \text{ und } y : a_1 + b_1 = a_3 : b_3$$

$$y = \frac{b_1 d_1}{c_1} = \frac{(a_1 + b_1)a_3}{b_3}, \text{ oder}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ b_1 b_3 d_1 = (a_1 + b_1)a_3 c_1 \\ 2)\ b_2 b_1 d_2 = (a_2 + b_2)a_1 c_2 \\ 3)\ b_3 b_2 d_3 = (a_3 + b_3)a_2 c_3 \end{array}\right\} \text{II.}$$

2 und 3 folgt wieder aus der Symmetrie der Buchstaben, oder wie wir bei I von a_1 aus rechts herum, so gehen wir bei II von b_1 aus links herum.

$$\text{I und II geben } a_1 + b_1 = \frac{a_1 a_2 d_1}{b_2 c_1} = \frac{b_1 b_3 d_1}{a_3 c_1}$$

$$\underline{a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3}$$

d. h. das Product der a- ist gleich dem Producte der b-Stücke.

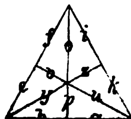
Von den vielen abgeleiteten Sätzen erwähne ich nur:

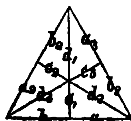
$$\frac{d_1}{c_1 + d_1} = \frac{c_2}{c_2 + d_2} + \frac{c_3}{c_3 + d_3};$$

$$\frac{c_1}{c_1 + d_1} + \frac{c_2}{c_2 + d_2} + \frac{c_3}{c_3 + d_3} = 1;$$

$$\frac{d_1}{c_1 + d_1} + \frac{d_2}{c_2 + d_2} + \frac{d_3}{c_3 + d_3} = 2 \text{ etc.}$$

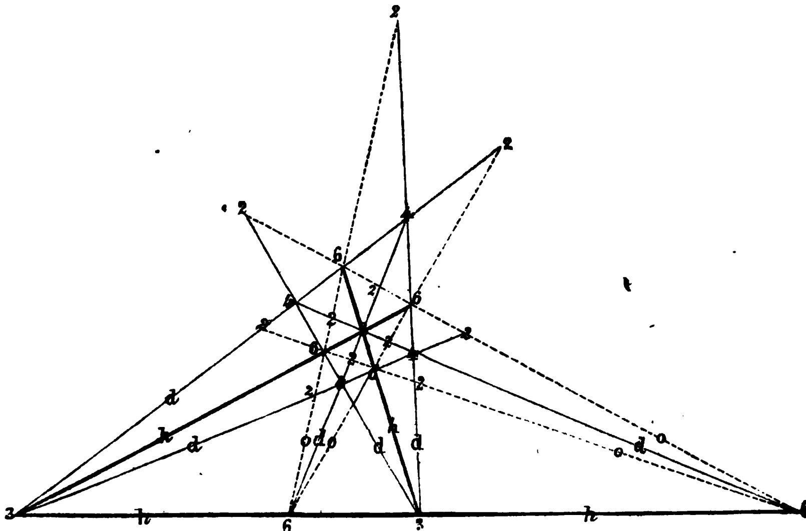
Da die Sätze für die geometrische Betrachtung sehr brauchbar sind, so will ich sie hier von Weiß (Abh. Berl. Akad. 1824. 245) entlehnen, und zugleich in unsere Bezeichnung übersetzen:





$a : b = fk : ie$	$a_1 : b_1 = b_2 b_3 : a_2 a_3$
$a : b = fu : v(e+f)$	$a_1 : b_1 = b_2 d_3 : c_3(a_3+b_3)$
$a : b = z(i+k) : iy$	$a_1 : b_1 = c_3(a_3+b_3) : a_3 d_3$
$a : b = fp : eo-fp$	$a_1 : b_1 = b_2 c_1 : a_2 d_1 - b_2 c_1$
$a : b = ko-ip : ip$	$a_1 : b_1 = b_3 d_1 - a_3 c_1 : a_3 c_1$
$a : b = iu-kv : iv$	$a_1 : b_1 = a_2 d_2 - b_2 c_2 : a_2 c_2$
$a : b = fz : fy-ez$	$a_1 : b_1 = b_3 c_3 : b_3 d_3 - a_3 c_3$
$a : b = ou-pv : v(o+p)$	$a_1 : b_1 = d_1 d_2 - c_1 c_2 : c_2(c_1+d_1)$
$a : b = z(o+p) : oy-pz$	$a_1 : b_1 = c_3(c_1+d_1) : d_1 d_3 - c_1 c_3$
$a : b = z(u+v) : v(y+z)$	$a_1 : b_1 = c_2(c_2+d_2) : c_3(c_3+d_3)$
$o : p = f(a+b) : ae$	$d_1 : c_1 = b_2(a_1+b_1) : a_1 a_2$
$o : p = i(a+b) : bk$	$d_1 : c_1 = a_2(a_1+b_1) : b_1 b_3$
$o : p = fk+ei : ek$	$d_1 : c_1 = b_2 b_3 + a_2 a_3 : a_2 b_3$
$o : p = v(a+b) : bu-av$	$d_1 : c_1 = c_2(a_1+b_1) : b_1 d_2 - a_1 c_2$
$o : p = z(a+b) : ay-bz$	$d_1 : c_1 = c_3(a_1+b_1) : a_1 d_3 - b_1 c_3$
$o : p = fu+v(e+f) : eu$	$d_1 : c_1 = b_2 d_2 + c_2(a_2+b_2) : a_2 d_2$
$o : p = iy+z(i+k) : ky$	$d_1 : c_1 = a_3 d_3 + c_3(a_3+b_3) : b_3 d_3$
$o : p = f(y+z)-ez : ez$	$d_1 : c_1 = b_2(d_3+c_3) - a_2 c_3 : a_2 c_3$
$o : p = i(u+v)-kv : kv$	$d_1 : c_1 = a_3(d_2+c_2) - b_3 c_2 : b_3 c_2$
$o : p = z(u+v)+v(y+z) : uy-vz$	$d_1 : c_1 = c_3(d_2+c_2)+c_2(d_3+c_3) : d_2 d_3 - c_2 c_3.$

Das **Dodekaid** kommt durch die Verbindung der 3 mit den noch



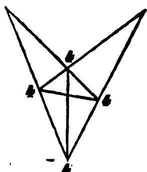
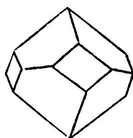
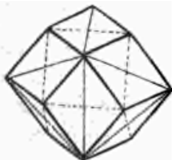
nicht verbundenen 6. Das gibt sechs neue Linien, welche sich in vier sechsseitigen Säulen schneiden, den **Dodekaidkantenzonen.** Außerdem setzen sie noch im Durchschnitte mit einer Oktaederlinie 12 neue Punkte, die **Oktaiddiagonalzonen** ein. Wer möchte jetzt noch die Oktaide zählen, welche durch die 3 + 4 + 6 = 13 Linien mit 3 + 4 + 6 + 12 = 25

Punkten entstehen, und obige harmonischen Schnitte ins Zahllose vermehren. Aber trotz dem Gewirr springen alle gleichwerthigen Linien sofort in die Augen. Die

drei Hexaidflächen haben 2 Hexaid- (3) und 2 Oktaidkanten (6); die
vier Oktaidflächen haben 3 Diagonal- (12) und 3 Oktaidkanten (6); die
sechs Dodecaidflächen haben 2 Diagonal- (12), 1 Oktaidkante (6) und 2 Dodecaidkanten.

Der Geübte kann diese Eigenschaften sofort auf die Körper übertragen. Nehmen wir als Beispiel das reguläre System, so setzen am **Würfel** auf jeder Fläche die beiden übrigen die Kanten 33 ein; die Oktaeder die Diagonalen 66. Das Granatoeder erzeugt keine besondere Linie, muß folglich die Würfelkanten abstumpfen. Am **Oktaeder** erzeugen auf jeder Fläche die drei übrigen je eine Kante 666, wo zwischen die harmonischen Schnitte von drei Granatoedern 222 fallen, welche die drei Diagonalen der Dreiecke bilden, von der Ecke zum Halbirungspunkte der gegenüberstehenden Seite gezogen.

Das **Dodecaid** dürfen wir aus der Figur nur besonders herauszeichnen, um sofort zu sehen, daß seine Sectionslinien einem Oktaide angehören, dessen Seitenecken abgestumpft werden, wodurch die vier sechsseitigen Säulen entstehen. Machen wir uns also ein beliebiges Oktaid, halbiren sämmtliche Kanten, und legen durch je vier Halbirungspunkte die übrigen 2 + 2 Flächen, so haben wir den Körper mit vier sechsseitigen Säulen erzeugt. Machen wir das Oktaeder aus einer quadratischen Säule pag. 120, so kommt das Granatoeder des regulären Systems. Die Dodecaide auf diese Weise verfertigt befinden sich im Gleichgewicht, d. h. sie haben keine regellos ausgedehnten Flächen, und folglich keine versteckten Kanten: die vier sechsseitigen Säulen geben 4 . 6 = 24 Kanten, welche sich zu 3 + 3 vierkantigen Ecken in den Polen der Axen, und zu 4 + 4 dreikantigen Ecken in den Polen der Säulen gruppiren. Da nun jede der sechs Sectionslinien durch zwei Säulenkanten 44 bezeichnet ist, so müssen die Flächen Parallelogramme bilden, worin eine Oktaederkante 6 die Längsdiagonale, und eine Würfelkante 3 die punktirte Querdiagonale anzeigt. Nun bleiben noch zwei der Diagonalzonen 2 2 zwischen 3 und 4 gelegen über, welche senkrecht zu den parallelen Granatoederkanten stehen, also den Querschnitt der regulären sechsseitigen Säulen bilden.

Das Dodecaid ist ein Körper, worin ich die zugehörigen Hexaid- und Oktaidkanten einzeichnen kann, weil es so viel Flächen hat, als

diese Kanten zählen. Daher hängt die Systematik der Dodecaide von den Kanten jener Körper ab, wir haben ebenfalls achterlei pag. 81:

1) **reguläres** (Granatoeder) mit sechs gleichen Rhomben von 120° in den Kanten und dem Oktaederwinkel 109° 28′ 16″ in den Flächen. Der Würfel stumpft die vierkantigen, das Oktaeder die dreikantigen Ecken ab, wie schon aus den Zahlen 3 und 4 folgt.

2) **viergliedriges** mit 4 + 2 Rhomben, die 4 bilden das 1ste stumpfere Oktaeder, und die 2 die 1ste quadratische Säule. Kurz ein viergliedriges Oktaeder mit abgestumpften Seitenecken.

3) **dreigliedriges** mit 3 + 3 Rhomben, drei bilden ein Rhomboeder, und 3 eine reguläre sechsseitige Säule: d. h. ein Rhomboeder mit gerade abgestumpften Zickzackkanten.

4) **zweigliedrige** gibt es zweierlei: mit 2 + 2 + 2 Rhomben dem Rhombenoktaeder zugehörig, und mit 1 + 1 Rhomben und vier congruenten Rhomboiden. Das **erstere** bildet ein Oblongoktaeder mit abgestumpften Seitenecken; das **andere** ein Rhombenoktaeder mit abgestumpften Seitenecken, woraus man gleich sieht, daß die vier gleichen Parallelogramme, den Oktaederflächen entsprechend, ungleichseitig werden müssen.

5) **zweiundeingliedrige** gibt es ebenfalls zweierlei: das **eine** bildet ein schiefes Oblongoktaeder mit abgestumpften Seitenecken, hat daher vorn und hinten einen Rhombus, aber 2 + 2 Rhomboide, je eins zur Linken und Rechten, entsprechend den Abstumpfungsflächen der Kanten eines schiefen Rhombenoktaeders; das **andere** bildet ein schiefes Rhombenoktaeder mit abgestumpften Seitenecken, 2 + 2 + 1 Rhomboiden und einem Rhombus, der Axenebene bc entsprechend.

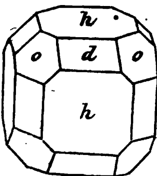
6) **eingliedrige** haben sechserlei Rhomboide.

Die Verfertigung aller dieser Formen ist außerordentlich leicht: man schneidet sich die Oktaide des Systems, halbirt alle Kanten, und legt durch die Seitenecken Flächen. Blos das reguläre und dreigliedrige kann man nicht so behandeln: jenes verlangt ein viergliedriges Oktaeder aus der quadratischen Säule geschnitten, dieses ein Rhomboeder, dessen Zickzackkanten man abzustumpfen hat.

Die drei Körper

Hexaid, Oktaid, Dodecaid

bilden gleichsam das Fundament der ganzen Krystallehre. Zum Studium genügt das einfache Modell von Oktaeder o, Granatoeder d und Würfel h. Für den Unterricht ist es dagegen gut, man hat alle acht zur Hand. Zur Anfertigung halbire ich sämmtliche Kanten der Hexaide, und lege durch die Halbirungspunkte Oktaidflächen, dann entsteht im regulären System ein sogenanntes

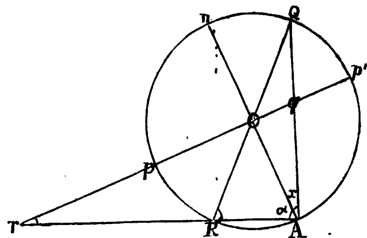


Cubooktaeder, mit sechs Quadraten und acht gleichseitigen Dreiecken, welche schon unser vortrefflicher J. Camerarius pag. 7 am Voller Schwefelkies erkannte. Ganz verwandt sind die übrigen sieben Hexaide. Stumpft man daran weiter die 12 Ecken durch d so ab, daß ein Parallelogramm entsteht, dann fällt das Dodecaid in die Oktaidkante o/o und Hexaidkante h/h, wie es die Deduction erfordert. Wollen wir das schönste Verhältniß für alle treffen, so sind für das Oktaid die Hexaidkanten zu halbiren, für das Dodecaid zu dritteln.

Daraus werden nun sofort schon alle Zahlenverhältnisse klar: außer 3, 4, 6, welche den vorhandenen Flächen der drei Körper angehören, und die ja nur ein einzig Mal auftreten, können durch Abstumpfung der Kanten h/d zahllose Pyramidenwürfel (Tetrakishexaeder), der h/o zahllose Leucitoide (Ikositetraeder), der d/o zahllose Pyramidenoktaeder (Triakisoktaeder) erzeugt werden. Lege ich ein Brett an diese dreierlei Kanten, so springt sofort in die Augen, daß die zugehörigen Körper noch an eine Linie (Zone) gebunden sind, daher bringen wir es nur zu 2 . 12 = 24 gleichen Flächen. Blos eine Körpergruppe auf den 48 Ecken, das Achtundvierzigflach (Hexakisoktaeder), bringt es zu 2 . 24 = 48, hier wiegt sich das Brett auf der Ecke nach allen Seiten hin durch keine Zone beschränkt. Ehe wir jedoch zur Ableitung dieser Körper gehen, müssen wir noch die besondern Projectionen geben, welche uns erst eine vollständige Einsicht in den harmonischen Bau gewähren.

Es handelt sich jetzt um die Projectionen auf die Würfelfläche (4gliedrige Stellung), auf die Oktaederfläche (3gliedrige Stellung), und auf die Granatoederfläche (2gliedrige Stellung). In neuern Zeiten werden die Kugelprojectionen bevorzugt. Ich habe zu dem Ende mir einen alten Globus überzogen, und darauf sämmtliche Projectionslinien aufgetragen. Der gemeinsame Punkt, durch welchen alle Flächen gelegt werden müssen, ist der Mittelpunkt der Kugel, daher bilden die Sectionslinien größte Kreise. Um gewisse Verhältnisse schnell klar zu machen, nehme ich kleine Marmorkugeln, womit die Kinder in Süddeutschland spielen. Sollen diese Kreise nun auf dem

Blatte (Projectionsebene) dargestellt werden, so geschieht das am anschaulichsten nach der **stereographischen** Projection, die dem Geographen bei der Zeichnung von Planigloben dient. Man theilt zu dem Ende die Kugel durch einen Aequatorialkreis pp', die Projectionsebene, in zwei Hälften, und denkt sich das Auge im untern Pole A. Es ist nun bekannt (Gugler, Lehrbuch der descriptiven Geometrie 1857 pag. 402. Lang, Lehrb. Krystallogr. 1866 pag. 292), daß jeder auf der Kugel gezogene Kreis auf dem Projectionskreise wieder einen



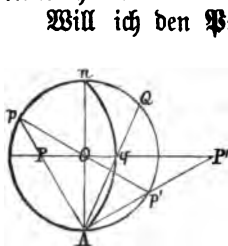
Kreis gibt. Die Reductionsebenen, durch den Mittelpunkt der Kugel gelegt, erzeugen auf der Kugeloberfläche aber größte Kreise (Großkreise), die sich gegenseitig halbiren. Alle Meridiankreise, die durch die Pole A und n des Projectionskreises gehen, erzeugen auf dem Projectionskreise Durchmesser als Sectionskreise, welche für die Entwerfung der Figuren von Wichtigkeit sind. Natürlich verzerren sich auch hier die Bilder, aber nach außen findet eine angenehme Begrenzung statt, was in der Projectionsebene ins Unendliche hinausgeht. Es ist nun nichts leichter, als die Orte Q des Meridiankreises npAp' auf der Sectionslinie pp' zu finden, ich darf nur vom Augenpunkte A nach Q ziehen, so ist q der Ort. Lag also Q in der Mitte von np', so fällt q nicht in die Mitte von op', das Bild wird also auch verzerrt. Denn nennen wir den Peripheriewinkel nQ = x, so ist

$$\frac{oq}{oA} = tg\,x = tg\,.\,22\,.\,30,$$ der halbe Bogenwinkel nQ.

Denken wir uns jetzt den Großkreis QR an der Kugel, und vom Augenpunkte A Linien an seine Peripherie gezogen, so haben wir einen **schiefen Kegel**, dessen Basis der Kreis ist. Ao vom Gipfel des Kegels zum Mittelpunkte des Kreises gezogen ist die Axe des Kegels. Dieser Kegel ist nothwendig symmetrisch, er kann wie ein 2 + 1gliedriger Körper durch die Medianebene in zwei congruente Hälften getheilt werden, an welchen die Kreisbasis eine Schiefendfläche bildet. Es muß daher eine hintere Gegenfläche da sein, welche ebenfalls noch eine Kreislinie gibt, man nennt das die antiparallele Basis (Wechselschnitt), Basis und Antibasis schneiden sich in der Axe b, welche senkrecht gegen die Medianebene steht. Werden diese Wechselschnitte von irgend einer durch die Kegelaxe gelegten Ebene in gerader Linie (Kreisdurchmesser) getroffen, so macht diese mit dem Kegelmantel der einen vorn denselben Winkel, als mit der andern hinten. Haben wir daher einen beliebigen Großkreis Apnp' im Aufriß, welcher auf dem Projectionskreise pp' projicirt werden soll, so sind AQ und AR gegenüberliegende Linien des Kegelmantels, QR Kreisdurchmesser seiner Basis. Man sieht sogleich, daß alle Punkte der Halbkugel oberhalb des Projectionskreises pp' innerhalb wie der Punkt Q nach q, alle unterhalb außerhalb fallen, wie der Punkt R nach r. Da Linie QR ein Kreisdurchmesser ist, so muß Winkel RAQ = $90^0 = \alpha + x$ sein, das Dreieck AOR ist aber gleichschenklich, daher der Winkel bei R = α; folglich muß auch Winkel Q = r sein, und die Linien QR und qr, durch die Wirtelebene des Meridiankreises npAp' erzeugt, antiparallel; wie QR so ist auch qr der Durchmesser einer Kreisbasis, q der Punkt einer Kreislinie. Die gesuchte Sectionslinie kann daher ebenfalls nur eine Kreislinie bilden, deren Radius in diesem besondern Falle pq = pr = pn = $\sqrt{2}$ ist.

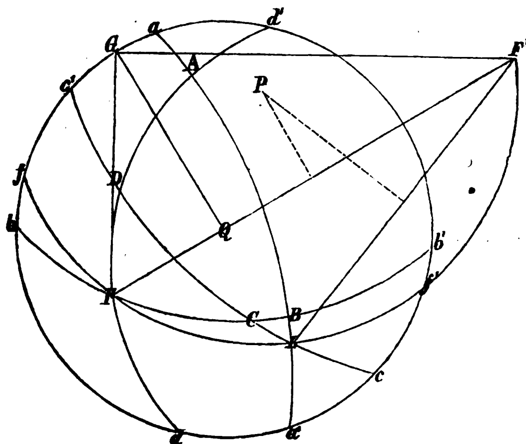
Da die Basis und Antibasis des Kegels einen Durchmesser mit einander gemein haben, worin sie sich halbiren, so muß jeder Sectionskreis

im Projectionskreise einen Kreisbogen bilden, der jenen Durchmesser zur Sehne hat, die durch den Mittelpunkt des Projectionskreises geht. Will ich daher eine allgemeine Figur entwerfen, so müssen alle Sectionskreise so eingerichtet werden, daß ihre beiden Schnitte mit dem Projectionskreise in einer Sehne liegen, die durch den Mittelpunkt jenes Projectionskreises geht. Nun genügen aber zur Ziehung eines bestimmten Kreises die zwei Endpunkte der Sehne nicht, ich muß nothwendig noch einen dritten haben.



Will ich den **Pol** P eines beliebigen Sectionskreises Aqn finden, so muß seine Sehne nA durch den Mittelpunkt o gehen und P 90° rings von der Kreislinie abstehen. Halbire ich daher den Kreis in q, und ziehe den Durchmesser qo, so steht dieser senkrecht auf die Kreissehne, und der gesuchte Pol P ist darin 90° von q entfernt. Denken wir uns daher das Auge in A und ziehen Aq, bis sie den Projectionskreis in Q schneidet, so dürfen wir nur den Kreisbogen Qnp gleich 90°, d. h. die Sehne Qp = $\sqrt{2}$ machen, so gibt der Durchschnitt der Linie Ap in P den gesuchten Pol. Denn Pq ist die Projectionslinie eines 90grädigen Bogens. Ziehe ich nun die Antiparallele pop', so gibt der Durchschnitt der Linie Ap' in P' den Gegenpol.

Sind wir mit diesen wenigen Sätzen auch im Stande, eine **allgemeine Figur** zu entwerfen, so macht es doch unendlich größere Mühe,



als auf der Ebene, wo wir blos das Lineal anzulegen haben. Wir gehen auch hier von dem allgemeinen Oktaide ABCDEF aus, müssen natürlich die Sectionskreise so einrichten, daß ihre Sehnen aa', bb', cc', dd' durch den Mittelpunkt Q des Projectionskreises (Grundkreises, Tafel-

kreises) gehen. Um nun die zugehörige Hexaidfläche durch die Oktaidkantenzonenpunkte E und F legen zu können, bedarf es noch eines dritten Punktes, z. B. F' außerhalb des Projectionskreises, welcher dem andern Ende des Durchmessers des gesuchten Kreises entspricht. Um nun durch die drei Punkte FEF' einen Kreis zu legen, muß ich die beiden Sehnen EF' und FF' halbiren, in den Halbirungspunkten Perpendikel errichten, wo diese sich in P schneiden, liegt der Mittelpunkt des gesuchten Kreises Fff'F', die Sehne ff' geht durch den Mittelpunkt Q des Projectionskreises. Zur Controle dient die dritte Sehne EF.

Der Weg ist immerhin mühsam. Glücklicher Weise läßt er sich für die symmetrischen Systeme bedeutend abkürzen, denn es gibt einen interessanten Zusammenhang zwischen den Mittelpunkten dieser Kreise und den Orten der Krystallflächen, ohne welchen die Darstellung der Kugelprojection für den Krystallographen eine Pein sein würde. Er besteht in folgendem:

Machen wir uns einen Projectionskreis tab. 1 fig. 1 mit den rechtwinklichen Axen $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$, worin $\alpha = \beta$ ist, und die Buchstaben nur wegen der Unterscheidung der Punkte und Kreise gesetzt werden, so liegt der Mittelpunkt eines beliebigen Sectionskreises $\frac{a'}{m} : \frac{b'}{n}$ hinten vorn im Zonenpunkte $m\alpha + n\beta$. Dieses überraschend einfache Gesetz macht uns erst die Kugelprojection lieb und werth.

Punkt $\alpha = \alpha + 0\beta = 10$, Ort der Granatoederfläche d, gibt uns den Mittelpunkt des Kreises d, welcher in der Linearprojection der Linie $a : \infty b$ entspricht, d. h. der Sectionslinie des Granatoeders. Zur Orientirung ist es daher gut, die Axenwerthe auch in der Kugelprojection anzudeuten, worauf die Zahlen in den Axen α und β sich beziehen.

Punkt $o = \alpha + \beta = 11$, Ort der Oktaederfläche o, gibt uns den Mittelpunkt des Kreises o, welcher in der Linearprojection der Linie $a : b$ entspricht, d. h. die Sectionslinie des Oktaeders.

Punkt $\pi_2 = 2\alpha + 0\beta = 20$, Ort der obern Pyramidenwürfelfläche π_2, gibt uns den Mittelpunkt vom Kreise $\pi_2 = \frac{a}{2} : \infty a$; Punkt $\pi_1 = \frac{1}{2}\alpha + 0\beta = \frac{1}{2}0$, Ort der untern Pyramidenwürfelfläche π_1, gibt uns den von $\pi_1 = 2a : \infty b$.

Punkt $l = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}$ gibt uns Kreis $l = 2a : 2b$; $l_1 = 2\alpha + \beta = 21$ gibt Kreis $l_1 = \frac{1}{2}a : b$; $l_2 = \alpha + 2\beta = 12$ gibt Kreis $l_2 = a : \frac{1}{2}b$; alle zum Leucitoeder $a : a : \frac{1}{2}a$ gehörig.

Punkt $p = 2\alpha + 2\beta = 22$ gibt uns Kreis $p = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b$; $p_1 = \alpha + \frac{1}{2}\beta = 1\frac{1}{2}$ gibt Kreis $a : 2b$; Punkt $p_2 = \frac{1}{2}\alpha + \beta = \frac{1}{2}1$ gibt Kreis $p_2 = 2a : b$. Alle gehören zum Pyramidenoktaeder $a : a : 2a$.

Punkt $x = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}$ gibt uns Kreis $x = \frac{2}{3}a : 2b$; $x_1 =$

$\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}$ gibt Kreis $x_1 = 2a : \frac{2}{3}b$; $x_2 = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta$ gibt Kreis $x_2 = \frac{3}{2}a : 3b$ etc.

So sind wir also im Stande, mittelst der Linearfigur jeden beliebigen Sectionskreis sofort zu entwickeln.

Das Gesetz läßt sich auch auf die andern Systeme ausdehnen. Wir dürfen da zunächst für das **viergliedrige** tab. 1 fig. 6 nur folgende kurze Betrachtung machen: Gegeben sei ein stumpfes Oktaeder AA'c, worin c die Hauptaxe, und AA' die Nebenaxen bedeuten; wir machen einen Aufriß durch die Kanten Ac und A'c, schlagen mit der Axe A um Q nur einen Kreis, verlängern die Hauptaxe nach B', legen durch B' eine Tangente an den Kreis, welche der Axe AA' parallel gehen muß, so gibt ein Perpendikel von Q auf die Kante cA gefällt im Durchschnitt mit der Tangente den Punkt α, und die Kante cA durch den Mittelpunkt Q gerückt den Punkt a. Bezeichnen wir die Entfernungen der Punkte α und a von B' einfach mit den gleichen Buchstaben α und a, so ist

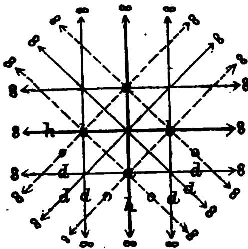
$$\alpha = \frac{1}{a} \text{ und } a = \frac{1}{\alpha}.$$

Es sind reciproke Achsen, wie wir später sehen werden. Denken wir das Auge in B, so ist auf dem Durchmesser AA' der Ort von α_0 in α_1 und von a_0 in a_1. Wie wir bei der Neumann'schen Punktmethode sehen werden, ist α der Ort der Oktaederkante, und damit auch der Ort der Dodecaederfläche, welche diese Kante gerade abstumpft; a_0 dagegen ist der Zonenpunkt der Oktaederkante, worin sich zwei Sectionskreise des Oktaeders schneiden. Denken wir uns jetzt, der Aufrißkreis werde zum Projectionskreise, so haben wir für die Sectionskreise und Flächenorte blos α und a auf die Horizontalaxe AA' abzutragen, wie durch die getüpfelten Senkrechten $\alpha\alpha$ und aa geschehen ist. Schlagen wir jetzt mit dem Radius aB = aB' den Kreis d,, so bestimmt uns derselbe in der Horizontalaxe AA' den Ort α, von der Fläche des nächsten stumpfern Oktaeders, der Radius αB = αB' dagegen den Sectionskreis d derselben Fläche. Da im Projectionskreise die Entfernung α_0 von a_0 90° beträgt, so ist α, der Pol vom Kreise d. Die ganze Entwickelung ist nun genau, wie vorhin beim regulären System, blos daß jetzt die Axeneinheit a größer, und folglich $\alpha = \frac{1}{a}$ kleiner als der Radius r ist. Wollen wir z. B. den Ort π und den Sectionskreis p einer Fläche $a : \frac{a}{2}$ bestimmen, so finden wir den Ort π, indem wir mit aB = aB' den Kreis d,, und mit $\frac{a}{2}$A um $\frac{a}{2}$ den Kreis p, schlagen, wo sich beide treffen, ist π. Um dagegen den Sectionskreis p zu finden, müssen wir im gegenüberliegenden Quadranten mit α um 2α und mit 2α um α Kreise schlagen, dann ist x der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, und

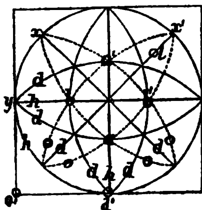
π der Pol von p. Um die Länge des Radius zu bestimmen, verbinden wir x mit dem Centrum Q, ziehen darauf PQ senkrecht, so ist Px der Radius des Sectionskreises p. Ich habe hier in Beziehung auf die Flächenorte der spätern Untersuchung schon vorgegriffen. Für jetzt ist nur zu merken, daß zur Bestimmung des Sectionskreises einer Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu}$ blos der Punkt $\mu\alpha' + \nu\alpha'$ im gegenüberliegenden Quadranten zu suchen und mit dem Mittelpunkte Q zu verbinden ist, dann liegt senkrecht dagegen in P der Punkt, wo der Sectionskreis eingesetzt werden muß.

Beim zweigliedrigen System ist außer dem α noch ein β zu bestimmen. Spätere Beispiele werden das alles zur Genüge erläutern. Jetzt wollte ich es nur angedeutet haben.

Projection auf die Würfelfläche (viergliedrige Stellung). Ziehe ich in der Ebene des Papieres ein Quadrat abab, so sind das die Sectionslinien von oooo, welche a : b : c gehen. Die Parallelität der gegenüberliegenden Linien beweist, daß die Projectionsebene parallel der Würfelfläche liegt. Die Axen aa und bb gehören den Sectionslinien des Würfels an, da sie gegenüberliegende Kanten des Oktaeders verbinden. Das Granatoeder d geht durch die Oktaederkanten und der Sectionslinie einer Würfelfläche parallel, daher sein Ausdruck a : c : ∞b und b : c : ∞a 2c. Nur die beiden d durch den Mittelpunkt kann sich der Anfänger am schwersten deuten, allein auch sie fallen in eine Würfel- und in eine Oktaederkante, die in diesem Falle nur von dem gemeinsamen Punkte c ins Unendliche verläuft. Rücken wir die Fläche nach ab, so leuchtet ein, daß sie a : b : ∞c hat. Die Zeichen Unendlich (∞) weisen auf 2 . 4 = 8 Richtungen, wovon 2 . 2 = 4 den Oktaederkanten, worin ood liegen, und 2 . 2 = 4 den Würfelkanten, worin ddh liegen, angehören. Diese Verzerrung nach außen schließt sich bei der

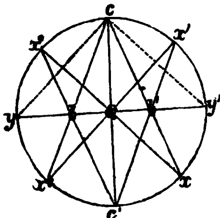


Kugelprojection etwas ab. Denn die acht Punkte fallen hier in den Projectionskreis, welcher der Würfelfläche h angehört, und wo vier Punkte die Zone hhdd und vier die Zone hodo anzeigen. Die Endecken des Oktaeders und Granatoeders liegen im Mittelpunkte, daher geben die zwei Würfelflächen hh und die zwei Granatoederflächen dd gerade Linien, wie in der Linearprojection. Auch im Uebrigen bleibt das Bild ähnlich, ist aber dennoch etwas unbequemer anzufertigen: Zu dem Ende zieht man den Projectionskreis h, viertelt ihn gleich, und beschreibt das Viereck darum, obgleich das nicht zum Bilde gehört. Lege ich ein Lineal durch d' und x (Oktaederkantenpunkt),

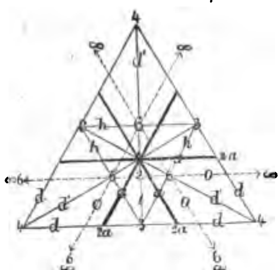


so geht das durch b, was mir den Projectionspunkt der Oktaederkante gibt. Durch diesen Punkt muß auch der Granatoederkreis d gehen. Fasse ich y'b = 1 + tg 22 . 30 = $\sqrt{2}$ pag. 137 mit dem Zirkel, so ist es gleich yd', der Sehne des Viertelskreises. Ich setze den Zirkel in y ein und beschreibe durch d'b' den Kreis d, so daß ohne alle Rechnung das Granatoeder auf dem Kreise gezogen werden kann. Das Oktaeder o liegt wie die langen Diagonalen des Granatoederrhombus, bildet daher das nächste schärfere Oktaeder, und in allen solchen Fällen gibt die Ecke o' des umschriebenen Quadrats den Mittelpunkt des gesuchten Kreises, und o'b' den Radius. Hätte ich vom Leucitoeder a : b : $\frac{1}{2}$c noch das nächste stumpfere Oktaeder des Granatoeders zu ziehen, so gäbe der Mittelpunkt des kleineren Quadrats (l) uns den gesuchten Kreis ꝛc. Damit haben wir den Schlüssel für alle stumpfern und schärfern Oktaeder der Kugelprojection in der Hand.

Nicht blos die Anfertigung, sondern auch die Anschauung ist hier schwieriger. Um die Sache nochmals klar zu machen, denken wir uns ein reguläres Oktaeder von einer Kugel umschrieben, dann fallen die Mittelpunkte beider zusammen. Wählen wir jetzt den Horizontalkreis durch die Axen ab als Projectionskreis, so müssen wir durch Axe cc' und eine der Axen (bb') nebenstehenden **Aufriß legen.** Dann bezeichnen cy und cy' zwei gegenüberliegende Oktaederkanten, die in c einen rechten Winkel machen. Wollen wir dieselben auf die Kugel projiciren, so werden sie in xx⁰ ⧺ cy' und x'x'' ⧺ cy durch den Mittelpunkt Q gelegt, dann treffen die Fußpunkte oben die Kugelfläche in x⁰x' und unten in xx''. Um nun die Punkte xx⁰x'x'' auf den Tafelkreis yy' zu bringen, können wir das Auge nach c oder c' versetzen, in beiden Fällen ist b und b' der Ort für die x⁰x'' und xx', und yb' = y'b = yc = Quadrantsehne, da in dem Dreiecke ycb' und y'cb die Winkel an der Spitze c 45 + 22$\frac{1}{2}$ = 67$\frac{1}{2}$ Grad pag. 137 betragen. Wir können daher beim Anblicke der Projectionsfigur pag. 141 die doppelte Vorstellung mitbringen: **entweder** denken wir uns das Bild auf dem Tafelkreise convex, dann liegt der gemeinsame Punkt unten, und die Zonenaxen strahlen uns entgegen; **oder** wir denken sie concav, dann gehen die Strahlen entgegengesetzt, wie wir sie uns bei der Projection auf die Ebene denken. Letztere Weise ist für die Darstellung bequemer: denn stellen wir dann die Bilder unserer Projectionsebene pag. 141 und dieser Projectionshohlkugel zusammen, so lassen sie sich leicht mit einander vergleichen. Ja wir könnten sogar einen Mittelweg einschlagen, und die Pfeile des ∞ convergiren lassen, um noch bessere Uebereinstimmung herbeizuführen.



Projection auf die Oktaederfläche (dreigliedrige Stellung) ergibt sich nach der Linearmethode außerordentlich leicht: wir verzeichnen ein

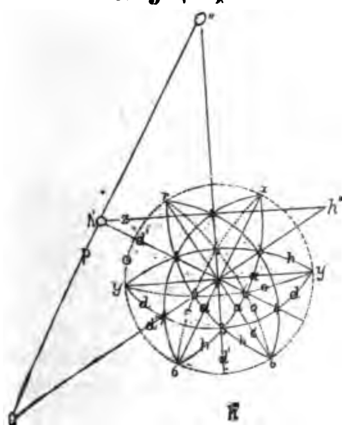


gleichseitiges Dreieck. Dann liefern die Ecken 666 drei Kantenzonen, die übrigen drei 666 laufen der Projectionsebene parallel ins Unendliche. Bei Oktaedern eines andern Systems hätten wir blos eine Fläche auf das Papier zu zeichnen: für die Quadrat- und Oblongoktaeder gleichschenkliche; für die Rhombenoktaeder ungleichseitige Dreiecke. Da das 3gliedrige Oktaeder ebenfalls ein gleichseitiges Dreieck hat, so kann die Figur als Muster für das 3gliedrige System dienen. Der **Würfel** hhh bildet das nächste stumpfere Rhomboeder;. er geht von einer 6 in den Ecken des Dreiecks zu einer zweiten 6 im Unendlichen. Das **Granatoeder** d fällt je in eine 3 und 6, daher muß es ein zweites stumpferes Rhomboeder d, und im Centrum eine sechsseitige Säule d' liefern, während die drei übrigen sechsseitigen Säulenpunkte (4) in die Ecken des äußersten Dreiecks fallen. Ich habe hier die Zahlen 3, 4, 6 eingeschrieben, die natürlich wie auch die 12 vollkommen mit denen der allgemeinen Figur übereinstimmen. Als Axen nimmt man die drei Linien aaa an, welche zur Säule des Leucitoeders gehören, und durch den Mittelpunkt den drei Linien ooo wechselsweise parallel gehen. Dann kommen folgende Ausdrücke

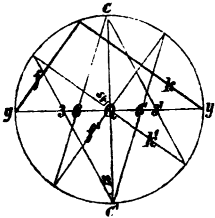
Würfel h = a : a : ∞a : c Oktaeder o = $\frac{1}{2}$a : $\frac{1}{2}$a : ∞a : c
Granatoeder d = 2a : 2a : ∞a : c, und Säule d' = a : $\frac{1}{2}$a : a : ∞c.

Letzteres ist die sogenannte zweite sechsseitige Säule, während das Leucitoeder a : a : ∞a : ∞c die erste bildet, und c : ∞a : ∞a : ∞a die vierte Oktaederfläche wird, worauf alle projicirt sind.

Die **Kugelprojection** macht mehr Schwierigkeit, ohne dabei ein



lehrreicheres Bild zu geben: der Projectionskreis entspricht jetzt der 4ten Oktaederfläche o, die drei Durchmesser d'd'd', sich unter 60° schneidend, verbinden die Zickzackkanten des Oktaeders und gehören der Dodecaidsäule; die Axen aaa mitten dazwischen der Leucitoedersäule. Wie wir aus der Linearfigur sehen, müssen die je zwei ins Unendliche streichenden Flächen o und h noch in jene Zickzackkanten fallen, allein es fehlt uns für alle diese Kreise ein dritter Punkt. Dazu wählen wir den Würfel h, dessen Kante k pag. 144 senkrecht auf die Flächendiagonale f steht. Hier können wir nun nicht mehr im Projectionskreise selbst den Ort der Würfelflächendiagonale oder die

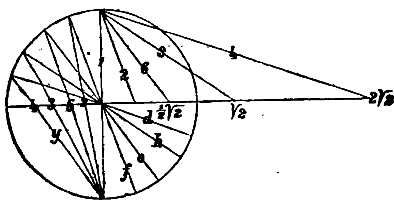


Würfelkante finden, sondern müssen uns durch die Granatoederkante des Würfels einen Aufriß machen, und dann wie oben beim Oktaeder die Kante und Diagonale durch den Mittelpunkt Q nach k' und f' legen. Jetzt ist es zwar nicht mehr gleichgültig, ob wir den Tafelkreis convex oder concav denken, denn im erstern Falle fällt der Ort der Würfeldiagonale 3 links, der Würfelkante 6' rechts, im andern umgekehrt, wie das Bild zeigt, aber wir können, wenn die Kreise gleich gewählt sind, die Punkte 3 und 6 mit dem Zirkel abnehmen, mögen wir das Auge oben in c oder unten in c' denken. Da die Neigung der Würfelkante k' gegen die trigonale Achse 54° 44' (halbe Oktaederkante) beträgt, so ist die Entfernung des Punktes 3 vom Mittelpunkte Q tg 27 . 22 = 0,517, etwas mehr als der halbe Radius. Drei Punkte y3y' pag. 143 genügen zur Bestimmung des Granatoederkreises d. Denn wir dürfen nur auf der Mitte der Sehne y3 ein Perpendikel errichten, so geht das nach der Dodecaederkante 4, welche $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ vom Mittelpunkt des Projectionskreises entfernt ist. Da der Würfel h das nächste schärfere Rhomboeder bildet, so ist der Mittelpunkt seines Kreises vom Centrum des Projectionskreises in der Dodecaederlinie d' um $\sqrt{2}$ entfernt. Wer die Sehnen des Viertelkreises nicht unmittelbar abnehmen will, kann sie leicht durch die Linie z construiren, welche in d' den Punkt h' gibt. Von hier darf ich nur nach x fassen, so ist der Radius des gesuchten Kreises $\sqrt{3}$ gefunden. Dieselbe Construction durch ein Perpendikel p in h' auf d' gibt mir in dem verlängerten d' die Mittelpunkte o'o'' des punktirten Oktaederkreises, welcher $2\sqrt{2}$ vom Centrum des Tafelkreises entfernt ist. Fasse ich von o' aus nach r, so ist der gesuchte Radius $\sqrt{9} = 3$. Den dritten Punkt o''' h''' finde ich durch Zirkelschlagen, denn o' o'' o''' und h' h'' h''' bilden ein gleichseitiges Dreieck. Mit der Construction solcher stumpfen und scharfen Oktaeder ist uns der Schlüssel zur Verfertigung der Figuren gegeben. Aber schon zu einem kleinen Kreise braucht man ein großes Blatt, und das ist bei der Anfertigung lästig.

Practische Regel. Ziehe einen Kreis, und darin die drei Durchmesser aaa; durch eine Senkrechte auf irgend einen der Durchmesser suche die Quadrantensehne $\sqrt{2}$. Nimm auf der Senkrechten h' vom Mittelpunkte um $\sqrt{2}$ entfernt, dann ist $h'x = \sqrt{3}$ der Halbmesser des Würfelkreises. Punkt 4 vom Mittelpunkte $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ entfernt das Centrum des Dodecaederkreises, und o vom Mittelpunkte $2\sqrt{2}$ entfernt das Centrum des Oktaederkreises. Wir werden übrigens unten bei der Berechnung noch einfachere Regeln geben.

Schon aus der obigen Darstellung pag. 137 folgt, daß innerhalb des Projectionskreises die Entfernung der Zonenpunkte vom Mittelpunkte

die Tangente des halben Winkels beträgt, welchen die betreffende Zonenaxe mit der aufrechten Axe des Systems macht. Suchen wir die Entfernung der Granatoederkante 4 (links) vom Mittelpunkt, so dürfen wir nur die Kante 4 (rechts) im Verhältniß $1 : 2\sqrt{2}$ eintragen, d durch das Centrum des Tafelkreises der eingetragenen Linie parallel ziehen, so ist der Ort 4 durch y sofort construirt. Die Würfelkante 3 hat zur



Neigung gegen die Axe $1 : \sqrt{2}$; die Oktaederkante 6 dagegen $1 : \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die Diagonalzone 2 endlich $1 : \frac{1}{4}\sqrt{2}$, so daß wir die bequemsten Reihen von $\sqrt{2}$ bekommen, nach der einen Seite stetig verdoppelt, nach der andern halbirt. Wie die Granatoederkante 4 neigt sich die Leucitoederfläche, wie die Würfelkante 3 die Granatoederfläche, wie die Oktaederkante 6 die Würfelfläche, und wie die Diagonalzone 2 die Oktaederfläche. Alles das leuchtet aus unserer **Linearfigur** sofort ein. Wollen wir nun darauf die Winkel und Abstände berechnen, so verhalten sich die Axen

$$a : c = \sqrt{2} : \sqrt{3} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} : 1, \ a = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \text{ für } c = 1,$$

es ist ja das nichts weiter als das Verhältniß der Eckdiagonale zur Flächendiagonale am Würfel.

Der Abstand der Granatoederkante 4 vom Centrum ist $a . 2\sqrt{3} = 2\sqrt{2}$; folglich für 3 . . . $a\sqrt{3} = \sqrt{2}$; für 6 . . . $a . \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; für 2 . . . $a . \frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Neigung der Granatoederkante 4 gegen die trigonale Axe ist

tg von $2\sqrt{2}$ gibt 70 . 32 = Tetraederkantenwinkel.

Abstand vom Mittelpunkt tg 35 . 16 = 0,7071 . . . = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Würfelkante 3 . . . tg $\sqrt{2}$ gibt 54 . 44 = halbe Oktaederkante.

Abstand vom Mittelpunkt tg 27 . 22 = 0,517.

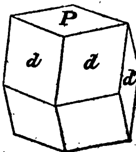
Oktaederkante 6 . . . tg $\sqrt{\frac{1}{2}}$ gibt 35 . 16 = halbe Tetraederkante.

Abstand vom Mittelpunkt tg 17 . 38 = 0,3178 . . .

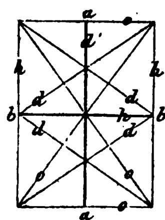
Diagonalzone 2 . . . tg $\sqrt{\frac{1}{8}}$ gibt 19.28 = 54.44 — 35.16.

Abstand vom Mittelpunkt tg 9 . 44 = 0,1715 . . .

Projection auf die **Granatoederfläche** (2gliedrige Stellung). Es gibt zwei Hauptwege: man geht entweder vom Oktaeder aus, und trägt die andere ein, oder vom **Granatoeder**, wie die nebenstehende Stellung desselben auf die Granatoederfläche P zeigt, worin dieselbe als Projectionsebene genommen ist. Diese Art führt am unmittelbarsten und leichtesten zum Ziele, wir nehmen ihn daher als



1sten Weg, wo ein Rhombus dddd mit dem Oktaederwinkel 109° 28′ 16″ und den Diagonalen $1 : \sqrt{2}$ gegeben ist. Diesen Diagonalen entsprechen die Projectionslinien der Granatoederfläche d′ und der Würfelfläche h. Mit Zuhilfenahme irgend einer andern Projection findet man dann leicht die Lage der übrigen Würfel- hh und Oktaederflächen oooo. Zwei Flächen oo, welche durch das Centrum gehen, stehen senkrecht gegen die Sectionslinien dd, weil sie die Geradendfläche der sechsseitigen Säule vom Granatoeder bilden. Kurz jede folgende so leicht entworfene Figur gibt uns neue Einsicht in die Eigenschaften. Nehmen wir die Diagonalen des Rhombus als Axeneinheiten, so bekommen wir



$$a : b : c = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} : 1 : 1,$$

zum Beweise, daß wir zwar eine zweigliedrige Ordnung in dieser Stellung haben, aber doch viergliedrige Symmetrieverhältnisse. Die Axenausdrücke sind folgende:

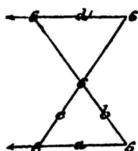
$d = a : b : c$, $d' = b : \infty a : \infty c$, $P = c : \infty a : \infty b$.

$h = b : c : \infty a$ und $h = a : \infty b : \infty c$.

$o = 2a : c : \infty b$ und $o = 2a : b : \infty c$.

Die Granatoederfläche gegen Axe c macht 30°, die Würfelfläche 45°, die Oktaederfläche 35° 15′ 52″ (halber Tetraederwinkel). Damit ist der

2te Weg schon gegeben, denn die vier Flächen abcd entsprechen nach Länge und Winkeln der Sectionslinien genau den oooo mit ihren sechs Zonenpunkten, wovon nur einer (links) im Unendlichen liegt. Selbstverständlich verfahren wir dann bei der weitern Entwickelung ganz wie bei der allgemeinen Figur. Um die Projection des Oktaeders zu verstehen, darf man es nur auf irgend eine seiner Kanten legen und die aufrechte Kante in den stumpfen Winkel rücken, so sind sämmtliche Flächen in ihrer projectiven Stellung, da alle über dem Centrum der Projection durch einen Punkt gehen: das Oktaeder erscheint von der Seite als eine stumpfe Säule von 109° 28′ mit einem Paar auf die scharfe Kante aufgesetzt, von vorn dagegen als eine scharfe mit dem Tetraederwinkel 70° 32′. Nimmt man die scharfe Säule als Einheit der Axen, so bleibt b und c gleich, aber a ist doppelt so groß, als vorhin, also

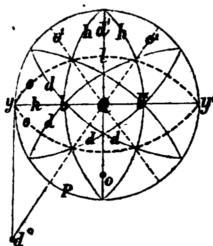


$$a : b : c = \sqrt{2} : 1 : 1.$$

Es behalten dann P, d′, hhh obige Ausdrücke bei, weil auf das ∞ die Länge der a keinen Einfluß haben kann, dagegen werden

$$d = \tfrac{1}{2}a : b : c,\ o = a : c : \infty b \text{ und } o = a : b : \infty c.$$

Die **Kugelprojection** verlangt vielmehr Ueberlegung. Wie aus der Linearprojection folgt, so erzeugen im Projectionskreise P die auf ein-



ander senkrechten Linien h und d' die Quadranten. Darnach lassen sich die ebenfalls geraden Linien o'o' der Oktaedersäule, welche von $1 : \sqrt{2} = Qy : yd^0$ gehen, leicht construiren. Da sich die Würfelflächen unter rechtem Winkel schneiden, so muß, wie bei der Würfelprojection pag. 141,

$$y'b = 1 + tg\ 22\ .\ 30 = \sqrt{2}$$

der Radius der beiden Würfelkreise hh sein. Ich habe daher die Quadrantensehne in den Zirkel zu fassen, und um y und y' die Kreise dieser Würfelflächen hh zu ziehen. Damit ist zugleich der Kreismittelpunkt d^0 von den Granatoederflächen gefunden, der vom Mittelpunkt des Tafelkreises $\sqrt{3}$ entfernt ist. Ich darf von d^0 nur nach b' fassen, um die Länge des

$$\text{Radius } d^0b' = \sqrt{3} + tg\ 15^0 = \sqrt{2}\ .\ 2 = 2$$

zu haben. Man bringt das allerdings mit Construction heraus, doch bleibt dabei immerhin eine kleine Ungewißheit über die wahrhafte Länge, so daß es noth thäte, stets wieder den rechnenden Beweis zu führen. Zum Glück schützt uns vor gröbern Irrthümern die Linearfigur; auch die einfachen Zahlenverhältnisse, wie in diesem Falle der Durchmesser des Projectionskreises, bieten einige Bürgschaft für die Richtigkeit, ganz abgesehen von dem bestimmten Wege, den ich oben pag. 139 für das Regulärsystem dargelegt habe. Endlich bleiben noch die beiden Oktaederkreise o, die außer yy' noch zwei bekannte Punkte o'/h haben, so daß mit einem Perpendikel auf die Sehne zwischen diesen Punkten in der Linie d' das Centrum o^0 leicht gefunden wird, was sogar mit Probiren gelingt. Mit Hilfe der Linearfigur finden wir die Mittelpunktentfernung des Punktes $l = tg\ 27\ .\ 7$ (ein Viertel Oktaederwinkel). In solchen Fällen kann der Radius leicht berechnet werden. Denn setzen wir die Entfernungen vom Mittelpunkt $Ql = 1$, $Qo^0 = x$, $Qy' = 1$, so ist $o^0y' = o^0l = r =$ Radius, folglich

$$r^2 = 1 + x^2 = (l + x)^2,$$
$$1 + x^2 = l^2 + x^2 + 2lx,$$
$$x = \frac{1 - l^2}{2l} = 0{,}707 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \text{ und}$$
$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \sqrt{1{,}5} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

Wie schon nach der Figur zu erwarten war, dürfen wir nur von d^0 nach y' ziehen, so kommt o^0, welches vom Centrum Q um $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ entfernt ist.

Mit diesen Figuren, sowohl auf Ebene als Kugel, ist uns gleichsam das Gerippe gegeben, in welches wir die andern Kreise meist mit Leichtigkeit einzeichnen können. Wie ich früher in der Methode der Krystallographie 1840 pag. 63 auseinandersetzte, ist der Fortschritt, daß man nun auch die übrigen Punkte systematisch mit einander verbindet.

Es kommen dann nur noch 12- und 24flächige Körper, oder wenn man die Parallelen mitzählt, 24- und 48flächige. Ich habe dazu mir ein für allemal eine Tafel von 4 Quadratfuß mit farbigen Linien, und ebenso eine Kugel von einem alten Globus entworfen, auf welchem man gleichsam spazieren geht, um die schwierigsten Verhältnisse sich klar zu machen. Zum Verständniß der möglichen Körper genügt übrigens irgend eine der obigen Figuren, namentlich auch die allgemeine pag. 133, welche **wir** jetzt wieder zur Hand nehmen. Wir haben darin

$3 + 4 + 6 + 12 = 25$ Zonenpunkte.

Punkte 3, die **Kanten des Hexaides**, sind mit allen 4 und 6 verbunden, auch schon mit vier von den 12 (durch 2 bezeichnet), es bleiben also noch acht zur Verbindung übrig. Legen wir das Lineal durch 3 nach irgend einer der nicht verbundenen 2, so sehen wir, daß stets noch eine zweite 2 hineinfällt, wir bekommen daher in jeder Kantenzone vier neue Flächen, das gibt ein

Pyramidenhexaid (Tetrakishexaid) mit $3 . 4 = 12$ Linien, folglich eben so viel Reductionsebenen, mit dem Ausdrucke $\pi = a : \frac{1}{2}b : \infty c$ 2c., wie man auf der Würfelprojection tab. 4 fig. 1 sofort mit dem Lineal ermitteln kann. Da in jeden Zonenpunkt vier Reductionsebenen fallen, so muß es in allen möglichen Fällen ein Körper mit drei achtseitigen Säulen sein. Wenn nun auf den Hexaidflächen die Säulen von beiden Kanten herkommen, so muß darauf je eine vierseitige Pyramide mit Dreiecken entstehen. Im regulären System wird das ein **Pyramidenwürfel** mit zweierlei Ecken und Kanten.

Punkte 6, die **Kanten des Oktaides**, sind mit allen 3 verbunden, nur von den 4 und 12 liegen noch einige offen. Zunächst Punkte 4 betreffend, sind noch zwei frei, durch Verbindung dieser 4 mit den 6 entsteht ein Vierundzwanzigflach.

Icositetraid (Trapezoeder) mit $6 . 2 = 12$ Linien und dem Ausdrucke $l = a : b : \frac{1}{2}c = 2a : 2b : c$ 2c., wie man auf der Würfelprojection sogleich ermittelt. Der Körper muß, analog dem Dodecaid, aus vier sechsseitigen Säulen bestehen. Im regulären System gibt es das **Leucitoeder.** Von den 12 sind noch vier frei, wovon ebenfalls wie vorhin je zwei in eine Linie fallen, was zugleich zur Controle der Genauigkeit der Figur dient. Wir bekommen dadurch ein zweites 24-flächiges

Icositetraid mit dem Ausdrucke $\lambda = a : b : \frac{1}{3}c = 3a : 3b : c$ 2c., im regulären das sogenannte **Leucitoid.** Als ich das erste Mal diese Sache entwickelte, war ich nicht wenig erstaunt darüber, denn ich erwartete das Pyramidenoktaid. Allein das ist bei der Linearmethode unter den Verbindungslinien der 25 Punkte nicht vorhanden. Der Kundige erkennt den Grund sogleich, denn die Pyramidenoktaide müßten zwischen Oktaid- o und Dodecaidlinien d fallen, und hier liegt kein Ver-

bindungspunkt. Beide Icositetraide fallen zwischen Oktaid o und Hexaid h, schärfen daher die Oktaidecken zu, wie schon aus ihren Ausdrücken

$$a : b : \tfrac{1}{2}c = 2a : 2b : c \text{ und } a : b : \tfrac{1}{3}c = 3a : 3b : c$$

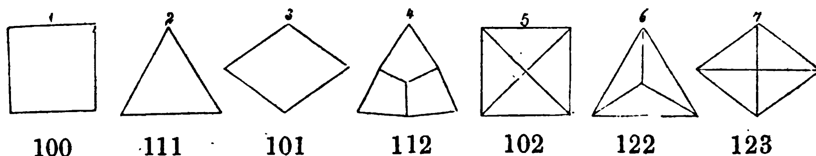
folgt. Sie erzeugen daher über den Oktaidflächen vierseitige Flächen (Trapezoide), die beim regulären System in symmetrische Deltoide pag. 116 übergehen. Die Körper nehmen daher eine merkwürdige Mittelstellung ein: sie haben zweierlei Kanten, wie alle 24flächner, aber dreierlei Ecken, wie die 48flächner.

Punkte 4, die **Kanten des Dodecaides**, sind nun mit allen 3 und 6 verbunden, von den 12 auch schon mit sechs, folglich bleiben noch sechs zum Verbinden übrig, das gibt ein

Hexakisoktaid (Trigonpolyeder, 48flach) mit 4 . 6 = 24 Linien und dem Ausdrucke $x = a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c = 2a : b : \frac{2}{3}c = 3a : \frac{3}{2}b : c$ 2c., wie man auf der Würfelprojection leicht ermittelt. In jede der vier sechsseitigen Säulen fallen 12 neue Flächen (6 Linien), welche die Säulenkanten zuschärfen; es muß daher ein **Pyramidendodecaid** entstehen, wo auf jedem Parallelogramme sich eine vierseitige Pyramide erhebt. Im regulären Systeme gibt es das Pyramidengranatoeder mit dreierlei Kanten und Ecken. Endlich bleiben noch übrig die nicht verbundenen

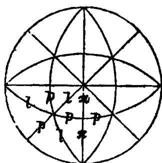
Punkte 12, die Oktaiddiagonalzonen, welche das Trigonpolyeder $y = a : \frac{1}{5}b : \frac{1}{3}c = 5a : b : \frac{5}{3}c = 3a : \frac{3}{5}b : c$ 2c. geben. Diese heraus zu finden, ist ohne Anlegung einer großen Figur nicht so leicht. Doch da jeder der 12 Punkte sich mit den übrigen 11 verbinden muß, so gibt das $\frac{11 \cdot 12}{2} = 66$ Sectionslinien. Von diesen ist durch Oktaid, Dodecaid, Pyramidenhexaid und Icositetraid schon jeder einzelne Punkt mit sieben verbunden, es gehen also $\frac{7 \cdot 12}{2} = 42$ Linien ab, bleiben noch 66 — 42 = 24 übrig.

Bei der Punktmethode kommen wir weiter unten auf diese Entwickelung nochmals zurück. Da tritt statt des Icositetraids $a : b : \frac{1}{2}c$ das **Pyramidenoktaid** $a : b : 2c$ 2c. auf, welches die Kanten des Oktaides zuschärft, folglich auf jeder Fläche eine dreiseitige Pyramide erzeugt. So entwickelt sich vor unsern Augen das einfachste Bild von Körpern, welches im regulären Systeme folgendermaßen lautet:



Diese einfachen Zeichen genügen zu einer klareren Anschauung. Im

regulären System sind die Flächen eines jeden Körpers congruent, und zwar Vierecke oder Dreiecke. Alle Kanten sind bei den ersten drei Grundkörpern gleich, ebenso die Pyramidenkanten bei den drei letztern, und wie aus den Figuren erhellt, sind 4—6 zweierlei kantig, 7 dagegen dreierlei kantig. Eine größere Verschiedenheit ist nicht möglich. Gleicheckig sind Würfel und Oktaeder; zweierleieckig Granatoeder, Pyramidenwürfel und Pyramiden-Oktaeder. Dreierleieckig dagegen Leucitoeder und Pyramidengranatoeder. Das Trigonpolyeder (7) mit dreierlei Kanten und Flächen liefert daher den allgemeinsten Körper, worin alle übrigen stecken müssen (Methode Kryst. pag. 67), wie das Weiß in seinen Vorlesungen uns schon auseinander setzte, und Naumann (Lehrb. Kryst. 1830 I. 121) durch ein besonderes Schema darlegte. Wenn man kein Modell zur Hand hat, und keine Figur entwerfen will, läßt sich die Sache am leichtesten mit der Kugelprojection auf die Würfelfläche hinzeichnen. Man zieht einen Kreis, theilt ihn in vier Quadranten, schlägt mit der Quadrantsehne die vier Granatoederkreise, zieht die zwei übrigen Geraden durch den Mittelpunkt pag. 141, so haben wir schnell ein wenn auch verzerrtes Bild eines 48flächner vor uns, πpl sind die dreierlei Kanten: denken wir π (gebrochene Oktaederkante) weg, so entsteht der Pyramidenwürfel; denken wir p (gebrochene Würfelkante) weg, so entsteht das Pyramiden-Oktaeder; denken wir l (Granatoederkante) weg, so entsteht das Leucitoeder. Um zum Granatoeder zu gelangen, müssen π und p wegfallen, es bleiben nur die Granatoederkanten l; zum Oktaeder p und l, dann strecken sich π und π zu einer geraden Oktaederkante; zum Würfel π und l, dann strecken sich p und p zur Würfelkante.



Da unsere Projectionsfigur ganz allgemeine Gültigkeit hat, so müssen die Körper in allen Systemen wieder zum Vorschein kommen, aber sie zerfallen hier nach der Gleichheit der Flächen, Kanten und Ecken in die von dem jeweiligen Systeme geforderten Körper. Bei dem 1gl. müssen alle Flächen ungleich sein, das 2 + 1gl. kann höchstens zwei gleiche, das 2gl. vier, das 3gl. sechs, das 4gl. acht, das 6gl. zwölf, und erst das reguläre vierundzwanzig gleiche Flächen haben. Wir können uns so vom Allgemeinen zum Besondern herab begeben, denn solche Entwickelungen gelten für die schiefsten und ungleichsten Axen.

Neumann's graphische Methode.

Siehe dessen „Beiträge zur Krystallonomie 1823“, worin sie ausführlich dargelegt ist. Der Weg wird für die Anschauung viel schwieriger, und daher meist nur von Mathematikern vorgezogen. Eine kurze Andeutung gab ich davon im Handb. der Miner. 1863 pag. 107. Wir denken uns jetzt die Projectionsebene parallel der bisherigen (untern) nach oben durch den gemeinsamen Punkt c pag. 75 gelegt, und ziehen

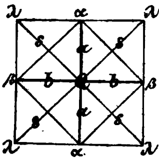
dann vom Centrum der untern senkrechte Linien auf die zu projicirende Fläche. Wo diese radienartig nach außen verlängert die **obere** Projectionsebene treffen, ist der Flächenort, aus welchem die Zonenverhältnisse hervorgehen. Jetzt haben wir statt der Fläche nicht mehr eine Linie, sondern einen Punkt, daher hieß sie Weiß pag. 63 gegenüber der Linearmethode Punktmethode, obwohl die Benennung auch umgekehrt sein könnte, denn alle Flächenorte, die in **einer Linie** liegen, gehören jetzt zu **einer Zone**. Schon der vortreffliche Bernhardi pag. 29 kam auf die Idee einer graphischen Methode, hielt die Ausführung aber für zu schwer! Punkt- und Linearmethode stehen gegen einander in dem Verhältniß der Winkelvertauschung (Invertirung), welche Hauy zuerst bei den Kalkspathrhomboedern a : a und $\frac{a}{2} : \frac{a}{2}$ wahrnahm. Nach seiner Rechnung stimmten die Kantenwinkel des Hauptrhomboeders mit den Winkeln auf der Fläche des ersten schärfern (104° 28′ 40″), und umgekehrt die Seitenkanten des ersten schärfern Rhomboeders mit den Seiten in den Endecken des Hauptrhomboeders (101° 32′ 13″), was Hauy métastase nannte (Lehrb. Miner. Ueb. Karsten 1804 I. pag. 98). Ein solches Verhältniß findet allgemein statt bei Körpern, deren Flächen sich wechselsweise senkrecht schneiden. Man macht sich das an jeder körperlichen Ecke sogleich klar, indem man senkrecht gegen die Kanten drei neue Flächen schneidet, welche ein sogenanntes Polardreieck geben, das die Seiten und Winkel mit der ersten vertauscht pag. 86. Im regulären Systeme hat das Rhomboeder des Tetraeder in den Endkanten 70° 32′, in den Seitenkanten 109° 28′, auf den Flächen dagegen 60° und 120°. Das Rhomboeder des Granatoeders verhält sich umgekehrt, es hat in den Kanten 120° und 60°, in den Flächen dagegen 109° 28′ und 70° 32′. Die Winkel sind vertauscht, daher steht die Oktaederfläche senkrecht gegen eine sechsseitige Säule des Granatoeders. Dasselbe trägt sich in gewisser Beziehung auch auf die Oktaeder über: denn das reguläre Oktaeder hat 60° auf den Flächen und 109° 28′ in den Kanten; das Oktaeder des Granatoeders dagegen 120° in den Endkanten und 70° 32′ auf den Flächen in den Endecken, welche beide das Supplement (180° = 60° + 120° = 109° 28′ + 70° 32′) zu einander bilden. Alles das ist Folge von gegenseitigen senkrechten Stellungen der Flächen.

Wenn die Methode mit Zonenpunkten (Linearmethode) ganz allgemein vom eingliedrigen Systeme ausging, so ist es bei der Methode mit Zonenlinien (Punktmethode) am zweckmäßigsten, die Betrachtung an das reguläre System zu knüpfen. Unläugbar wird die Flächenentwickelung einfacher, und da man sich darunter ziehende Kräfte denken kann, naturgemäßer. Aber die Anschauung kommt kürzer weg, denn sie hat statt der wirklichen Flächen nur Perpendikel. Doch die Linearmethode vorausgeschickt, ist uns der Weg dazu gleichsam geebnet. Ja wir können nach einiger Uebung dieselbe Figur benützen, müssen nur immer bedenken,

daß bei der Linearmethode die Projectionsebene durch den Mittelpunkt, bei der Punktmethode durch den Außenpunkt des Systemes gehe. Dabei ergänzen sich beide, denn was die eine nach Innen, das kehrt die andere nach Außen.

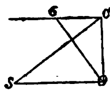
Die obere Projectionsebene geht der untern parallel, ihre Mittelpunkte und deren Strahlen correspondiren mit einander.

Projiciren wir z. B. die drei Körper (Oktaeder, Würfel, Granatoeder) nach der Linearmethode auf die Würfelfläche, so bilden zwei Würfel- und zwei Granatoederflächen die Wirtelstrahlen abss, welche verticalen Flächen angehören. Führt man jetzt die Projectionsebene durch den gemeinsamen Punkt nach Außen, so bleiben natürlich auf der obern Ebene alle Wirtelstrahlen, welche man



mit denselben aber griechischen Buchstaben $\alpha\beta\sigma\sigma$ ($Q\lambda = \sigma$) zu benennen pflegt, in gleicher Lage den untern (lateinischen) beziehungsweise parallel. Ja noch mehr, die Oktaederlinien a : b fallen mit $\sigma\sigma$ und die Granatoeder b : ∞a und a : ∞b mit $\alpha\alpha$ und $\beta\beta$ zusammen. Kurz das ganze System complicirt durch einander gezogener Linien **unten** verwandelt sich **oben** in einen großen einfachen Wirtelstern, dessen Strahlen alle von dem gemeinsamen Außenpunkte c ausstrahlen. Denn alles, was unten in einem Systeme paralleler Sectionslinien auftritt, fällt oben in einen gemeinsamen Strahl zusammen. In unserm Beispiel zeigen sich die acht Linien des Oktaeder und Granatoeder oben nicht mehr. Die Punkte sind alle durch die Länge der Radien bestimmt, d. h. durch die Entfernung vom Mittelpunkte, weil der Strahl durch seine Lage gegen die Axen $\alpha\alpha$ und $\beta\beta$ gegeben ist. Im regulären System bleibt

$$a = b = \alpha = \beta = 1.$$



Ist uns irgend eine Zonenaxe c : s in der Linearprojection (unten) gegeben, so ist ihr Ort in der obern Projectionsebene $\sigma = \frac{1}{s}$, für c = 1.

Wir denken uns jetzt eine Verticalebene (Aufriß) durch einen beliebigen Punkt und Strahl s gelegt, so muß dieselbe beide Projectionsebenen in derselben Richtung schneiden. Wird nun vom Mittelpunkte o des Krystallsystems ein Perpendikel auf die Zonenaxe c : s gefällt, so schneide diese den obern Strahl in σ. Bei der Aehnlichkeit der Dreiecke ocs und ocσ verhält sich

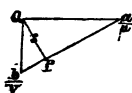
$$os : oc = oc : c\sigma$$
$$s : c = c : \sigma$$

$$\sigma = \frac{c^2}{s} \text{ gibt für } c = 1, \ \sigma = \frac{1}{s} \text{ und umgekehrt } s = \frac{1}{\sigma}.$$

Da wir beim Rechnen die aufrechte Axe meist = 1 setzen, so ist der Ort unserer Zonenaxen ein bloßes Ablesen von der Figur.

Beispiele. Die Oktaederkante tab. 4 fig. 1 a:c hat ihren Ort in α. Da nun das Granatoeder die Oktaederkante gerade abstumpft, so fällt der Ort von beiden mit $\alpha = a$ zusammen. Der Ort der Diagonale c : 2a des gewöhnlichen Pyramidenwürfels hat $\frac{\alpha}{2}$. Denn $c = a = \alpha = 1$, folglich $s = 2$ und $\sigma = \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$. Für die Granatoederkante ist $s = \sqrt{2}$, also in der obern Ebene ihr Ort $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{s}{2}$. Da das Leucitoeder c : 2a : 2a diese Granatoederkante gerade abstumpft, so fällt der Ort der Leucitfläche 1, in der Sectionslinie des Oktaeders gelegen, damit zusammen.

Suchen wir uns zu einer beliebigen Sectionslinie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ den zugehörigen Strahl.



$$s = \frac{ab}{\sqrt{\nu^2 a^2 + \mu^2 b^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}},$$

so ist der Ort der zugehörigen Zonenaxe c:s in der obern

$$\sigma = \frac{\sqrt{\nu^2 a^2 + \mu^2 b^2}}{ab} = \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}.$$

Für die Neigung der Fläche $c : \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ gegen die Axe c ist nach pag. 90

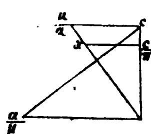
$$QP = s = \sin = \frac{a}{\mu} \cdot \frac{b}{\nu} : \sqrt{\frac{a^2}{\mu^2} + \frac{b^2}{\nu^2}}.$$

In der Ebene dieses Sinus muß auch die Senkrechte auf die Fläche liegen, welche daher mit der Senkrechten auf die Zonenaxe c : s zusammenfällt. Nennt man daher das Perpendikel Qs den zugehörigen Strahl von $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$, so darf ich für $c = 1$ den Ausdruck für s nur invertiren, um den Ort von σ in der obern Projectionsebene sofort zu erhalten.

Ist in der untern Projectionsebene eine beliebige Sectionslinie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ gegeben, so sind die Coordinaten des zugehörigen Ortes σ in der obern $\frac{\mu}{a} + \frac{\nu}{b}$.

Der Beweis liegt schon im vorigen Paragraphen. Denn wenn die Mittelpunktentfernung $\sigma = \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}}$ beträgt, so müssen die Coordinaten des Punktes $\frac{\mu}{a}, \frac{\nu}{b}$ sein. Die Bestimmung des Ortes in der obern Ebene ist also ein bloßes Ablesen.

Man kann den Satz leicht verallgemeinern: Ginge die Fläche



$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ mit ihrem obern Orte $\frac{\mu}{a} + \frac{\nu}{b}$, wobei $\frac{1}{a} = \alpha$ und $\frac{1}{b} = \beta$ gesetzt wird, nicht durch $c = 1$, sondern durch ein beliebiges $\frac{c}{\pi}$, so stände die obere Projectionsebene von der untern nicht um $c = 1$ ab, sondern um ein beliebiges Stück $\frac{c}{\pi}$, und es verhielte sich

$$\frac{a}{\mu} : \frac{c}{\pi} = \frac{c}{\pi} : x,$$

folglich wäre der Ort $x = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{c^2}{\pi^2}$; ebenso für $\frac{b}{\nu}$ würde die Mittelpunktsentfernung $y = \frac{\nu}{b} \cdot \frac{c^2}{\pi^2}$. Die Coordinaten des Ortes einer Fläche

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi} \text{ wären } \frac{\mu \cdot c^2}{a \cdot \pi^2} + \frac{\nu \cdot c^2}{b \cdot \pi^2} + \frac{c}{\pi} = \frac{\mu}{a} + \frac{\nu}{b} + \frac{\pi}{c},$$

wenn man mit $\frac{\pi^2}{c^2}$ dividirt. Also ebenfalls eine einfache Umkehrung.

Da es sich bei den Axenschnitten blos um das gegenseitige Verhältniß handelt, so kann man alle durch Division auf die reine Bruchform mit dem Zähler 1 bringen. Schon Bernhardi pag. 28 wies das nach, und bediente sich solcher Brüche um so lieber, da es kleinere Zahlen gab. Statt der Brüche ließ er dann den selbstverständlichen Nenner 1 weg, so daß er $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ blos 1 2 3, auch wohl $\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}$ (Bernhardi, Beitr. zur nähern Kenntniß regelm. Kryst. 1826) schrieb, um durch den Querstrich die Bruchform anzuzeigen. Graßmann pag. 58 knüpfte an die Combinationslehre an, kam dabei auf dieselben Zeichen, und liebte schon die Sache auf der Kugel darzustellen, wie es dann Miller pag. 69 später so bevorzugte. Da das Symbol nicht mißgedeutet werden kann, wenn man die Zahlen nach den Buchstaben abc lexicographisch ordnet, also eine Fläche $\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}b : c = 231$, $\frac{1}{5}a : \infty c : \frac{1}{3}b = 530$ ꝛc. schreibt, so bediene ich mich wegen der Kürze auch öfter gern des Zeichens. Uebrigens ist der Ort des Punktes $\frac{\mu}{a}\ \frac{\nu}{b}\ \frac{\pi}{c} = \mu\nu\pi$ die gewöhnliche mathe-

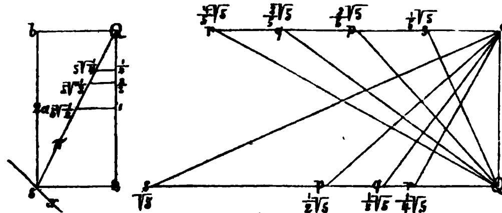
matische Bezeichnung der Lage eines Punktes gegen die drei Axen des Krystalls, den Mittelpunkt Q des Systems als Nullpunkt genommen.

Wenn die Zonen in der untern Projectionsebene durch die Wirtelstellung der Flächen in einem Punkte (**Zonenpunkt**), so müssen sie in der obern durch eine gerade Linie (**Zonenlinie**) bezeichnet sein.

Denken wir aus irgend einem Punkte innerhalb einer Säule, die ja eine Zone bildet, Perpendikel auf die Flächen gefällt, so liegen alle diese Perpendikel in einer Ebene, die jetzt zur **Zonenebene** geworden ist und senkrecht auf der Säulenaxe (**Zonenaxe**) steht. Wo nun auch diese Zonenebene die obere Projectionsebene treffen mag, sie kann nur in einer geraden Linie schneiden, worin daher sämmtliche Orte des Zonenwirtels liegen müssen. Am leichtesten macht man sich die Sache an der vordern Verticalzone klar, welche mit ihren parallelen Sectionslinien auf der untern Projectionsebene die Axe a senkrecht schneidet. Die Zonenebene muß dann oben in α liegen, da sie mit der Axenebene ac zusammenfällt. Nur der Ort einer einzigen, der Axenebene bc, liegt im Unendlichen, was man durch einen Pfeil mit dem Zeichen ∞ andeuten kann.

Was auf der untern Projectionsebene centrifugal, tritt auf der obern centripetal und umgekehrt auf.

Es ist das eine der angenehmsten Eigenschaften beider Projections-



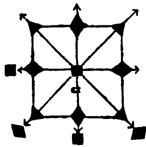
methoden. Schon Neumann bemerkt darüber treffend, was bei dem einen gleichsam nach innen gewandt sei, Zonenebenen und Perpendikel auf die Flächen (Flächenrichtungen), sei bei dem andern nach außen, Krystallflächen und Zonenaxen. Machen wir uns den Aufriß durch einen Centralstrahl des Pyramidenwürfels $\pi = 2a : b$, und setzen $a = b = c = 1$ (siehe kleine Figur links), so ist die Entfernung vom Mittelpunkte Q

$s = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$, in der obern Projectionsebene der Ort der Zonenaxe $cs = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$ (siehe große Figur rechts oben).

Von $\sqrt{m}$ allgemein $\frac{1}{m}\sqrt{m}$. Wie unten der Punkt s durch $2a + b$ gegeben ist, so oben durch $\frac{2}{5}\alpha + \frac{1}{5}\beta$. Die Sectionslinie x, welche senkrecht auf π steht, geht daher $\frac{5}{2}a : 5b$, denn

$$\tfrac{5}{2} \cdot 5 : \sqrt{\frac{5^2}{2^2} + 5^2} = \sqrt{5} = s.$$

Punkt $p = a + \frac{1}{2}b$, vom Mittelpunkte $\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ entfernt, hat $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ oben zum Ort. Punkt $q = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$ hat unten $\frac{1}{3}\sqrt{5}$, oben $\frac{3}{5}\sqrt{5}$. Punkt $r = \frac{a}{2} + \frac{b}{4}$ ist unten $\frac{1}{4}\sqrt{5}$ oben $\frac{4}{5}\sqrt{5}$ entfernt. Eine Näherung unten bedeutet eine entsprechende Entfernung oben. Hätten wir einen Punkt $4a + 2b$ unten, so gäbe das $s = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$, oben dagegen $\sigma = \frac{1}{10}\sqrt{5}$. Immer bleiben es aber oben wie unten rationale Theile von dem gleichen irrationalen Grundverhältniß $\sqrt{5}$. Uebrigens werden auch oben die Dimensionen nach innen bald so klein, daß sie kein rechtes Urtheil mehr zulassen.



Bezeichnen in der obern Projectionsebene die vier Dreiecke die Orte der Oktaederflächen, so entsprechen die sechs Verbindungslinien (Granatoeder-Sectionslinien) den Kantenzonen des Oktaeders.

Im regulären Systeme nehmen die gleichseitigen Dreiecke die Ecken eines Quadrats ein. Daraus folgt dann sogleich, daß wenn die Axen $a = a = 1$ gesetzt werden, die Zwischenaxen $= \sqrt{2}$ sein müssen. Die sechs möglichen Linien (Binionen) entsprechen den Sectionslinien des Granatoeders, auf dessen vier sechsseitigen Säulen je eine Oktaederfläche senkrecht steht. Am besten wird die Sache klar, wenn man in das Centrum der vier Flächen eines Oktaeders senkrecht Nadeln steckt, und so lang macht, daß die vier Nadelköpfe mit der Endecke des Oktaeders in eine Ebene fallen, d. h. in der obern Projectionsebene liegen: es entsprechen dann die vier äußern Linien den Endkantenzonen, die zwei innern durch den Mittelpunkt gehenden den Seitenkantenzonen. Man sieht auch sofort ein, daß der Durchschnitt von den Zonenlinien der Seitenkanten im Centrum den Ort der Würfelfläche bestimmt. Dies führt uns zu folgendem allgemeinen Satze:

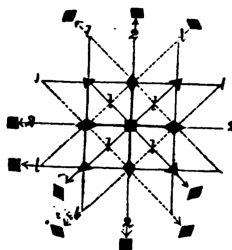
Wie der Durchschnitt der Sectionslinien auf der untern Projectionsebene eine Zonenaxe, so bestimmt der Durchschnitt der Zonenlinie auf der obern den Ort einer Fläche.

Damit ist nun wieder ein anderes Deductionsverfahren eingeleitet, welches Herr Neumann in seinen krystallonomischen Beiträgen schon nach allen Seiten erschöpft hat. Wir gelangen hier schneller und leichter zum Ziele, weil man beim Projiciren überhaupt mehr Punkte als Linien bekommt, und jeder Punkt beim beliebigsten Ziehen eine neue Fläche bedeutet. Die Zonenlinien der zwei Seitenkanten des Oktaeders (Diagonalen des Vierecks) geben uns im Centrum den Ort der Würfelfläche (Quadrat); die Orte der beiden andern Würfelflächen liegen im Unendlichen, wie die Pfeile der Axen α anzeigen, und werden durch einander

gegenüberliegende Parallelen des Vierecks bestimmt. Ziehe ich nun weiter die Würfelkantenzonen, welche vom Quadrate im Centrum zu je einem Quadrate im Unendlichen gehen, so liefern diese im „Conflict" (Schnitt) mit den Endkantenzonenlinien des Oktaeders die Orte von vier Granatoederflächen (Rhombus); die beiden andern Rhomben liegen im Unendlichen, denn sie werden bestimmt durch den Conflict, welchen die Würfelkantenzonenlinien der im Unendlichen liegenden Quadrate mit den Seitenkantenzonenlinien des Oktaeders bilden. Wir haben also mit acht Linien, den Sectionslinien des Granatoeders und Würfels, die Orte von dreizehn Flächen gefunden, brauchen daher vier Linien weniger, als bei der Linearmethode. Würden wir jetzt diese vier, welche den Sectionslinien des Oktaeders angehören, noch ziehen, so leuchtet ein, daß nur beim Würfel die Zonenpunkte der untern mit den Flächenorten der obern Projectionsebene zusammenfallen; die sechs Zonenpunkte der Oktaederkanten dagegen mit den Orten der sechs Granatoederflächen; endlich die vier Zonenpunkte der Granatoederkante mit den Orten der vier Oktaederflächen. Wir haben also nur auf die Zahl zu sehen, um sofort orientirt zu sein.

Die vier Linien der Granatoederkantenzonen (von Rhombus zu Rhombus), den Oktaedersectionslinien entsprechend, liefern uns in den Kantenzonenlinien der Oktaeder die Orte der Leucitoederflächen

$$a : a : \tfrac{1}{2}a = 1.$$



Die äußern acht Punkte 1 haben in der obern Projectionsebene die Coordinatenzeichen $2\alpha + \alpha$, folglich unten $\frac{1}{2}a + a$; die innern dagegen $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha$, folglich unten $2a + 2a$. Da nun allen, unten wie oben, die dritte Axe $c = a$ gemein ist, so gehört Punkt 1 einem Körper $a : a : \frac{1}{2}a = 2a : 2a : a$ an. Das Verhältniß ist übrigens vollständig reciprok: dächten wir uns die Zonenaxe der untern Projectionsebene als Senkrechte, so würde ein Punkt $2a + a$ unten einem $\frac{1}{2}\alpha + \alpha$ oben, ebenso $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$ unten einem $2\alpha + 2\alpha$ oben entsprechen. Die Flächen bekämen jetzt den Ausdruck $\alpha : \alpha : \frac{1}{2}\alpha$ 2c. Mit 12 Linien haben wir die Orte von 25 Flächen bestimmt. Es sind die bekannten 25 Zonenpunkte, die sich jetzt unter die Flächen vertheilen: 12 Diagonalzonen gehören dem Leucitoeder 1; sechs Oktaederkantenzonen dem Granatoeder; vier Granatoederkantenzonen dem Oktaeder; drei Würfelkantenzonen dem Würfel. Durch dieses Werfen von einer Projectionsebene in die andere kommt die Anschauung gleichsam erst recht in den Fluß, und was einst Bernhardi noch für so schwierig hielt, wird bei gehöriger Uebung zum Spiel: im Rhombus schneiden sich Würfel- und Oktaederkantenzonenlinien, daher kann ich beide, Würfel- und Oktaederkante, in die Granatoederfläche einschreiben; im Dreiecke

schneiden sich drei Oktaederkantenzonenlinien, es sind die Diagonalen der Oktaederflächen; im Quadrate schneiden sich zwei Oktaeder- und zwei Würfelkantenzonen, die auf einander rechtwinklich stehen. Die Granatoederkante muß auf die Oktaederfläche rechtwinklich stehen, weil sie gleichen Zahlen 4 angehören; ebenso die Diagonallinie der Oktaederfläche auf die gegenüberliegende Leucitoederfläche. Oktaedersectionslinien unten haben sich mit den Granatoederkantenzonenlinien oben, und Granatoedersectionslinien mit Oktaederkantenzonenlinien vertauscht. Nur der Würfel ist sich gleich geblieben, die Flächenorte oben fallen mit den Zonenpunkten unten zusammen, aber beziehen sich auf Flächen, die gegen einander senkrecht stehen.

Die Sectionslinien des Würfels, Granatoeders und Pyramidenwürfels geben uns bei rechtwinklichen wie schiefwinklichen Axen die Coordinaten der gesuchten Orte, man kann sie daher geradezu **Coordinatenlinien** nennen, und diese Benennung bei der Kugelprojection auf die entsprechenden Kreise (**Coordinatenkreise**) übertragen, da die Entwickelung auch hier ganz analog wird.

Verbinden wir endlich die l mit den Orten der Würfelflächen, was unten die zwölf Sectionslinien des gewöhnlichen Pyramidenwürfels π gibt, so haben wir oben die Orte sämmtlicher regulären Körper eingesetzt.

Schon im Handbuche der Mineralogie 1863 pag. 108 legte ich das an einer größern Figur dar, ähnlich unserer tab. 4 fig. 1. Cardinalpunkte sind die Orte des Würfels (Quadrat), Oktaeders (Dreiecke) und Granatoeders (Rhomben). Dazwischen erhalten wir nun zunächst in den Axen der obern Projectionsebene die Pyramidenwürfel $\pi = \frac{1}{2}\alpha + 0$ und $2\alpha + 0$, die sich in der untern blos vertauschen, und allgemein den Flächen $a : \frac{1}{2}a : \infty a$ angehören. Das **Pyramidenoktaeder** p hat vier Flächen $2\alpha + 2\alpha$ außen und acht $\alpha + \frac{1}{2}\alpha$ innen: jene vier entsprechen einer Sectionslinie

$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}a : c = a : a : 2c;$$

diese acht einer Sectionslinie $a : 2a : c$. Das **Leucitoeder** l hat umgekehrt vier Flächen $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$ innen, und acht $\alpha + 2\alpha$ außen: dort entsprechen sie der Fläche

$$2a : 2a : c = a : a : \tfrac{1}{2}c;$$

hier einer $a : \frac{1}{2}a : c$. Das **Pyramidengranatoeder** kommt in jedem Quadranten $2 + 2 + 2 = 6$mal vor.

$$\begin{array}{ll} \text{innen} & \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\alpha \ldots \frac{3}{2}a : 3a : c = \frac{1}{2}a : a : \frac{1}{3}c; \\ \text{mitten} & \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha \ldots \frac{2}{3}a : 2a : c = \frac{1}{3}a : a : \frac{1}{2}c; \\ \text{außen} & 3\alpha + 2\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a : c. \end{array}$$

Endlich bleiben noch die Punkte der Sectionslinien des Pyramiden-

würfels unter einander $y = \frac{a}{2} + \frac{a}{4}, \frac{a}{2} + 2a$, $4a + 2a$, welche dem gebrochenen Pyramidenwürfel $a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a$ angehören.

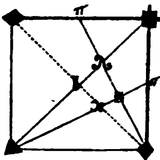
Die Entwickelung ist außerordentlich klar, und jeder Punkt sogleich gefunden, schon die Symmetrie und die Zahl der Sectionslinien führt darauf: Würfel stehen senkrecht gegen Würfel-, Granatoeder-, Pyramidenwürfelsäule; Oktaeder gegen drei Granatoederkanten; Granatoeder gegen eine Oktaederkante mit Würfel und Granatoederfläche; Leucitoeder l gegen die Diagonalzone des Oktaeders mit einer Kante des scharfen Oktaeders zweier Pyramidenwürfelflächen; Pyramidenoktaeder p gegen Pyramidenwürfelkante mit Granatoederfläche; Pyramidengranatoeder x gegen den Schnitt einer Oktaeder- und Pyramidenwürfelfläche, welche jederseits neben den Diagonalen des Oktaeders herablaufen. Zuletzt bleiben für das 48flach y noch die Schnitte der Pyramidenwürfelflächen unter einander übrig. Wir haben hier also mit $3 + 4 + 6 + 12 = 25$ Flächen erreicht, was wir mit 25 Punkten durch eine mühsame Arbeit nicht vollständig ins Werk setzen zu können bedauerten pag. 148. Denn früher mußten wir

$$3 + 4 + 6 + 3 \,.\, 12 + 2 \,.\, 24 = 97 \text{ Linien}$$

ziehen und zahllose Punkte vernachlässigen; jetzt ist mit ebensoviel Punkten die ganze Entwickelung in großartiger Einfachheit abgemacht. Aber der Umweg hat doch genützt, er führt uns zum tiefern Verständniß.

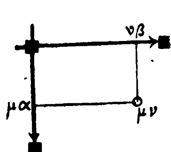
Schon durch Verbindung der $3 + 4 + 6 = 13$ Punkte unter einander entstehen die Orte der Körper unserer Linearmethode (mit Zonenpunkten).

Wir sahen oben pag. 148 unangenehmer Weise, daß bei Verbindung der 25 Punkte das Pyramidenoktaeder fehlte, statt dessen ein Leucitoid $\lambda = a : a : \frac{1}{3}a$ entstand, und hinter dem Pyramidengranatoeder $a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a$ das 48flach $a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{5}a$ kam. Ganz dasselbe wird durch die Verbindung der 13 Punkte in der obern Projectionsebene erreicht. Statt der Sectionslinie des Pyramidenwürfels tritt jetzt die des Leucitoeders $l = a : a : \frac{1}{2}a$ auf, welche die Oktaeder- mit den Granatoederflächenorten verbindet. Man muß also nicht einmal mehr die Diagonalzonen zu Hilfe nehmen. Das einzusehen, brauchen wir nur in fig. 1 tab. 4 zwei Leucitoederlinien gehörig zu ziehen, oder nebenstehendes kleines Viereck mit zwei Würfel-, einer Oktaeder-, drei Granatoeder- und zwei Leucitoederflächen zu entwerfen. Darin setzt sich dann außer den bekannten Orten vom Würfel, Oktaeder, Granatoeder, Pyramidenwürfel π, Leucitoeder l, Pyramidengranatoeder x, noch das Leucitoid $\lambda = \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\alpha \ldots 3a : 3a : a = a : a : \frac{1}{3}a$ und 48flach $z = \frac{3}{5}\alpha + \frac{1}{5}\alpha \ldots \frac{5}{3}a : 5a : a = \frac{1}{3}a : a : \frac{1}{5}a$ ein. Das Verfahren wird dadurch immer compendiöser.



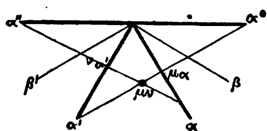
Läßt sich der Ort einer Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ in der obern Projectionsebene nicht deduciren, so geben die Zonenlinien der zugehörigen Pyramidenwürfel den gesuchten Ort $\mu\alpha + \nu\beta = \mu\nu$.

Der Pyramidenwürfel $\frac{a}{\mu} : c : \infty b$ stumpft die vordere, der $\frac{b}{\nu} : c : \infty a$



die seitliche Endkante des Oktaides $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ ab. Sie verhalten sich wie Rhombenoktaeder und Oblongoktaeder, jenes fällt in die Diagonalzone von diesem. Geht aber die Ebene einer Axe parallel, so fällt ihr Ort mit dem der Diagonale zusammen. Daher hat die Fläche $\frac{a}{\mu} : \infty b$ ihren Ort in $\mu\alpha$, $\frac{b}{\nu} : \infty a$ dagegen in $\nu\beta$, in der Diagonale liegt zu gleicher Zeit auch die Würfelfläche, ich darf daher nur durch $\mu\alpha$ eine Linie parallel der Axe β, und durch $\nu\beta$ eine parallel der Axe α, d. h. je nach dem Orte der Würfelfläche im Unendlichen ziehen, wie der Pfeil andeutet, so ist $\mu\nu$ der gesuchte Ort. Daher mußte z. B. der Ort der Oktaederflächen oben, wie die Granatoederkanten unten liegen, weil die Oktaederfläche in die Diagonalzone zweier anliegenden Granatoederflächen fällt. Darin liegt zugleich der tiefere Grund, warum die Sectionslinien des Pyramidenwürfels vor denen des Leucitoeders den Vorzug verdienten, denn die Orte jener lassen sich durch eine, diese nur durch zwei Diagonalen finden. Im Grunde haben wir weiter nichts gethan, als die Coordinaten der Punkte $\mu\alpha$ und $\nu\beta$ gezogen, in ihrem Durchschnitt liegt der neue Flächenort $\mu\nu$.

Auch auf die **dreiundeinaxigen Systeme** findet die Diagonalzone die einfachste Anwendung, wie das Hr. Prof. Neumann (Beiträge zur Krystallonomie §. 9) so vortrefflich nachwies. Habe ich eine Fläche



$$\frac{a}{\mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{a''}{\nu - \mu} : c,$$

so darf ich nur für $c = 1$ die Orte

$$\frac{\mu}{a} = \mu\alpha \text{ und } \frac{\nu}{a'} = \nu\alpha'$$

suchen, an $\mu\alpha$ und $\nu\alpha'$ senkrechte errichten, so ist der Durchschnittspunkt $\mu\nu$ der gesuchte Flächenort. Denn die Zonenaxe $c : \frac{a}{\mu}$ ist die Diagonale von einer

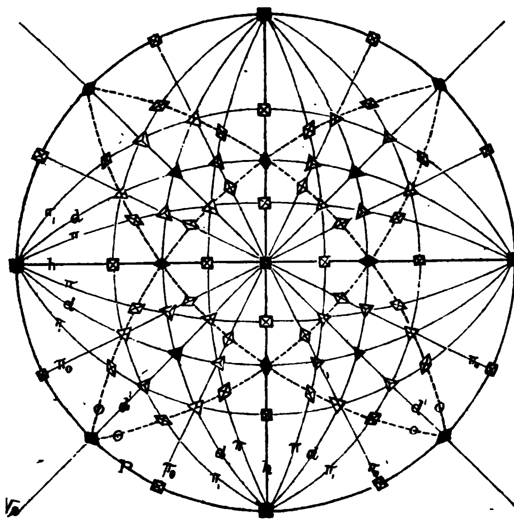
$$\text{Dihexaederfläche } \frac{2a^0}{\mu} : \frac{a}{\mu} : \frac{2a'}{\mu};$$

ebenso die e : $\frac{a'}{\nu}$ von $\frac{2a}{\nu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{2a''}{\nu}$.

Ziehe ich nun die entsprechenden Diagonalzonen, welche durch die Richtungen von β und β', denen sie parallel gehen, bestimmt sind, so ergibt sich der gesuchte Ort.

Kugelprojection. Verlegen wir den Mittelpunkt des Krystalls in den einer Kugel, und ziehen vom Mittelpunkte Perpendikel auf die Flächen, so geben diese Perpendikel im Durchschnittspunkt mit der Kugelfläche die gesuchten Flächenorte.

Auch diese Art der Darstellung war eine der ingenieusen Ideen Neumann's (Krystallonom. §. 28 pag. 55). Die Zerrbilder, welche wir bei den Projectionen auf die Ebene namentlich an den Außenrändern bekommen, wölben sich dann in schönster Regel. Im Wesentlichen haben wir die Aufgabe oben bei der Linearmethode schon gelöst, wir brauchen nur an den betreffenden Stellen die Zeichen für die Flächenorte einzutragen. Für die Symbole der Orte der sieben Körper empfehlen sich die Zeichen pag. 149, weil sie uns zu gleicher Zeit einen Einblick in die Form der gemeinten Körper geben: Quadrat ist Würfel, Dreieck Oktaeder, Rhombus Granatoeder; Diagonalen-Quadrat Pyramidenwürfel, Diagonalen-Dreieck Pyramidenoktaeder, Diagonalen-Rhombus Pyramidengranatoeder. Dann bleibt das Deltoid-Dreieck für das Leucitoeder. Dabei stellt man die Symbole in die Lage, welche ihre Flächen gegen die Kugel einnehmen, und macht bei den gekreuzten, wo die Größe der Figur es erlaubt, je ein Dreieck oder Deltoid da schwarz, wo es seinen Ort hat. Dann bleiben wir stets mit der Natur in schönster Harmonie.



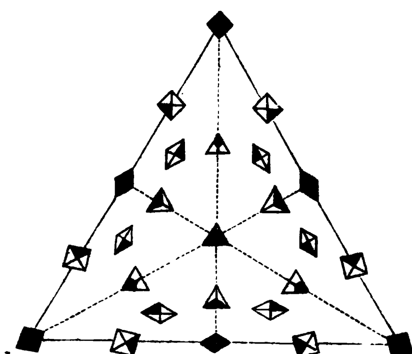
Wollen wir nach Anleitung von pag. 139 die Kugelprojection auf die **Würfelfläche** entwerfen, so ziehen wir einen Projectionskreis P, welcher dem Zonenkreise der Würfelkante entspricht, theilen ihn durch die Zonenlinien hh des Würfels in vier Quadranten, ziehen mit der Quadrantensehne = $\sqrt{2}$ (für den Radius = 1) um die Orte des Würfels

im Projectionskreise die vier Granatoederkreise dddd, so entstehen durch die Schnitte der Kreise die Orte der Oktaeder. Durch diese und den Mittelpunkt gehen die Zwischenlinien d'd', welche den Projectionskreis in acht Theile theilen. Auf diesen Zwischenlinien $\sqrt{2}$ vom Centrum entfernt liegen die Mittelpunkte der gestrichelten Oktaederkreise, deren Radius $\sqrt{3}$ ist. Wie ein Blick auf die Linearfigur gibt, gehen die Radien πo des Pyramidenwürfels durch die Schnitte der Granatoeder- und Oktaederkreise, welche die Orte der Leucitoeder bestimmen. Das innerste Oktaeder π des Pyramidenwürfels ist das zweite schärfere vom Granatoeder, dessen Kreismittelpunkt um die Einheit vom Centrum des Tafelkreises entfernt war, daher ist das Centrum von π vom Mittelpunkte des Tafelkreises um 2 und das des äußern π, um $\frac{1}{2}$ entfernt, und damit die Figur fertig. Die **practische Regel** ist: mache ein rechtwinkliches Axenkreuz, trage darauf vom Mittelpunkte aus $\frac{a}{2}$, a, 2a ab, so sind das die Mittelpunkte der drei **Coordinatenkreise** von π und g. Für die noch fehlenden Oktaederkreise müssen wir weiter durch Kreisschlagen mit a um a den Mittelpunkt suchen. Dies setzt uns dann $x = a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a$ ein. Lassen wir die Oktaederkreise weg, so bekommen wir außer sämmtlichen andern Körpern nur $y = a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a$. Die Figuren werden jetzt kleiner und geschlossener, als bei der Linearprojection auf die Ebene tab. 4 fig. 1. Da im Regulären alle Axen gleich sind, und namentlich auch $\alpha = a$ wird, so haben die Figuren die angenehme Eigenschaft, daß die Körper der Sectionslinien zu den gleichnamigen Flächenorten sich nicht reciprok verhalten. Oktaeder, Granatoeder und Pyramidenwürfel sind dieselben, wie die zu den Orten gehörigen gleichnamigen Flächen. Nur muß man immer bedenken, daß der Ort einer Fläche den Pol ihrer zugehörigen Sectionslinie bildet, also 90° davon entfernt ist.

Kleine Figuren werden durch die vielen Symbole leicht überladen, man braucht daher nur einen Quadranten zu füllen, und kann das andere zu andern Zwecken offen lassen. Da man um die regulären Körper eine Kugel schreiben kann, so erleichtert das das Hineindenken in die Lage der Flächen. Natürlich fehlt von jeder Fläche die Parallele, blos im Projectionskreise sind die gegenüberliegenden vorhanden. Es sind die Flächen, welche auf der Ebene ins Unendliche fallen, und deshalb auch dort auf zwei Seiten angegeben werden konnten.

Ein durch die Diagonalen getheiltes Dreieck mit den Symbolen genügt, um den Zusammenhang der Körper mit den Augen zu verfolgen, und die Orte der verschiedenen Körper sofort zu erkennen.

Es hat schon Naumann pag. 55 durch ein freilich ganz anderes Schema etwas Aehnliches beabsichtigt, nur daß es da minder in die Augen tritt. Wir geben nichts weiter als den Oktanten eines Trigonal-



polyeders (48flach), auf dessen dreierlei Ecken (Polen) die Würfel-Oktaeder-, Granatoederflächen fallen. Ihre Orte stehen selbstverständlich fest. Dagegen spielen zwischen Würfel und Oktaeder die Leucitoeder (Deltoeder) ma : ma : a, wo m größer als 1 ist: je größer m wird, desto mehr nähert sich der Körper nach Form und Ort dem Würfel ∞a:∞a:a; je kleiner, desto mehr dem Oktaeder a : a : a. Aus der Linie kann der Ort nicht herausfallen. Dasselbe gilt vom Pyramidenoktaeder a : a : ma auf der Linie zwischen Oktaeder und Granatoeder: wird m groß, so nähert es sich nach Form und Stellung dem Granatoeder a : a : ∞a; wird es kleiner, dem Oktaeder a : a : a, denn dort nähert es sich dem Unendlich, hier dagegen der Eins. Der Pyramidenwürfel a : ma : ∞a hat seinen Lauf zwischen Würfel und Granatoeder: je größer m, desto würfelähnlicher, und desto näher sein Ort dem Pole; je kleiner, desto granatoederähnlicher und desto näher sein Ort an der Diagonale. Je näher also der Ort unserer 24flächner einer der drei Polflächen liegt, desto ähnlicher wird er ihr. Diese Polflächen bedeuten die Unionen. Jetzt kommen die Binionen: je mehr zwei 24flächner mit ihren Orten einer der Polebenen sich nähern, desto ähnlicher werden sie unter einander, weil beider Form der gemeinsamen dritten immer gleicher wird. Diese Aehnlichkeit kann daher zwischen Pyramidenwürfel und Pyramidenoktaeder in Beziehung auf das Granatoeder stattfinden; zwischen Leucitoiden und Pyramidenwürfel in Beziehung auf Würfel; zwischen Leucitoiden und Pyramidenoktaeder in Beziehung auf Oktaeder. Der Achtundvierzigflächner steht auf der Fläche als siebenter zwischen sechsen inne, und kann daher allen zusteuern. Für ihn müßte ein ganz bewegliches Zeichen geschaffen werden, aber der Einfachheit wegen gab ich den Pyramidengranatoedern den Vorzug, obwohl dieselben nur zwischen dem bestimmten Leucitoeder a : a : $\frac{1}{2}$a und dem Granatoeder stehen, denn alle müssen geknickte Leucitoeder sein. Knicken kann ich das Deltoid pag. 116 nur nach seiner symmetrisch gelagerten Diagonale, der einzige Fall, wo die Dreiecke congruent werden. Ein geknicktes Leucitoeder ist aber zu gleicher Zeit auch ein geknicktes Pyramidenoktaeder und ein geknickter Pyramidenwürfel. Die Deltoeder bilden daher gleichsam die Regulatoren der Anschauung. Pyramidengranatoeder müssen die Kante des Granatoeders zuschärfen, also in der untern Projectionsebene in der ersten Kantenzone 1 + 1 liegen, d. h. den Ausdruck

$a : \frac{1}{m} a : \frac{1}{m+1} a$ haben, worunter $a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a$ und $a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a$ die gewöhnlichen sind. Was über diese Linie hinauf zum Würfel oder hinab zum Oktaeder geht, ist ein gebrochenes Leucitoid, das eben den Gestalten um so ähnlicher wird, je mehr sich die Orte ihnen nähern.

Die Projection auf die Ebene verdient dennoch vor der Kugelprojection den Vorzug, da man die Axenschnitte dort leichter ablesen kann, als hier.

Besonders erleichtert ist das bei der Projection auf die **Würfelfläche**, welche uns die **viergliedrige** Stellung gibt. Denn in diesem Falle wird $a = b = c = \alpha = \beta = 1$. Axe c ist beiden gemein, wir können sie ganz außer Acht lassen, blos mit den Punkten und Linien in den Projectionsebenen handeln, und brauchen dabei gar nicht an obere und untere zu denken.

	Körper.	Sectionslinie.	Ort.	4gl. Stellung.
h	Würfel	$\infty a : \infty a$,	$o\alpha + o\alpha$ . .	Geradendfläche.
	desgl.	$oa : \infty a$,	$\infty\alpha + o\alpha$.	2. Quadratsäule.
o	Oktaeder	$a : a$,	$\alpha + \alpha$ . .	Oktaeder 1. Ordn.
d	Granatoeder . .	$a : \infty a$,	$\alpha + o\alpha$ . .	Oktaeder 2. Ordn.
	desgl.	$oa : oa$,	$\infty\alpha + \infty\alpha$.	1. Quadratsäule.
π	Pyramidenwürfel	$2a : \infty a$,	$\frac{1}{2}\alpha + o\alpha$ . .	Oktaeder 2. Ordn.
	desgl.	$\frac{1}{2}a : \infty a$,	$2\alpha + o\alpha$ . .	Oktaeder 2. Ordn.
	desgl.	$oa : o2a$,	$\infty\alpha + \infty 2\alpha$.	4+4kantig. Säule.
l	Leucitoeder	$2a : 2a$,	$\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha$ . .	Oktaeder 1. Ordn.
	desgl.	$a : \frac{1}{2}a$,	$\alpha + 2\alpha$ . .	Vierkantner.
p	Pyramidenoktaed.	$\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a$,	$2\alpha + 2\alpha$ . .	Oktaeder 1. Ordn.
	desgl.	$2a : a$,	$\frac{1}{2}\alpha + \alpha$ . . .	Vierkantner.
x	Pyramidengranat.	$\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a$,	$3\alpha + 2\alpha$ . .	Vierkantner.
	desgl.	$\frac{2}{3}a : 2a$,	$\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha$ . .	Vierkantner.
	desgl.	$\frac{5}{2}a : 3a$,	$\frac{2}{5}\alpha + \frac{1}{3}\alpha$ . .	Vierkantner.
y	48flächner . . .	$\frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a$,	$2\alpha + 4\alpha$ ꝛc.	

Ich darf also die Brüche gegenseitig blos umkehren, um aus der einen Columne die andere abzulesen. Eigentlich hätte man eine Columne, die lateinischen oder griechischen Axen stricheln sollen. Denn da die Flächenorte von den Sectionslinien 90° entfernt sein müssen, so fallen sie in entgegengesetzte Quadranten. Dabei stehen die Orte der Flächen vom:

h	Würfel senkrecht über dem Linienwirtel	hhdd$\pi\pi\pi\pi$ der Würfelkante;
o	Oktaeder	ddd der Granatoederkante;
d	Granatoeder	oohd der Oktaederkante;
l	Leucitoeder	od$\pi\pi$ der Oktaederdiagonale;
p	Pyramidenoktaeder	d$\pi\pi$;
π	Pyramidenwürfel	hπ;
x	Pyramidengranatoeder	oπ;
y	Achtundvierzigflach	$\pi\pi$.

So sind wir in den Stand gesetzt, auf jeder beliebigen Projectionsfigur dieser Körper, Sectionslinien und Orte auseinander abzuleiten.

Die **Perpendikel auf die Flächen zu erlangen, gibt es zweierlei Wege:**

1. Wie **Neumann** kann man die Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi}$ gegeben denken, und fällt darauf das Perpendikel p, welches dann als eine vom Nullpunkte ausstrahlende Linie die Coordinaten $\frac{\mu}{a} + \frac{\nu}{b} + \frac{\pi}{c}$ hat, pag. 154. Oder

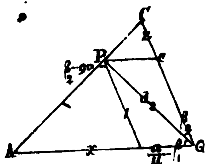
2. Wie **Graßmann** ist ein beliebiger Strahl $s = \frac{a}{\mu} + \frac{b}{\nu} + \frac{c}{\pi}$ gegeben, man errichtet darauf eine senkrechte Fläche, so schneidet diese die Axen in $\frac{\mu}{a} : \frac{\nu}{b} : \frac{\pi}{c}$.

Beide Weisen von Neumann und Graßmann stehen im Invertirungsverhältniß: was dort Coordinaten, sind hier Axenschnitte, und was dort Axenschnitte, hier Coordinaten. Wir brauchen es uns nur für zwei Axen a und c klar zu machen: gegeben ein Strahl QP = s durch die Coordinaten $1 + \frac{a}{\mu}$. Wir errichten die senkrechte AP auf s, so ist APQ ein rechtwinkliches Dreieck, und für rechtwinkliche Axen

$$\frac{a}{\mu} : 1 = 1 : x, \text{ oder } x = \frac{\mu}{a}.$$

Die auf s senkrechte Linie AP hat also den Ausdruck $1 : \frac{\mu}{a}$, denn die Axe a ist geblieben, und c = 1 parallel verrückt. Was für eine Axe, gilt für alle. Wenn bei Neumann die Perpendikel mit den Zonenaxen unserer Linearprojection invertiren, so fallen die Graßmann'schen Perpendikel damit zusammen. Unsere dem Auge so klar vorliegenden Zonenaxen werden dadurch zu Resultanten der wirkenden Kräfte, gegen welche die erzeugten Flächen senkrecht liegen. Graßmann pag. 58 hieß sie Träger. Das Parallelepiped, in welchem der jeweilige Träger die trigonale Axe bildet, hat zu Kanten die drei Coordinaten des Strahles. Denn haben wir im obigen Beispiele aus $1 : \frac{a}{\mu}$ das Parallelogramm PQ construirt, so dürfen wir nur in P die dritte Dimension $\frac{b}{\nu}$ senkrecht errichten, aus ihr und s ein Parallelogramm construiren, um den Strahl $S = \sqrt{1 + \frac{a^2}{\mu^2} + \frac{b^2}{\nu^2}}$ sofort zu erlangen.

Da die Deduction von rechtwinklichen Axen unabhängig ist, so



können auch schiefwinkliche zu Grunde gelegt werden. Denn hätten wir in der Diagonale QP den Ort $P = c + \frac{a}{\mu}$, zwischen den Axen QA und QC, welche sich unter dem Winkel $\beta = \beta_1 + \beta_2$ schneiden, und errichten darauf in P die senkrechte Linie AC, so frägt sich, wie werden die Axen QA und QC geschnitten. Wegen des Parallelogrammes PQ mit der Diagonale d_2 und dem rechten Winkel bei P verhält sich

$$x : \sin (90^0 - \beta_2) = 1 : \sin (90^0 - \beta_1), \text{ oder}$$

$$x : \cos \beta_2 = 1 : \cos \beta_1, \text{ d. h. } x = \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1}.$$

Ganz ebenso findet sich zwischen den Axen CB, wenn wir deren Neigungswinkel $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ setzen, $y = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}$. Daher der Ausdruck der auf den Träger senkrechten Fläche

$$x : y : 1 = \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1} : \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} : 1.$$

$$d_2 = \sqrt{1 + \frac{a^2}{\mu^2} + \frac{2a}{\mu} \cos \beta} \text{ und}$$

$$d_2 : \sin \beta = 1 : \sin \beta_1, \ \sin \beta_1 = \frac{\sin \beta}{d_2}.$$

Nennen wir die Diagonale zwischen BC d_3, so ist

$$d_3 = \sqrt{1 + \frac{b^2}{\nu^2} + \frac{2b}{\nu} \cos \alpha}, \text{ und}$$

$$d_3 : \sin \alpha = 1 : \sin \alpha_1, \ \sin \alpha_1 = \frac{\sin \alpha}{d_3}$$

$\alpha, \beta, \frac{a}{\mu}, \frac{b}{\nu}$ sind bekannte Größen, woraus ich also die Unbekannten x, y sofort ableiten kann.

Wer an dem Beweise wegen der bewegten $c = 1$ Anstoß nimmt, der muß z und z' noch zu Hilfe nehmen.

$$x : 1 = \frac{a}{\mu} : z, x . z = \frac{a}{\mu}.$$

Ebenso zwischen BC

$$y : 1 = \frac{b}{\nu} : z', \ y . z' = \frac{b}{\nu}.$$

Es geht dann Linie

AC von $\frac{a}{\mu} + x : 1 + z = xz + x : 1 + z = x(1 + z) : 1 + z = x : 1,$

BC von $\frac{b}{\nu} + y : 1 + z' = yz' + y : 1 + z' = y(1 + z') : 1 + z = y : 1$.
Oder da im rechtwinklichen Dreiecke APQ der $\sin 90^0 = 1$ ist:

$$AQ : 1 = d_2 : \cos \beta_1, \quad AQ = \frac{d_2}{\cos \beta_1}$$

$$CQ : 1 = d_2 : \cos \beta_2, \quad CQ = \frac{d_2}{\cos \beta_2}$$

$$BQ : 1 = d_3 : \cos \alpha_1, \quad BQ = \frac{d_3}{\cos \alpha_1}$$

$$C^1Q : 1 = d_3 : \cos \alpha_2, \quad C^1Q = \frac{d_3}{\cos \alpha_2}.$$ Folglich

$$CQ : AQ = \frac{d_2}{\cos \beta_2} : \frac{d_2}{\cos \beta_1} = \frac{1}{\cos \beta_2} : \frac{1}{\cos \beta_1} = 1 : \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_1},$$

$$C^1Q : BQ = \frac{d_3}{\cos \alpha_2} : \frac{d_3}{\cos \alpha_1} = \frac{1}{\cos \alpha_2} : \frac{1}{\cos \alpha_1} = 1 : \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1},$$

wie oben.

Kürzer und schematischer wenden wir die Rechensätze des Tetraides pag. 98 an. Nehmen wir eine allgemeine Fläche a : b : c, so ist

$$\cos \beta_1 = \frac{a + c \cos \beta}{d_2}, \cos \beta_2 = \frac{c + a \cos \beta}{d_2}.$$

In den rechtwinklichen Dreiecken PQA und PQC verhält sich:

$$d_2 : \cos \beta_1 = QA : \sin 90^0, \quad A = \frac{d_2}{\cos \beta_1} = \frac{d_2^2}{a + c \cos \beta},$$

$$d_2 : \cos \beta_2 = QC : \sin 90^0, \quad C = \frac{d_2}{\cos \beta_2} = \frac{d_2^2}{c + a \cos \beta};$$ denn

es ist $QA = A$, $QC = C$, $\sin 90^0 = 1$. Ganz auf dieselbe Weise gelangen wir in den Axenebenen AB und BC zu den Gleichungen:

$$d_1 : \cos \gamma_1 = A : 1, \qquad A = \frac{d_1}{\cos \gamma_1} = \frac{d_1^2}{a + b \cos \gamma},$$

$$d_1 : \cos \gamma_2 = B : 1, \qquad B = \frac{d_1}{\cos \gamma_2} = \frac{d_1^2}{b + a \cos \gamma};$$

$$d_3 : \cos \alpha_1 = B : 1, \qquad B = \frac{d_3}{\cos \alpha_1} = \frac{d_3^2}{b + c \cos \alpha},$$

$$d_3 : \cos \alpha_2 = C : 1, \qquad C = \frac{d_3}{\cos \alpha_2} = \frac{d_3^2}{c + b \cos \alpha}.$$

Daraus findet sich durch Division:

$$\frac{A}{C} = \frac{c + a \cos \beta}{a + c \cos \beta}, \frac{B}{C} = \frac{c + b \cos \alpha}{b + c \cos \alpha}, \frac{A}{B} = \frac{b + a \cos \gamma}{a + b \cos \gamma}.$$

$$\frac{A}{B} = \frac{b + a \cos \gamma}{a + b \cos \gamma} = \frac{c + a \cos \beta}{a + c \cos \beta} \cdot \frac{b + c \cos \alpha}{c + b \cos \alpha}.$$

Ich kann also γ bestimmen, wenn fünf Größen $\alpha\beta$abc bekannt sind.

Für $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$, wird cos = 0, und $\frac{A}{B} = \frac{b}{a}$. Die Axen sind also invertirt.

Die Projection auf die **Oktaederfläche** tab. 4 fig. 2 gibt uns die **dreigliedrige** Stellung. Wir dürfen aus dem Bilde nur die Orte nach so eben gegebener Anleitung eintragen.

Die drei Körper, Würfel h, Oktaeder o, Granatoeder d liefern dann die bekannte Figur pag. 143, wozu nun noch der Pyramidenwürfel $\pi\pi$, kommt, der innen einen **Dreikantner** π,, außen dagegen ein **Dihexaeder** π gibt. Wir können jedoch den eben so kurzen, vielleicht noch elegantern Weg einschlagen, und von den vier Orten der Oktaederflächen ausgehen. Dieselben stehen im Centrum und in den drei Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Verbinden wir dieselben durch die sechs gestrichelten Oktaederkantenzonenlinien (von Dreieck zu Dreieck gezogen), so gibt deren Conflict auf den Mitten der Seiten des Dreiecks die Würfelflächenorte pag. 163 (Quadrate). Durch die drei Kantenzonen des Würfels (von Quadrat zu Quadrat gezogen) entstehen auf den Oktaederkantenzonenlinien die Granatoederflächenorte (Rhomben), wovon drei im Unendlichen liegen. Durch die vier Kantenzonen des Granatoeders (von Rhombus zu Rhombus gezogen) entstehen in den sechs Oktaederkantenzonenlinien die Leucitoederflächenorte l. Sodann erzeugen die Würfel-Leucitoederzonenlinien (Sectionslinien des Pyramidenwürfels) auf den Würfelkantenzonenlinien die Flächenorte des Pyramidenwürfels π; auf den Oktaederkantenzonenlinien die Flächenorte des Pyramidenoktaeders p; auf den Granatoederkantenzonenlinien die Flächenorte des Pyramidengranatoeders x. Endlich setzen die Sectionslinien des Pyramidenwürfels unter sich noch einen 8ten nicht in die Reihe gehörigen Achtundvierzigflächner y ein.

Die Axen $a : c = \sqrt{2} : \sqrt{3}$ rechnen wir uns aus dem Würfel. Denn für die Würfelkante = 1, sind die Flächendiagonalen (Horizontalaxen a) $\sqrt{2}$, und die Eckdiagonalen (Hauptaxe c) $\sqrt{3}$.

Wir bekommen daher

$$a : c = \sqrt{2} : \sqrt{3} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} : 1$$
$$\alpha : c = \sqrt{\tfrac{3}{2}} : \sqrt{1} = \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{2}{3}} : 1 = \tfrac{3}{2}a : 1.$$

Zur Bestimmung der Orte und Sectionslinien in der Projectionsebene bedürfen wir nur zweier Axen aa, da die dritte a sich durch Subtraction ergibt, wie wir später sehen werden. Die Entfernungen der Orte von den Axen sind durch die Sectionslinien des Dihexaeders gegeben. Die Perpendikel vom Orte des Würfels (h rechts) auf die zunächst liegenden $\alpha\alpha$, welche sich unter 60^0 schneiden, gefällt, schneiden $\alpha + \alpha$ ab, daher hat die gegenüberliegende Sectionslinie des Würfels

$$\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\alpha} = a' : a'.$$

Das ist das Einzige, was man zu merken hat: die **Ausdrücke der Flächenorte gehören einer andern Abtheilung an, als die Sectionslinien.** Aus der Stellung der Punkte geht sofort hervor, in welche dreigliedrigen Körper das System zerfällt.

	Körper.	Ort	gibt Sectionslinie.	3gl. Stellung.
h	Würfel	$\alpha' + \alpha'$	$= a : a$	, Hauptrhomboeder.
oo	Oktaeder	$o\alpha + o\alpha$	$= \infty a : \infty a$	, Geradendfläche.
o	desgl.	$2\alpha + 2\alpha$	$= \frac{1}{2}a' : \frac{1}{2}a'$	, Rhomboeder 2. Ordn.
d	Granatoeder	$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$	$= 2a' : 2a'$	, desgl.
d_1	desgl.	$\frac{\infty}{2}\alpha + \infty\alpha$	$= \frac{2a}{\infty} : \frac{a}{\infty}$	, 2. sechsſ. Säule.
π	Pyramidenwürfel . .	$\frac{\alpha}{3} + \frac{2}{3}\alpha$	$= 3a : \frac{3}{2}a$	, Dihexaeder.
π_1	desgl.	$2\alpha' + 3\alpha'$	$= \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a$	, Dreikantner 1. Ordn.
l	Leucitoeder	$\frac{\alpha'}{4} + \frac{\alpha'}{4}$	$= 4a : 4a$	, Rhomb. 1. Ordn.
l_1	desgl.	$\alpha + \frac{3}{2}\alpha$	$= a' : \frac{2}{3}a'$	, Dreikantner 2. Ordn.
l_2	desgl.	$\infty\alpha + \infty\alpha$	$= oa : oa$	, 1. sechsseitige Säule.
p	Pyramidenoktaeder .	$\frac{\alpha}{5} + \frac{\alpha}{5}$	$= 5a' : 5a'$	, Rhomb. 2. Ordn.
p_1	desgl.	$\alpha + \alpha$	$= a' : a'$	, Gegenrhomboeder.
p_2	desgl.	$3\alpha + 4\alpha$	$= \frac{a'}{3} : \frac{a'}{4}$	, Dreikantner 2. Ordn.
x	Pyramidengranat. .	$\frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha}{3}$	$= 6a : 3a$	, Dihexaeder.
x_1	desgl.	$\frac{5}{4}\alpha + \alpha$	$= \frac{4}{5}a' : a'$	, Dreikantner 2. Ordn.
x_2	desgl.	$\frac{3}{2}\alpha + \frac{5}{2}\alpha$	$= \frac{2}{3}a' : \frac{2}{5}a'$	, Dreikantner 2. Ordn.
x_0	desgl.	$\frac{\infty\alpha}{5} + \frac{\infty\alpha}{4}$	$= \frac{5a}{\infty} : \frac{4a}{\infty}$	, 12seitige Säule.
y	48fl. $\frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a$	$\frac{2}{7}\alpha' + \frac{5}{7}\alpha'$	$= \frac{7}{2}a : \frac{7}{5}a = \frac{a}{2} : \frac{a}{3} : a : \frac{c}{7}$.	
y_1	desgl.	$\frac{3}{5}\alpha + \alpha$	$= \frac{5}{3}a' : a' = \frac{a'}{3} : \frac{a'}{5} : \frac{a'}{2} : \frac{c}{5}$.	
y_2	desgl.	$\alpha + 2\alpha$	$= a : \frac{1}{2}a = a : \frac{1}{2}a : a : c$.	
y_0	desgl.	$5\alpha' + 6\alpha'$	$= \frac{a}{5} : \frac{a}{6}a = \frac{a}{5} : \frac{a}{6} : a : c$.	

Das allgemeine Zeichen der Flächen eines dreigliedrigen Systems ist, wenn wir die Zwischenaxen b nennen:

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu + \nu} : \frac{a}{\nu} : \frac{b}{2\nu - \mu} : \frac{a}{\nu - \mu} : \frac{b}{\nu - 2\mu} : c$$ (Hdb. Miner. pag. 59).

Kennen wir davon außer c nur irgend zwei, so folgen die übrigen durch einfache Addition oder Subtraction. Wir brauchen daher für die

Sectionslinien nur $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu}$ hinzuzusetzen, und finden dann das dritte $\frac{a}{\nu - \mu}$. Wenn der Ausdruck + ist, so folgt die Axe hinten, wenn — vorn. Wenn wir dann ferner bedenken, daß $o = \frac{1}{\infty}$ oder $\infty = \frac{1}{o}$ ist, so können wir die vollständigen Zeichen aus den gegebenen leicht entwickeln. **Beispiele:**

$$h = a : a = \frac{a}{\frac{1}{1}} : \frac{a}{\frac{1}{1}} : \frac{a}{1 - 1} : c = a : a : \infty a : c.$$

$$l = 4a : 4a = \frac{a}{4} : \frac{a}{4} : \frac{a}{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} : c = a : a : \infty a : \tfrac{1}{4}c.$$

$$x = 6a : 3a = \frac{a}{\frac{1}{6}} : \frac{a}{\frac{2}{6}} : \frac{a}{\frac{2}{6} - \frac{1}{6}} : c = 6a : 3a : 6a : c.$$

$$\pi_1 = \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}a = \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}a : \frac{a}{3 - 2} : c = \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}a : a : c.$$

$$l_2 = oa : oa = \frac{a}{\infty} : \frac{a}{\infty} : \frac{a}{\infty - \infty} : c = \frac{a}{\infty} : \frac{a}{\infty} : \frac{a}{1} : c$$
$$= a : a : \infty a : \infty c.$$

$$x_0 = \frac{4a}{\infty} : \frac{5a}{\infty} = \frac{a}{\frac{\infty}{4}} : \frac{a}{\frac{\infty}{5}} : \frac{a}{\frac{\infty}{5} - \frac{\infty}{4}} : c = \frac{a}{\frac{1}{4}} : \frac{a}{\frac{1}{5}} : \frac{a}{\frac{1}{20}} : \infty c$$
$$= 4a : 5a : 20a : \infty c = \tfrac{1}{5}a : \tfrac{1}{4}a : a : \infty c.$$

Merkwürdig sind die drei Dihexaeder $\pi x y_2$. Man muß sie wohl als Dreikantner (Skalenoeder) betrachten, deren Endkanten äußerlich ins Gleichgewicht getreten sind, dessen ungeachtet aber immer noch physikalisch different bleiben.

Die Coordinaten der Punkte sind Stücke, welche die durch den Punkt gelegten Senkrechten von den zunächst gelegenen Axen $\alpha\alpha$ abschneiden. So liegt z. B. y zwischen $\alpha\alpha$, die sich stets unter 60° schneiden. Fälle ich darauf nun die beiden Perpendikel, so schneiden sie die Stücke $\tfrac{2}{7}\alpha + \tfrac{3}{7}\alpha$ ab. Meistens kann man die Punkte ablesen. Allein immer geht das nicht, dann müssen die Sectionslinien zu Hilfe genommen werden. Punkt y liegt im Durchschnitte der beiden Sectionslinien $\pi\pi$. Beziehe ich dieselben auf rechtwinkliche Axe $\alpha\beta$, so ist auf den

		μ	ν
dicken	$\tfrac{2}{5}\alpha : \tfrac{1}{5}\beta$	$\tfrac{5}{2}$	5;
Axen	$\tfrac{1}{3}\alpha : \tfrac{1}{4}\beta'$ . . .	3	—4;
		$\mu_{,}$	$\nu_{,}$

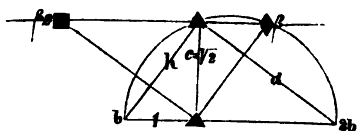
$$\begin{array}{llcc} & & \mu & \nu \\ \textbf{dünnen} & \frac{2}{5}\alpha : \beta' \;\ldots\ldots & \frac{9}{2} & -1, \\ \text{Axen} & \frac{2}{5}\alpha' : \frac{\beta}{5} \;\ldots\ldots & -\frac{5}{2} & 5. \\ & & \mu, & \nu, \end{array}$$

Das gibt nach der Zonenpunktformel

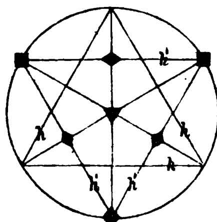
$$-9\alpha : -\tfrac{5}{2}\beta : -(\tfrac{12}{2} + 15)\,c = 18\alpha : 3\beta : 42c$$
$$= \tfrac{3}{7}\alpha : \tfrac{1}{14}\beta : c, \text{ dick;}$$
$$6\alpha : \tfrac{12}{2}\beta : (\tfrac{45}{2} - \tfrac{5}{2})\,c = 6\alpha : 6\beta : 21c$$
$$= \tfrac{2}{7}\alpha : \tfrac{2}{7}\beta : c, \text{ dünn.}$$

Also $y = \frac{2}{7}\alpha + \frac{3}{7}\alpha$, wie oben angegeben wurde.

Die Schwierigkeit für die Anschauung liegt hauptsächlich in der Verbindung beider Projectionen und deren Umkehrung (Invertirung). Machen wir uns, von allem abgesehen, eine Figur nach der Linearmethode, so entspricht jeder Punkt einem Flächenorte, den wir leicht eintragen. Machen wir uns umgekehrt nach der Neumann'schen Punktmethode eine Figur, so kommen wir auf dieselben Linien, die jetzt aber die Zonen andeuten. Denken wir dort blos an die Sectionslinien, hier an die Orte, so ist alles klar. Sowie ich aber beide im Gedanken verbinden will, so tritt die Schwierigkeit der Invertirung ein. Sie findet zwar schon bei der Projection auf die Würfelfläche statt, aber da hier $\alpha = a$ ist, so verwischt sich das, und es entsteht dadurch kein Fehler. Erst beim Dreigliedrigen, wo $\alpha = \frac{2}{3}a$ ist, tritt es uns lebhafter vor die Anschauung. Nehmen wir den Würfel in seiner dreigliedrigen Stellung,



so ist Kante d gegen Fläche h senkrecht, und Axe c die mittlere Proportionale zwischen b und 2b, folglich $c : b = \sqrt{2} : 1$, und der Ort von h in der obern Projectionsebene $\frac{c^2}{1} = 2$, und von $d = \frac{c^2}{2} = 1$; während in der untern Projectionsebene umgekehrt die Sectionslinie der Würfelfläche vom Mittelpunkte 1, und der Sectionspunkt der Kante 2 vom Mittelpunkte entfernt ist. Verbinden wir daher oben die Würfelflächenorte durch ihre Kantenzonenlinie, so geben diese zwar dasselbe reguläre Dreieck h'h'h', wie unten hhh, aber in ihrer Stellung 60° gegen einander verdreht. Es spricht



sich da in der Lage der Figuren, wie in den Zeichen der Flächen und Punkte, dieselbe Invertirung aus. An sich sind dagegen beide Figuren gleich, und decken sich bei gehöriger Drehung vollständig. Wir haben damit dasselbe linke und rechte Verhältniß, wie wir es oben pag. 92 schon bei den Zwillingen aussprachen. Erst wer diese Schwierigkeit glücklich überwunden hat, ist der Projection Meister. Für

den Geübten braucht es aller dieser Erwägungen nicht, der legt sich nicht blos die Flächen, sondern auch die Perpendikel darauf durch den gemeinsamen Punkt außerhalb der Projectionsebene. Dann leuchtet sofort ein, daß Sectionslinien und Orte der Flächen in gegenüberliegende Quadranten fallen müssen. Ich darf nur durch Ort und Mittelpunkt der Projection eine Linie ziehen, so steht diese senkrecht auf die Sectionslinie. Oder anders ausgedrückt: fälle ich vom Mittelpunkt meiner Projection ein Perpendikel auf die Sectionslinie einer Fläche, so fällt ihr Ort in die Verlängerung des Perpendikels im gegenüberliegenden Quadranten, beziehungsweise Sextanten. Ist die Entfernung der Sectionslinie vom Mittelpunkte ma, so die des Ortes $\frac{1}{ma} = \frac{\alpha}{m}$. Wollen wir also den zur Sectionslinie $\pi, = \frac{a}{2} : \frac{a}{3}$ (hinten rechts) gehörigen Ort suchen, so dürfen wir das Mittelpunktsperpendikel nur in den gegenüberliegenden Sextanten verlängern, um vorn links auf den Ort $\pi, = 2\alpha' + 3\alpha'$ zu treffen.

Ueber die Eigenschaften der fig. 2 tab. 4 will ich noch einiges bemerken: dieselbe enthält die Orte sämmtlicher Körper, nur die ganz excentrischen konnten nicht hingebracht werden, ohne das Blatt über die Gebühr zu vergrößern. Bezeichnen wir einen Sextanten negativ, so sind die anliegenden und der gegenüberliegende positiv. Nur einer der verschiedenen Flächenorte, welche zu einem dreigliedrigen Körper gehören, wurde groß geschrieben, und durch Fällen von Perpendikeln auf die nächst anliegenden Axen die Centrumsentfernungen α ermittelt. Es muß nun besonders ins Auge gefaßt werden, ob der Ort in einem positiven oder negativen Sextanten liegt, sonst könnte man leicht die beiden Abtheilungen Rhomboeder und Gegenrhomboeder oder Dreikantner und Gegendreikantner verwechseln. Wenn der Ort in die Axe fällt, dann kann man die Strichelungen, welche die beiden Abtheilungen unterscheiden sollen, weglassen. Die zu einem Flächenorte gehörige Sectionslinie fällt stets in den gegenüberliegenden Sextanten, und steht senkrecht auf einen Radius, den ich vom Flächenorte nach dem Mittelpunkte der Figur ziehe. Damit kann ich beide gegenseitig controliren. Eine Linie, mit dem gleichen (großen) Buchstaben wie der Flächenort bezeichnet, wurde von jedem Körper gegeben. Ueber den Ort der Säule xo habe ich im untern Sextanten eine Erläuterung gegeben: derselbe fällt in eine Sectionslinie des Pyramidenwürfels $\pi,$, welche vom gemeinsamen Punkte c aus parallel $\pi,$ ins Unendliche strahlt. Ich darf daher nur den gestrichelten Radius r durch den Mittelpunkt der $\pi,$ parallel legen, so strahlt dieser nach dem gesuchten Orte im Unendlichen. Ich wähle nun, um das Verhältniß des Centralabstandes zu ermitteln, den Punkt xo, welcher links $2\alpha'$ Centralabstand hat, dann liefert mir das Anlegen

eines rechtwinklichen Dreiecks rechts $\frac{1}{2}\alpha$. Der Ort im Unendlichen hat also

$$2\infty\alpha + \tfrac{5}{2}\infty\alpha = 4\infty\alpha + 5\infty\alpha = \frac{\infty\alpha}{5} + \frac{\infty\alpha}{4},$$

wie oben angegeben wurde. Denn es ist gleichgültig, wie ich die beiden Glieder stelle.

Die Projection auf die **Dodecaederfläche** tab. 5 fig. 1 gibt uns die **zweigliedrige** Stellung. Wir dürfen auch hier das Bild nur nach unserer Linearmethode pag. 145 entwerfen und die Orte einschreiben.

Wollen wir genau nach der Neumann'schen Punktmethode entwickeln, so zeichnen wir zunächst die Granatoederfläche mit den Axen $a : b = 1 : \sqrt{2}$ hin. In der stumpfen Ecke liegen die Orte der Oktaeder- und in der scharfen die der Würfelflächen. Durch die Verbindung der Würfelflächenorte kommt die Sectionslinie des Würfels h. Die übrigen fünf Verbindungslinien gehören dem Granatoeder (Oktaederkantenzonenlinien), die sechste ist nicht da, weil sie die Projectionsebene bildet. Die drei Würfelkantenzonen hhh, geben im Schnitte mit den Oktaederkantenzonenlinien d die Orte der sechs Granatoederflächen, wovon eine (links oder rechts) ins Unendliche fällt. Die vier Granatoederkantenzonenlinien o geben mit den Oktaederkantenzonen d die Leucitoederorte l. Dann bleiben die Sectionslinien des Pyramidenwürfels noch übrig, welche Würfel- und Leucitoederorte verbinden. Es ist also nur derselbe Gang zu befolgen, als bei den vorigen.

Die Axen $a : b : c = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} : 1 : 1$, folglich

$$\alpha : \beta : c = 1 : \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 2\sqrt{\tfrac{1}{2}} : 1 : 1.$$

$$\alpha = 2a,\ \beta = b.$$

Die lateinischen Axen ergeben sich unmittelbar aus dem Granatoeder, und die griechischen folgen durch Invertirung. Die zweigliedrige Ordnung versteckt sich unter viergliedrigen Axen.

Je weiter wir in den Systemen heruntersteigen, desto mehr zerspalten sich die Flächen, wir kommen hier nur noch zu Oktaedern:

	Körper	Ort	gibt Sectionslinie	2gl. Stellung.
h	Würfel	$o\alpha + \beta$ =	$\infty a : b$	, seitliches Paar.
h_1	desgl.	$\infty\alpha + o\beta$ =	$oa : \infty b$	, Querfläche.
o	Oktaeder	$\frac{\alpha}{2} + o\beta$ =	$2a : \infty b$	, vorderes Paar.
o_1	desgl.	$\frac{\infty\alpha}{2} + \infty\beta$ =	$\frac{2a}{\infty} : \frac{b}{\infty}$	, Säule.
d	Granatoeder	$\alpha + \beta$ =	$a : b$	, Oktaeder.
d_1	desgl.	$o\alpha + \infty\beta$ =	$\infty a : ob$	, Medianfläche.
d_0	desgl.	$o\alpha + o\beta$ =	$\infty a : \infty b$	, Geradendfläche.
π	Pyramidenwürfel .	$2\alpha + \beta$ =	$\frac{1}{2}a : b$	, Oktaeder.

	Körper	Ort	gibt Sectionslinie	2gl. Stellung.
π_1	desgl.	$\frac{\alpha}{2} + \beta$	$= 2a : b$	, Oktaeder.
π_2	desgl.	$o\alpha + 3\beta$	$= \infty a : \frac{1}{3}b$	, seitliches Paar.
π_3	desgl.	$o\alpha + \frac{1}{3}\beta$	$= \infty a : 3b$	, seitliches Paar.
l	Leucitoeder	$\alpha + o$	$= a : \infty b$	, vorderes Paar.
l_1	desgl.	$\alpha + 3\beta$	$= a : \frac{1}{3}b$	, Oktaeder.
l_2	desgl.	$\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3}$	$= 3a : 3b$	, Oktaeder.
l_3	desgl.	$\frac{\alpha}{o} + \frac{\beta}{o}$	$= oa : ob$	, Säule.
p	Pyramidenoktaeder	$\frac{\alpha}{4} + o\beta$	$= 4a : \infty b$	, vorderes Paar.
p_1	desgl.	$2\alpha + 3\beta$	$= \frac{a}{2} : \frac{b}{3}$	, Oktaeder.
p_2	desgl.	$\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta$	$= \frac{3}{2}a : 3b$	, Oktaeder.
p_3	desgl.	$\frac{\alpha}{o} + \frac{4\beta}{o}$	$= oa : \frac{ob}{4}$	, Säule.
x	Pyramidengranat. .	$\frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{5}$	$= 5a : 5b$	, Oktaeder.
x_1	desgl.	$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$	$= 2a : 2b$	, Oktaeder.
x_2	desgl.	$3\alpha + 3\beta$	$= \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}b$	, Oktaeder.
x_3	desgl.	$\alpha + \frac{\beta}{3}$	$= a : 3b$	, Oktaeder.
x_4	desgl.	$\alpha + 2\beta$	$= a : \frac{1}{2}b$	, Oktaeder.
x_5	desgl.	$\alpha + 5\beta$	$= a : \frac{1}{5}b$	, Oktaeder.
y	48fl. $\frac{a}{2} : \frac{a}{4}$	$\frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{3}$	$= 6a : 3b$	, Oktaeder.
y_1	desgl.	$\frac{2}{5}\alpha + \frac{3}{5}\beta$	$= \frac{5}{2}a : \frac{5}{3}b$	, Oktaeder.
y_2	desgl.	$\frac{2}{3}\alpha + \frac{5}{3}\beta$	$= \frac{3}{2}a + \frac{3}{5}b$	, Oktaeder.
y_3	desgl.	$\frac{\alpha}{2} + 3\beta$	$= 2a : \frac{1}{3}b$	, Oktaeder.
y_4	desgl.	$\frac{4}{3}\alpha + \frac{\beta}{3}$	$= \frac{3}{4}a : 3b$	, Oktaeder.
y_5	desgl.	$4\alpha + 3b$	$= \frac{1}{4}a : \frac{1}{3}b$	, Oktaeder.

Auch hier wurde von jedem zweigliedrigen Körper eine Sectionslinie im hintern rechten Quadranten gezeichnet, welche zu den Orten im vordern linken gehört.

Hiermit haben wir die drei wichtigsten Stellungen, 4gl., 3gl., 2gl., auseinander gesetzt. Es fehlen noch die 2 + 1gl. und 1gl., wobei zuletzt alles in seine einzelnen Flächen zerfällt. Die dreierlei 24flächner geben die 2 + 1gliedrigen, und die 48flächner die eingliedrigen Stel-

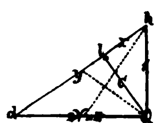
lungen. Mag auch der practische Werth solcher Betrachtungen nicht groß sein, so ist es immerhin von Interesse, zu sehen, wie sich solche Aufgaben constructiv lösen lassen.

Die Projection auf die **Leucitoederfläche** lo $= a : a : \frac{1}{2}a$ tab. 6 fig. 1 gibt uns eine **zweiunddreigliedrige Stellung**. Mit der Hinzeichnung des Deltoeder ist die Aufgabe nach der Linien- wie Punktmethode gelöst.

Wie das Deltoeder so wird auch die ganze Figur symmetrisch, d. h. links wie rechts, aber vorn anders als hinten, entsprechend dem 2 + 1gl. Systeme. Die Diagonalen des Deltoeders verhalten sich

$$a : b = \sqrt{3} : \sqrt{2},$$

$b = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, wie man aus der Linearprojection auf die **Würfelfläche** unmittelbar ablesen kann. Das Leucitoeder l fällt in **die Kantenzone des** Granatoeders, deren Fußpunkt d **vom Mittelpunkte** Q um $\sqrt{2} = z$ (für $hQ = a = 1$) entfernt ist. Das Perpendikel $Ql = c$ wird die neue Axe. Nun ist aber pag. 90



$$y = \frac{b^2}{a^2} \cdot x = z^2 \cdot x = 2x,$$

$$a = x = \frac{1}{\sqrt{1+2}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}},\ y = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}};$$

$$c^2 = xy = \tfrac{2}{3},\ b = a\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \sqrt{\tfrac{2}{9}}.$$

Folglich

$$a : b : c = \sqrt{\tfrac{1}{3}} : \sqrt{\tfrac{2}{9}} : \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \sqrt{\tfrac{1}{3}} : 1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} : \tfrac{1}{3}\sqrt{3} : 1$$

$$\alpha : \beta : c = \sqrt{2} : \sqrt{3} : 1 \quad = 2a : 3b : c.$$

Zur Entwerfung der Figur ist übrigens die Axe c gleichgültig. Dagegen muß man wissen, daß die stumpfe Deltoidecke nach $\frac{1}{2}a$ geht, wie das Perpendikel auf die Oktaederfläche angibt, die durch die beiden punktirten Linien angedeutet sind. Ziehen wir jetzt nach der Linearmethode die vier Seiten des Deltoeders aus, so kommt ein Oktaid, zu welchem Würfel h, Oktaeder a und Granatoeder ds das zugehörige Hexaid bilden, aus denen dann alles weitere folgt. Ebenso genügen die vier Flächenorte, Würfel, Oktaeder und zwei Dodecaeder zur Herstellung der Punktfigur. Denn unter einander verbunden kommen die Flächenorte der beiden andern Würfelflächen h, und der Ort der Projectionsebene lo. Uebrigens darf man nur die dreigliedrige Projection damit vergleichen, um über alle Punkte sofort vollständig orientirt zu sein.

	Körper	Ort		gibt Sectionslinie	2 + 1gl. Stellung.
h	Würfel	$\frac{\alpha'}{2} + o\beta$	=	$2a : \infty b$	, vorder. Schiefendfl.
h_1	desgl.	$\alpha + \beta$	=	$a' : b$	, hinter. Augitpaar.
o	Oktaeder	$\frac{\alpha'}{2} + \beta$	=	$2a : b$	, vord. Augitpaar.

Körper	Ort	gibt Sectionslinie	2 + lgl. Stellung.
o_1 desgl.	$\frac{\alpha}{4} + o\beta$	$= 4a' : \infty b$	, hint. Schiefendfl.
o_2 desgl.	$\infty\alpha + o\beta$	$= oa : \infty b$	, Querfläche.
d Granatoeder	$2\alpha' + \beta$	$= \frac{a}{2} : b$	, vord. Augitpaar.
d_1 desgl.	$o\alpha + \frac{\beta}{3}$	$= \infty a : 3b$	, Paar.
d_2 desgl.	$\alpha + o\beta$	$= a' : \infty b$	, hint. Schiefendfl.
d_3 desgl.	$o\alpha + \infty\beta$	$= \infty a : ob$	, Medianfläche.
π Pyramidenwürfel .	$\alpha' + \frac{1}{3}\beta$	$= a : 3b$	, vord. Augitpaar.
π_1 desgl.	$\alpha + \frac{1}{3}\beta$	$= a' : 3b$	, hint. Augitpaar.
π_2 desgl.	$\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2}$	$= 4a' : 2b$	, hint. Augitpaar.
π_3 desgl.	$\alpha + 3\beta$	$= a' : \frac{b}{3}$	, hint. Augitpaar.
π_4 desgl.	$\frac{\alpha'}{5} + \frac{\beta}{5}$	$= 5a : 5b$	, vord. Augitpaar.
π_5 desgl.	$\frac{\infty\alpha}{2} + \frac{\infty b}{3}$	$= \frac{2a}{\infty} : \frac{3b}{\infty}$	, Säule.

Es geht daraus wieder hervor, daß α und a gegeneinander umschlagen: α' hinten wird a vorn, und umgekehrt a' hinten α vorn. Nebenstehender Aufriß tab. 6 fig. 2 in der Granatoederebene d_3 macht die Sache klar: es entspricht darin die Verticallinie mit ihren Schnitten der Axe a, in deren Mittelpunkt der Ort der Leucitoederfläche l_0 liegt. Q ist das Centrum der Kugel, c die aufrechte Axe des regulären Systemes, wovon die Diagonalen der Oktaederflächen o, Leucitoeder L und Pyramidenoktaeder P ausstrahlen, deren Orte dann nach o_1, l_0 und p_5 fallen. Darnach muß der Oktaederflächenort o_1 hinten dem Strahle O^1, welcher durch Q parallel der O gelegt ist, entsprechen, die zugehörige Sectionslinie o_1 also nach hinten schlagen. Wir wollen jetzt nur kurz noch die übrigen Punkte von lpx hinsetzen:

Leucitoeder. l $2\alpha' + 3\beta$; l_1 $4\alpha + \beta$; l_2 $\frac{\alpha'}{2} + \frac{\beta}{2}$; l_3 $\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta$;

l_4 $o\alpha + \beta$; l_5 $2\alpha' + o\beta = \frac{a}{2} : \infty b : c$; l_0 $o\alpha + o\beta$.

Pyramidenokt. p $\frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{9}$; p_1 $\frac{\alpha'}{5} + \frac{3}{5}\beta$; p_2 $\frac{\alpha'}{2} + 2\beta$; p_3 $\alpha' + \beta$;

p_4 $5\alpha' + \beta$; p_5 $\frac{\alpha}{2} + o\beta$; p_6 $\frac{5}{3}\alpha + o\beta = \frac{3}{5}a' : \infty b : c$.

Pyramidengran. x $2\alpha' + 2\beta$; x_1 $2\alpha' + \frac{\beta}{3}$; x_2 $\frac{2}{7}\alpha' + \frac{3}{7}\beta$; x_3 $o\alpha + \frac{2}{5}\beta$;

$$x_4\ 0\alpha + \frac{\beta}{9};\ x_5\ \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{4};\ x_6\ \tfrac{4}{7}\alpha + \tfrac{1}{7}\beta;\ x_7\ 2\alpha + \frac{\beta}{3};$$

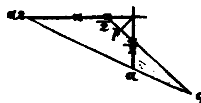
$$x_8\ 0\alpha + \tfrac{5}{3}\beta;\ x_9\ 2\alpha' + 5\beta;\ x_{10}\ \infty\alpha + \frac{\infty\beta}{3};\ x_{11}\ \tfrac{4}{5}\alpha' + \tfrac{3}{5}\beta.$$

Suchen wir nun weiter die Projectionen auf Pyramidenoktaeder, Pyramidenwürfel und Pyramidengranatoeder auszuführen, so bilden hier die Flächen blos Dreiecke, wir müssen daher zur Entwickelung noch eine vierte Linie oder einen vierten Punkt haben, und zwar darf auch hier (wie bei der Linearmethode die Linie) der vierte nicht mit zwei der vorhandenen in eine Zonenlinie fallen, weil wir sonst zwischen den vier Punkten nicht sechs, sondern nur vier Zonenlinien ziehen können, wir hätten eben die Orte eines Vierzonenkörpers pag. 89.

Die Projection auf die **Pyramidenoktaederfläche** a : a : 2a tab. 5 fig. 2 ist durch die auf die Oktaeder- und Leucitoederfläche in ihren wesentlichen Momenten gegeben.

Fassen wir die drei Orte der Würfelflächen ins Auge, so liegen dieselben bei der dreigliedrigen Projection in den Ecken eines gleichseitigen, bei der Projection des Leucitoeders dagegen in einem stumpfen gleichschenklichen Dreieck (78° 28′ in der Endspitze). Man kann aus beiden fast das Gleiche ablesen, nur ist der Mittelpunkt der Figur beim Leucitoeder nach l_0 gerückt. Gehen wir von hier nach vorn, so kommen in beiden die Orte eines Oktaeders, Pyramidenoktaeders, Granatoeders, Pyramidenoktaeders. Das folgende Oktaeder liegt aber schon im Unendlichen, was in der dreigliedrigen Projection $2\alpha + 2\alpha$ hat. Daher muß am Leucitoeder das folgende l_5 hinten erscheinen, während es in der dreigliedrigen Stellung erst ins Unendliche fällt. Haben wir die Sachen auf die Kugel aufgetragen, so darf man nur drehen, um die Lage zu bekommen, aber die Bilder auf dem Papiere bieten dennoch mehr. Wie das Deltoid des Leucitkörpers in den Ecken des gleichseitigen Dreiecks auftritt, so das Dreieck des Pyramidenoktaeders an den Basen. In letztern wird jetzt der Ort p_0 zum Mittelpunkt, und das gleichschenkliche Dreieck mit den Orten der drei Würfelflächen ein scharfes, so daß zwischen stumpfen und scharfen gleichschenklichen Dreiecken das gleichseitige in der Mitte liegt. Dadurch leuchtet uns sofort die Verwandtschaft des 2 + 1gliedrigen Systemes mit dem dreigliedrigen ein, wie schon Neumann (Beitr. Krystallonomie 1823 pag. 122) hervorhob. Freilich beruht die Sache bereits auf den elementarsten Anfängen der Hexaide pag. 82.

Die **Entwerfung** der Figur hängt zunächst von der Form des Dreiecks ab, dessen Verhältnisse ich aus der Linearprojection auf die Würfelfläche ablese. Denn da die untere Fläche des Oktanten von c : ½a : ⅓a geht, und die obere von c : a : 2a, so liegt in q



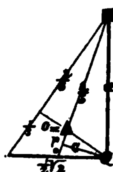
der Ort der Kante, die halbe Basis

$$pq = \sqrt{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2} = \tfrac{5}{4}\sqrt{2} = \sin \text{ und } \sqrt{1 + \frac{1}{4^2}} \cdot 2 = \sqrt{\tfrac{9}{8}} = \cos$$

für den halben Flächenwinkel an der Endspitze. Das gibt

$$\tfrac{5}{4}\sqrt{2} : \sqrt{\tfrac{9}{8}} = 5\sqrt{\tfrac{1}{8}} : 3\sqrt{\tfrac{1}{8}} = 5 : 3$$ (Hdb. Miner. 1863 pag. 77).

In den Ecken der Basis liegen zwei Würfelflächenorte, am Gipfel ein Oktaederflächenort, es fehlt also nur noch der Ort der dritten Würfelfläche, welchen wir im Aufriß der Granatoederfläche finden. Die Diagonale der Oktaederfläche geht von $a : \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, die des Pyramidenoktaeders von $a : \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Das Perpendikel auf die Diagonale der Oktaederfläche drittelt dieselbe. Folglich liegt nach der Theilung des Dreiecks



$$o \text{ in } \frac{\frac{3}{2} - 1}{\frac{3}{2} + 1} = \tfrac{1}{5}.$$

Die Diagonale der Pyramidenoktaederfläche wird aber jetzt in der Projection zur Axe a, worin der Oktaederflächenort an der Spitze des Dreiecks liegt. Wir dürfen daher die Höhe des Dreieckes nur viermal abtragen, um zum Orte der dritten Würfelfläche zu gelangen und damit die nothwendigen Punkte für die Projection zu haben. Der Punkt po wird durch das Perpendikel c bestimmt, daher ist nach der Vierzonenkörperformel pag. 90

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{1}{8}} = a\,;\; x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{8}\,;\; c^2 = xy = \tfrac{1}{9}\,;$$

$$a : c = \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{1}{8}} : \tfrac{1}{3} = \sqrt{\tfrac{1}{8}} : 1 \text{ oder } \alpha : c = \sqrt{8} : 1 = 8\sqrt{\tfrac{1}{8}} : 1.$$

Da die Höhe des Dreiecks $\tfrac{1}{5}(a + \alpha) = \tfrac{9}{5}a$ beträgt, so ist der Ort der Oktaederfläche in der Spitze des Dreiecks $(\tfrac{9}{5} - 1)\,a' = \tfrac{4}{5}a'$. Ziehen wir nun durch po die Axe b, so haben wir zur Bestimmung:

$$\tfrac{4}{5}a : b = 3 : 5,\; b = \tfrac{4}{3}a = \tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{1}{8}} = \sqrt{\tfrac{2}{9}}.$$

$$a : b : c = \sqrt{\tfrac{1}{8}} : \sqrt{\tfrac{2}{9}} : 1,$$

$$\alpha : \beta : c = \sqrt{8} : \sqrt{\tfrac{9}{2}} : 1 = 8a : \tfrac{9}{2}b : c.$$

Körper	Ort	gibt	Sectionslinie	2 + 1gl. Stellung.
h Würfel	$\alpha' + o\beta$	=	$a : \infty b$	, Schiefendfläche.
h1 desgl.	$\frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{2}$	=	$8a' : 2b$	, hinteres Augitpaar.
o Oktaeder	$\alpha' + 2\beta$	=	$a : \frac{1}{2}b$	, vorderes Augitpaar.
o1 desgl.	$\frac{\alpha'}{10} + o\beta$	=	$10a : \infty b$	, vordere Schiefendfl.
o2 desgl.	$\frac{\alpha}{2} + o\beta$	=	$2a' : \infty b$	, hint. Schiefendfl.
d Granatoeder ..	$\frac{5}{4}\alpha + \beta$	=	$\frac{4}{5}a' : b$	, hinteres Augitpaar.
d1 desgl.	$\frac{\alpha'}{4} + \frac{\beta}{3}$	=	$4a : 3b$	, vord. Augitpaar.

Körper	Ort	gibt	Sectionslinie	2 + 1gl. Stellung.
d_2 desgl.	$\frac{\alpha}{8} + o\beta$	=	$8a' : \infty b$	, hint. Schiefendfl.
d_3 desgl.	$o\alpha + \infty\beta$	=	$\infty a : ob$	, Medianfläche.
π Pyramidenwürfel	$\frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{6}$	=	$8a' : 6b$	, hinteres Augitpaar.
π_1 desgl.	$\frac{\alpha}{8} + \frac{3}{2}\beta$	=	$8a' : \frac{2}{3}b$	, hinteres Augitpaar.
π_2 desgl.	$\frac{7}{16}\alpha' + \frac{\beta}{4}$	=	$\frac{16}{7}a : 4b$	, vord. Augitpaar.
π_3 desgl.	$\frac{\alpha'}{10} + \frac{2}{5}\beta$	=	$10a : \frac{5}{2}b$	, vord. Augitpaar.
π_4 desgl.	$\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{5}\beta$	=	$2a' : \frac{5}{2}b$	, hinteres Augitpaar.
π_0 desgl.	$\frac{5}{4}\frac{\alpha}{0} + \frac{5}{9}\frac{\beta}{0}$	=	$4\frac{a}{\infty} : 9\frac{b}{\infty}$	, Säule ꝛc.

$\pi_0 = a : \frac{9}{4}b : \infty c$ kann man zwar unmittelbar ablesen, aber will ich die Fläche aus dem Orte ableiten, so muß ich den Punkt $\pi_0 = \frac{5}{9}\frac{\beta}{0}$ suchen, und durch Umkehrung die Fläche finden.

Die Projection auf die **Pyramidenwürfelfläche** $a : 2a : \infty a$ tab. 6 fig. 2 ergibt sich aus dem gleichschenklichen Pyramidendreiecke, dessen Verhältniß Basis zur Höhe $= 4 : \sqrt{5}$ ich aus der Projection auf die Würfelfläche ablese. In den Ecken desselben an der Basis sind die Orte zweier Oktaederflächen o_1 und an der Spitze einer Würfelfläche h_1. Jetzt brauche ich noch einen vierten Punkt h, den ich leicht durch die nebenstehende Kreisconstruction fig. 3 finde. Auf der dicken Medianlinie hh_1 der Projectionsebene, die von $c : 2a$ geht, muß die x in d_2 dritteln, weil sie der y parallel geht. Daher ist $hd_2 = 2\sqrt{5}$. Dieser vierte Punkt ermöglicht die leichteste Deduction: man zieht die Würfelsectionslinien hh_1h_2, kann dann zum Oktaeder schreiten, und darauf das Granatoeder folgen lassen. Nachdem dann die Orte hodl mit Buchstaben bezeichnet sind, ergeben sich die Pyramidenwürfel π aus den Würfelflächenorten nach je zwei ll gezogen sofort. Die Medianlinie $hh_1 = \sqrt{5}$ für $a = 1$ wird in π_0 gefünftelt, weil nach pag. 90

$$1^2 . h\pi_0 = 2^2 . h_1\pi_0 ,\ a = h_1\pi_0 = \frac{1}{5}\sqrt{5} = \sqrt{\frac{1}{5}};$$
$$Q\pi_0 = c = \sqrt{1 - \frac{1}{25} . 5} = \sqrt{\frac{4}{5}},\ b = \frac{2}{5}. \text{ Daher}$$
$$a : b : c = \sqrt{\frac{1}{5}} : \frac{2}{5} : \sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{1}{4}} : \sqrt{\frac{1}{5}} : 1.$$
$$\alpha : \beta : c = \sqrt{4} : \sqrt{5} : 1 = 4a : 5b : 1.$$

Körper	Ort	gibt	Sectionslinie	2 + 1gl. Stellung.
h Würfel	$\alpha + o\beta$	=	$a' : \infty b$	, Schiefendfläche.

	Körper	Ort	gibt	Sectionslinie	2 + 1gl. Stellung.
h_1	desgl.	$\frac{\alpha'}{4} + o\beta$	=	$4a : \infty b$	, desgl.
h_2	desgl.	$o\alpha + \infty\beta$	=	$\infty a : ob$	, Medianfläche.
o	Oktaeder	$\frac{3}{2}\alpha' + \beta$	=	$\frac{2}{3}a : b$	, Augitpaar.
o_1	desgl.	$\frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{3}$	=	$6a' : 3b$	, desgl.
d	Granatoeder . .	$\alpha + \beta$	=	$a' : b$	, Augitpaar.
d_1	desgl.	$\frac{\alpha'}{4} + \frac{\beta}{2}$	=	$4a : 2b$	, desgl.
d_2	desgl.	$\frac{\alpha}{6} + o\beta$	=	$6a' : \infty b$	, Schiefendfläche.
d_3	desgl.	$\frac{3}{2}\alpha' + o\beta$	=	$\frac{2}{3}a : \infty b$	, desgl.
π	Pyramidenwürfel	$\frac{\alpha'}{4} + \frac{\beta}{4}$	=	$4a : 4b$	, Augitpaar.
π_1	desgl.	$\frac{\alpha'}{4} + \beta$	=	$4a : b$	, desgl.
π_2	desgl.	$\alpha + \frac{\beta}{2}$	=	$a' : 2b$	, desgl.
π_3	desgl.	$\alpha + 2\beta$	=	$a' : \frac{1}{2}b$	, desgl.
π_4	desgl.	$\frac{5}{8}\alpha + o\beta$	=	$\frac{8}{5}a' : \infty b$	, Schiefendfläche.
π_5	desgl.	$\frac{2}{5}\alpha' + o\beta$	=	$\frac{5}{2}a : \infty b$	, desgl.
π_6	desgl.	$\infty\alpha + o\beta$	=	$oa : \infty b$	, Querfläche.
π_0	desgl.	$o\alpha + o\beta$	=	$\infty a : \infty b$	, Projectionsebene.

Bei einiger Uebung besteht die ganze Uebertragung nur im Ablesen, was mittelst eines rechtwinklichen Dreiecks, das ich durch den gesuchten Punkt gegen die rechtwinkliche Axe lege, erleichtert wird. Wie das Dreieck des Pyramidenwürfels zwischen den Punkten $o\,o_1\,h_1$ liegt, so steht auch das Pentagon des Hälftflächners (Pyritoeders) zwischen den Orten $\pi\pi_0\,{}_1\pi_4\,{}_0\,{}_1$ geschrieben, wir dürfen die Länge der Seiten und Diagonalstücke nur ablesen, wie das ausgezogene 5 Eck fig. 4 (verkleinert) zeigt:

$$\frac{5}{4}b : \frac{5}{3}b : \frac{5}{8}a : \frac{5}{6}a = \frac{5}{4}\sqrt{\tfrac{1}{5}} : \frac{5}{3}\sqrt{\tfrac{1}{5}} : \frac{5}{8}\sqrt{\tfrac{1}{4}} : \frac{5}{6}\sqrt{\tfrac{1}{4}}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{5}} : \frac{1}{3}\sqrt{\tfrac{1}{5}} : \frac{1}{6} : \frac{1}{12} = 3\sqrt{\tfrac{1}{5}} : 4\sqrt{\tfrac{1}{5}} : 2 : 1.$$
$$= \frac{3}{2} : 2 : \sqrt{5} : \frac{1}{2}\sqrt{5}$$ (Hdb. Miner. pag. 78).

Wie Oktaeder-, Leucitoeder-, Pyramidenoktaeder-, so stehen Würfel-, Granatoeder-, Pyramidenwürfel-Projection unter einander in engerer Beziehung. Denn sehen wir bei der Würfelflächenprojection auf die vier Orte des Granatoeders in den Ecken des Quadrates, so ändert sich dasselbe bei der Pyramidenwürfelprojection in ein lang gezogenes Deltoid, beim Granatoeder liegt dagegen der vierte Granatoederflächenort im Unendlichen. Alles das geht ebenfalls wieder aus der Drehung

um die Axe b hervor. Am allgemeinsten, aber damit auch am schwierigsten, ist

die **Projection** auf eine Fläche des Trigonpolyeders, wozu wir das gewöhnlichste, das **Pyramidengranatoeder** $a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a$ tab. 7 fig. 1 wählen wollen. Die Ecken des Dreiecks bilden die Orte vom Würfel, Oktaeder, Granatoeder. Durch Rechnung finden sich die Seiten in der

Würfelecke . . .	36° 48′ 34″
Oktaederecke . .	56° 14′ 51″
Granatoederecke .	86° 56′ 35″.

Dies Dreieck zeichnen wir hin, suchen einen vierten Punkt etwa in der gebrochenen Oktaederkante den Ort der zweiten Würfelfläche, welchen wir ebenfalls leicht durch Construction finden, wenn wir die Kante $\frac{1}{3}c : \frac{1}{2}a = c : \frac{3}{2}a$ im Aufriß hinzeichnen, und den Schnittpunkt mit der diagonalen Axe suchen, welche senkrecht auf die Granatoederfläche steht. Es zeigt sich dann, daß wenn der Würfelflächenort oben vom Granatoederflächenort 1 abliegt, so der untere $1\frac{1}{2}$, Verhältnisse, die man in der Projection auf die Würfelfläche ablesen kann. Dieser vierte Punkt liefert aber blos einen Vierzonenkörper, wir bedürfen daher noch einen fünften in der Granatoederkante, welche im Aufriß der Granatoederfläche $c : \sqrt{2}$ geht, und worin die trigonale Axe senkrecht auf die Oktaederfläche steht. Das gibt uns den zweiten Granatoederflächenort, welcher vom Orte der Oktaederfläche gerade so weit abliegt, als der Würfelflächenort darüber. Die fünf Punkte, zwei Würfel-, zwei Granatoederorte und ein Oktaederort reichen zur Deduction aus. Jetzt dürfen wir nur den Ort der dritten Würfelfläche ableiten, so haben wir auch zwischen den Würfelflächenorten drei Dodecaederflächenorte. Nehmen wir dann die Projection auf die Leucitoederfläche zur Hand, so kann man die große Aehnlichkeit der Figur nicht übersehen, und darnach seine Linien ziehen. Der Geübte braucht das nicht, da die Hauptlinien, Granatoeder und Pyramidenwürfel so in die Würfelkanten fallen, daß je zwischen Dodecaeder d und Hexaeder h eine Sectionslinie des Pyramidenwürfels zu liegen kommt.

Wenn die Distanzen der fünf Punkte richtig genommen sind, so müssen die Sectionslinien von drei Dodecaederflächen ($d_1 d_3 d_6$) parallel gehen, eine der Oktaederflächenlinien (o_4) muß senkrecht gegen dieselben stehen und ihr Flächenort im Unendlichen liegen. Im Centrum x_o erhebt sich daher die Axe c senkrecht, und nehmen wir die kurzen Stücke $x_o a$ und $x_o b$, als Axeneinheiten a und b, so finden wir

$$a : b : c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{14}} : \frac{1}{3}\sqrt{3} : 1.$$

So leicht die Linien auch zu ziehen sind, so geht doch die Ermittelung ihres Axenwerthes ohne Rechnung bei dieser eingliedrigen Ordnung nicht mehr ab. Es finden sich

$$h_1 = 2a' : \tfrac{2}{5}b' ; h_2 = 6a : 27b' ; h_3 = 4a' : \tfrac{9}{7}b.$$

$o_1 = 8a : \frac{9}{2}b$; $o_2 = 4a : \frac{9}{5}b'$;
$o_3 = 12a' : 27b'$; $o_4 = oa : \infty b$.
$d_1 = \infty a : b$; $d_3 = \infty a : 15b$; $d_6 = \infty a : 6b'$;
$d_2 = a : \frac{9}{5}b'$; $d_4 = 3a' : 27b'$; $d_5 = 2a : \frac{9}{2}b$ etc.

Die Zonenpunkte stehen jetzt nicht mehr in einfachen Beziehungen. Wollte man schiefe Axen wählen, so würde sich d_1 als Axe der a empfehlen, denn ihre Schnitte $\frac{14}{9}$, $\frac{28}{9}$, $\frac{56}{9}$, $\frac{112}{9}$, $\frac{140}{9}$ verhalten sich unter einander wie 1 : 2 : 4 : 8 : 10. Immerhin ist es von Interesse, zu sehen, daß bei so allgemeiner Projection das Bild noch ganz erträgliche Zahlen gibt.

Soll die Figur richtig werden, so muß man bei dem Entwurf des Dreiecks etwas vorsichtig verfahren, weil die Größe des Dreiecks zur Größe der ganzen Figur in einem sehr ungleichen Verhältniß steht. Ich habe daher nur ein kleines Stück geben können. Sticht man sich das durch, so ist die ganze Figur leicht vollendet. Die Richtigkeit ist sogleich controlirt, wenn man vom Orte der Flächen zum Mittelpunkte x_0 eine Gerade zieht, so muß dieselbe senkrecht auf die zugehörige Sectionslinie stehen. Trifft das z. B. bei den drei Würfelflächen ein, dann werden auch die andern recht, wie unsere Figur zeigt.

Bei dem Aufsuchen der Axenwerthe haben wir es hauptsächlich mit drei Schnitten der Körper zu thun:

1) **Würfelschnitt** tab. 7 fig. 3, d. h. ein Aufriß durch die Axenebene des Oktaeders (Basalschnitt), wobei die aufrechte Axe $c = a = b = 1$ gesetzt ist. Wir wenden dazu die Mittelpunktsformel

$$p = \frac{\mu_, a}{\mu + \mu_,} + \frac{b}{\mu + \mu_,} \text{ an.}$$

Ist mir die gebrochene Oktaederkante $a : \frac{3}{2}b$ des Pyramidengranatoeders $a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a$ gegeben, und ich suche die Coordinaten des Durchschnittspunktes, welchen das verlängerte Perpendikel aus dem Mittelpunkt Q auf die Granatoederkante $hb = d = a : b$ mit demselben macht, so geht die allgemeine Formel für $\mu = \frac{2}{3}$ in die besondere

$$\frac{3\mu_,}{2 + 3\mu_,}a + \frac{3}{2 + 3\mu_,}b \text{ über.}$$

Für die Granatoederkante mit ihrem Orte in α ist $\alpha h = \alpha = a = 1$ und $\mu_, = 1$, gibt für d die Coordinate $\frac{3}{5}a$, also theilt d die Pyramidengranatoederkante hh_1 in d nach dem Verhältniß 3 : 2, wobei 2 an a und 3 an Axe b grenzt. Denn da $a = 1$ ist, so verhält sich, wenn wir $dh_1 = x$ setzen,

$$1 : \frac{3}{5} = hh_1 : x,\ x = \frac{3}{5}hh_1.$$

Auch die zweite Coordinate ist $\frac{3}{5}b$, aber hier muß ich die Gleichung

$$\frac{3}{2} : \frac{3}{5} = hh_1 : y,\ y = \frac{2}{5}$$

zu Hilfe nehmen, was sich von selbst versteht, da nach der Vierzonen-

körperrechnung pag. 90 $x + y = hh_1 = 1$ gesetzt werden kann. Wir brauchen daher immer nur die Coordinate von a anzuwenden.

Der Pyramidenwürfel π geht von $a : \frac{1}{2}b$, und hat am Ende seines Perpendikels 2α, folglich kommt für $\mu, = \frac{1}{2}$

$$\frac{3\mu,}{2 + 3\mu,} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{2 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{7},$$

der Punkt π theilt also hh_1 im Verhältniß 3 : 4.

Pyramidenwürfel $\pi_1 = a : 2b$ hat am Ende seines Perpendikels $\frac{1}{2}\alpha$, also $\mu, = 2$ gibt $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $hh,$ wird durch π_1 im Verhältniß 3 : 1 getheilt.

Pyramidenwürfel $\pi_2 = a : 2b'$ hat $\frac{\alpha'}{2}$, folglich $\mu, = -2$, d. h.

$$\frac{3\mu,}{2 + 3\mu,} = \frac{-3 \cdot 2}{2 - 3 \cdot 2} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2},$$

folglich mißt das Stück $\pi_2 h$ die Hälfte der Linie hh_1, und Linie $\pi_2 h_1$ ist halbmal länger als hh_1.

Granatoeder $d, = a : b'$ hat am Ende des Perpendikels α', jetzt ist $\mu, = -1$ gibt die Zahl 3, d. h. der Punkt $d,$ in der Linie h,h ist von π_2 noch um $\frac{3}{2}$ entfernt, wenn man $hh, = 1$ setzt.

Mit dieser höchst einfachen Rechnung haben wir in der Projection auf die Pyramidenwürfelfläche tab. 6 fig. 2 die Punkte der medianen Sectionslinie h_2 controlirt. Schreiten wir nun zum

2) **Granatoederschnitt**, so liefert uns derselbe zwei Fälle:

a) im **ersten Falle** tab. 7 fig. 4 auf der **Granatoederkante**, der langen Linie des Pyramidengranatoeder-Dreiecks, die Punkte ll,op. Linie hd geht für $a = 1$ von $a : \sqrt{2}$, denn $Qd = b$ ist vom Mittelpunkte $\sqrt{2}$ entfernt, daher die Länge der Linie $hd = \sqrt{3}$, die wir wieder zur Einheit nehmen. Für $b = \sqrt{2}$ wird in der obern Projectionsebene

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\, b, \text{ oder } b = 2\beta.$$

Das Perpendikel auf hd bestimmt den Ort der Leucitoederfläche $l = a : 2a : 2a$, da dieses die Kante des Granatoeders abstumpft. Geht also die Leucitoederfläche l von $a : b$, so ist $\mu = 1$, es entsteht daher die besondere Mittelpunktsformel $\frac{\mu,}{1 + \mu,}a$. Das Perpendikel $Q\beta$ auf hd, welches uns als Mittelpunktslinie auf a und $\beta = \frac{1}{2}b$ die Unbekannte $\mu,$ bestimmt, geht von $a : \beta = a : \frac{1}{2}b$, also ist $\mu, = 2$, gibt

$$\frac{2}{1 + 2}a = \tfrac{2}{3}a, \text{ der Punkt l muß also dritteln.}$$

Aus denselben Gründen geht das Perpendikel auf $l,$ nach β', es ist also $\mu, = -2$ zu setzen, folglich kommt die Coordinate $\frac{-2}{1 - 2}a = 2a$,

d. h. Punkt l, ist von h so weit entfernt als d von h. Für Oktaederfläche $o = a : \frac{1}{2}b$ geht das Perpendikel $a : 2\beta$ oder $a : b$, folglich $\mu, = 1$, gibt $\frac{1}{1 + 1}a = \frac{1}{2}a$, also wird hd in o halbirt. Für Pyramidenoktaeder $p = a : \frac{1}{4}b$ geht das Perpendikel $a : 4\beta = a : 2b$, also $\mu = \frac{1}{2}$, gibt $\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}a = \frac{1}{3}a$, d. h. wie l oben an a, so drittelt p unten an b.

b) Im **zweiten Falle** tab. 7 fig. 5 handelt es sich in demselben Granatoederschnitte um die gebrochene Würfelkante, welche die dritte Seite unseres Dreieckes bildet. Da sie von $a : \frac{1}{5}b$ geht, so ist in der allgemeinen Formel $\mu = 5$ gibt $\frac{\mu,}{5 + \mu,}a$.

$o\ = a\ : \frac{1}{2}b = a : 2\beta$ gibt $\mu, = 1$ .... $\frac{1}{6}$;
$o, = a' : \frac{1}{2}b = a : 2\beta'$ gibt $\mu, = -1$ ..... $\frac{1}{4}$;
$l\ = a\ : b = a : \beta$ gibt $\mu, = 2$ .... $\frac{2}{7}$;
$l, = a' : b = a : \beta'$ gibt $\mu, = -2$ ..... $\frac{2}{3}$;
$p\ = a\ : \frac{1}{4}b = a : 4\beta$ gibt $\mu, = \frac{1}{2}$ .... $\frac{1}{11}$;
$p, = a' : \frac{1}{4}b = a : 4\beta'$ gibt $\mu' = -\frac{1}{2}$ ..... $\frac{1}{9}$.

Damit die Kanten alle gleiche Dimensionen für $c = a = 1$ erhalten, rücken wir die Linie durch $\frac{3}{5}$b, wie sie am Körper in Wirklichkeit liegt; wodurch dann die Einheit dreifach größer wird.

3) **Oktaederschnitt** tab. 7 fig. 6 wird durch die Projection auf die Oktaederfläche klar. Die zwölfseitige Säule des Pyramidengranatoeders xo hat das allgemeine Flächenzeichen

$$\infty c : a : \frac{b}{6} : \frac{a}{5} : \frac{b}{9} : \frac{a}{4} : \frac{b}{3}.$$

Für $a = 1$ wird $b = \sqrt{3}$, folglich erhalten wir in den Horizontalaxen die Zahlen

$$1 : \sqrt{\tfrac{1}{12}} : \tfrac{1}{5} : \sqrt{\tfrac{1}{27}} : \tfrac{1}{4} : \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Das Perpendikel, vom Centrum Q auf diese Fläche gezogen, wird nun zur neuen Axe c, während die Sectionslinie von xo selbst der Axe b entspricht. Um die Stücke links und rechts vom Perpendikel c zu finden, haben wir nur die Vierzonenkörperformel pag. 90

$$x^2 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ und } y^2 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

anzuwenden: im rechtwinklichen Dreiecke dQl muß dem entsprechend $a = \sqrt{\frac{1}{27}}$ und $b = 1$ sein,

$$\text{folglich } x = \tfrac{1}{27} : \sqrt{\tfrac{1}{27} + 1} = \tfrac{1}{9}\sqrt{\tfrac{3}{28}},$$

d. h. das kurze Stück links von c zwischen c und $\frac{b}{9}$;

$$y = 1 : \sqrt{\tfrac{28}{27}} = 3\sqrt{\tfrac{3}{28}},$$

d. h. das lange Stück rechts von c; $c^2 = xy = \frac{1}{28}$.

Nun kommen aber stets die kleinsten Werthe $\frac{a}{5} : \frac{b}{9}$ zum sichtbaren Schnitt. Da nun im Würfelschnitte fig. 3 $Qd = \frac{3}{5}\sqrt{2}$ unserm $\frac{1}{5}$ entspricht, folglich $3\sqrt{2}$ entfernter vom Mittelpunkte ist, so müssen in der Projection auf die Fläche des Pyramidengranatoeders
$x = b = \frac{1}{9}\sqrt{\frac{3}{28}}$ und $c = \sqrt{\frac{1}{28}}$ mit $3\sqrt{2}$ multiplicirt werden, dann kommt

$$b : c = \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{3}{14}} : 3\sqrt{\tfrac{1}{14}} = \tfrac{1}{9}\sqrt{3} : 1,$$

wie oben pag. 181. Ebenso finden wir auf der rechten Seite des Perpendikels c im Dreiecke $d_1 Q l_2$, wo $a = \frac{1}{5}$ und $b = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ist, das Stück zwischen c und $\frac{a}{5}$ gleich $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{3}{28}}$ und $3\sqrt{2} \,.\, \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3}{28}} = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{14}}$. Wenn wir uns nun das Dreieck tab. 7 fig. 2 des Pyramidengranatoeders construiren, so ist nach dem Aufriß des Würfelschnittes die Seite hd zwischen Würfel- und Granatoederort $\frac{2}{3} \,.\, \frac{1}{2}\sqrt{13} = \frac{1}{3}\sqrt{13}$; die Seite zwischen ho $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, welche durch den Axenpunkt b gedrittelt wird. Hieraus findet sich dann $xoa = a = \frac{3}{28}\sqrt{3}$,
das gibt $a : c = \frac{3}{28}\sqrt{3} : 3\sqrt{\frac{1}{14}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{14}} : 1$, wie oben pag. 181.

Um die Richtigkeit der Rechnung zu prüfen, dürfen wir nur mittelst der unten zu entwickelnden Cosinusformel

$$\frac{a^2b^2 + \mu\mu_{,}b^2 + \nu\nu_{,}a^2}{\sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}\,\sqrt{a^2b^2 + \mu_1^2b^2 + \nu_1^2a^2}}$$

den Winkel zwischen $h_{,} = 2a' : \frac{9}{5}b'$ und $d_{,} = \infty a : b$ suchen, so ist

$$\mu = 0,\ \nu = 1;\ \mu_{,} = \tfrac{1}{2},\ \nu_{,} = -\tfrac{5}{9}, \text{ gibt}$$

$$-\cos = \frac{a^2b^2 + 0 - \frac{5}{9}a^2}{\sqrt{a^2b^2 + 0 + a^2}\,\sqrt{a^2b^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{25}{81}a^2}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4.14}\left(\frac{3}{81} - \frac{45}{81}\right)}{\sqrt{\frac{3}{4.14}\left(\frac{3}{81} + 1\right)}\,\sqrt{\frac{3}{4.14} \cdot \frac{3}{81} + \frac{3}{4.81} + \frac{25.3}{4.14.81}}}$$

$$= -\frac{3.42}{4.14} : \sqrt{\frac{3}{4.14} . 84}\,\sqrt{\frac{3.3}{4.14} + \frac{3}{4} + \frac{25.3}{4.14}}$$

$$+\cos = 3.42 : \sqrt{3.84}\,\sqrt{9 + 3.14 + 25.3}$$

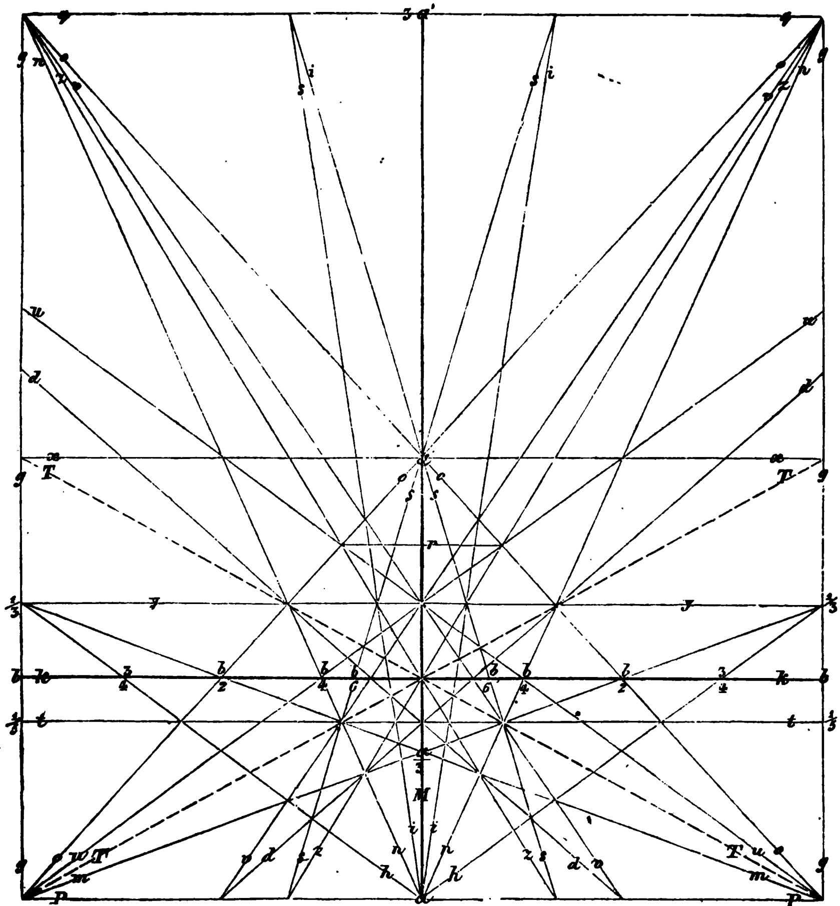
$$= 42 : \sqrt{84}\,\sqrt{3 + 14 + 25} = 42 : \sqrt{84.42}$$

$$\cos = 1 : \sqrt{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \ .\ .\ .\ .\ 45^0.$$

Damit ist die Richtigkeit der Axenelemente bewiesen. Denn da die Würfelfläche das Granatoeder unter 45^0 oder 135^0 trifft, so müßte in der Axenberechnung ein Fehler sein, wenn die Cosinusformel nicht auf dasselbe hinaus käme.

Zonenlehre.

Projection des Feldspathes auf die Geradendfläche.



Die Rechnung führen wir meist in der Projectionsebene aus. Um das möglich zu machen, muß Axe c = 1 gesetzt werden, was durch

Division stets bewerkstelligt werden kann. Denn hätten wir z. B. nach Weiß im Feldspath

$$a : b : c = \sqrt{13} : \sqrt{3 . 13} : \sqrt{3},$$

so gibt die Division mit $\sqrt{3}$ die neuen Zahlen

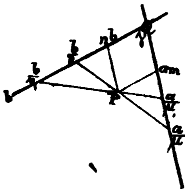
$$a : b : c = \sqrt{\frac{13}{3}} : \sqrt{13} : 1 \text{; d. h. } c = 1.$$

Die Lage eines Zonenpunktes P gegen die schiefen Axen ab ist uns durch das Parallelogramm PQ gegeben, worin die Seiten $Px = nb$ und $Py = ma$ den Axen b und a beziehungsweise parallel gehen.

Es ist das die gewöhnliche Coordinatenbezeichnung: Punkt $P = ma, nb$. Wer die lexicographische Ordnung festhält, kann bei schnellen Rechnungen die Axennamen ab weglassen, und einfach den Punkt P mit m,n oder $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}$ geben, je nachdem er ganze Zahlen oder Brüche bequemer findet, und später dann die Axenbuchstaben daneben setzen.

Sind die Axen schiefwinklich, und heißt der eingeschlossene Winkel γ, so ist bekanntlich

$$(PQ)^2 = (Qx)^2 + (Px)^2 \pm 2Qx . Px . \cos\gamma = m^2a^2 + n^2b^2 \pm mnab \cos\gamma.$$



Für $\gamma = 90^0$ wird $\cos\gamma = o$, und der Ausdruck geht über in

$$(PQ)^2 = m^2a^2 + n^2b^2.$$

Da wir es bei der Rechnung häufig mit gestrichelten Flächen m,n, zu thun haben, und diese Striche leicht mit einem Komma (,) verwechselt werden können, so habe ich schon frühzeitig (Poggend. Ann. 1835 Bd. 34 pag. 508) mich der wenn auch nicht streng mathematischen Bezeichnung meines Lehrers Weiß (Abh. Berl. Akad. Wiss. 1820 pag. 166) angeschlossen, und statt des Komma ein Pluszeichen (+) geschrieben: ein Punkt

$$P = m,n \text{ heißt darnach } P = m + n.$$

Es handelt sich hier um ein einfaches Symbol, was nicht leicht zu Irrthum führen kann. Eigentlich geht die Zonenaxe von c nach ma + nb, d. h. (c; ma + nb) pag. 35, aber c und a mit b kann man als selbstverständlich öfter weglassen.

Die Lage einer Sectionslinie wird gewöhnlich durch das Zeichen $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ gegeben. Ihre Gleichung ist dann $\frac{\mu}{a}x + \frac{\nu}{b}y = 1$, weil für $y = o$ die $x = \frac{a}{\mu}$ und für $x = o$ die $y = \frac{b}{\nu}$ werden muß.

Daraus folgt von selbst, daß eine Linie $\mu a : \nu b$ zur Gleichung $\frac{x}{\mu a} + \frac{y}{\nu b} = 1$ hat. Wegen der lexicographischen Ordnung kann es bequemer sein, die letztere Form zu gebrauchen. Daher muß der Krystallograph sich mit beiden vertraut machen.

Zonenpunktformel.

$$P = ma + nb = (\nu_{,} - \nu)\, a + (\mu - \mu_{,})\, b + (\mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu)\, c.$$

$$= \frac{\nu_{,} - \nu}{\mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu} a + \frac{\mu - \mu_{,}}{\mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu} b = \frac{\nu_{,} - \nu}{z} a + \frac{\mu - \mu_{,}}{z} b = \frac{N}{z} a + \frac{M}{z} b.$$

Giltig für den Durchschnittspunkt zweier beliebigen Sectionslinien

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} \text{ und } \frac{a}{\mu_{,}} : \frac{b}{\nu_{,}}.$$

Da der Zonenpunkt P den Fußpunkt der Zonenaxe bildet, welche von c aus nach dem Punkte (m + n) strahlt, der Axenpunkt c = 1 aber allen Zonenpunkten gemein ist, so läßt man ihn als selbstverständlich gewöhnlich weg, kann ihn aber jeden Augenblick wieder ergänzen, wie das in der ersten Reihe der Formel geschehen ist. Eigentlich sollten wir sagen, die Zonenaxe, welche von c nach Punkt P strahlt, geht oben durch Punkt c, unten durch Punkt P mit den Coordinaten

$$\frac{\nu_{,} - \nu}{\mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu} a + \frac{\mu - \mu_{,}}{\mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu} b.$$

Legen wir dann die Zonenaxe durch Parallelbewegung nach $(\mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu)\, c$, so muß in der Projectionsebene Punkt P die Coordinaten $(\nu_{,} - \nu)\, a + (\mu - \mu_{,})\, b$ erlangen. Mit Hinzuziehung von c ist die Formel leichter hingeschrieben.

Beweis folgt aus den Gleichungen

$$\frac{a}{\mu} : ma = \frac{b}{\nu} : \frac{b}{\nu} - nb \text{ und } \frac{a}{\mu_{,}} : ma = \frac{b}{\nu_{,}} : \frac{b}{\nu_{,}} - nb.$$

Oder vielleicht in eleganterer Weise aus den Coordinatengleichungen:

$$\mu x + \nu y = 1$$
$$\mu_{,} x + \nu_{,} y = 1$$

$$x = \frac{1 - \nu y}{\mu} = \frac{1 - \nu_{,} y}{\mu_{,}} \qquad y = \frac{1 - \mu x}{\nu} = \frac{1 - \mu_{,} x}{\nu_{,}}$$

$$\mu_{,} - \mu_{,}\nu y = \mu - \mu\nu_{,} y \qquad \nu_{,} - \mu\nu_{,} x = \nu - \mu_{,}\nu x$$

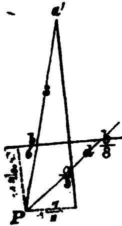
$$y = \frac{\mu - \mu_{,}}{\mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu} \qquad \frac{\nu_{,} - \nu}{\mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu} = x.$$

Gedächtnißregel. Setze die Werthe $\mu\nu$ und $\mu_{,}\nu_{,}$ über einander, und beginne **rechts entweder** unten und gehe im Kreise links herum, **oder** oben und gehe im Kreise rechts herum, so müssen für die beiden ersten Ausdrücke die einfachen Zahlen, für den dritten die kreuzweisen Producte abgezogen werden. Also:

$$\mu\nu_, \text{ rechts unten } (\nu_, - \nu)\, a + (\mu - \mu_,)\, b + (\mu\nu_, - \mu_,\nu)\, c,$$
$$\mu_,\nu_, \text{ rechts oben } (\nu - \nu_,)\, a + (\mu_, - \mu)\, b + (\mu_,\nu - \mu\nu_,)\, c.$$

Natürlich sind dabei die positiven und negativen Vorzeichen gehörig zu berücksichtigen. Es ist practisch, nach dem Vorgange Miller's, die negativen Zeichen durch Querstriche über oder unter der Zahl anzudeuten.

Beispiel. Wo schneidet beim **Feldspath** pag. 186 $d = \frac{1}{5}a : \frac{1}{8}b$ rechts, die $s = a' : \frac{1}{6}b$ links? Man hält den Punkt P im vordern linken Quadranten mit dem Finger fest und schreibt die Zahlen sofort hin, wie folgt:



$$\mu : \nu = 5 : \bar{8} \qquad (\nu_, - \nu) = (6 + 8)\, a,$$
$$(\mu - \mu_,) = (5 + 1)\, b,$$
$$(\mu\nu_, - \mu_,\nu) = (5 . 6 - 1 . 8)\, c,$$
$$\mu_, : \nu_, = \underline{1} : 6 \quad 14a + 6b + 22c = \tfrac{7}{11}a + \tfrac{3}{11}b + c.$$

Allgemein. $P = ma + nb = (\nu_,\pi - \nu\pi_,)a + (\mu\pi_, - \mu_,\pi)\, b + (\mu\nu_, - \mu_,\nu)\, c$

$$= \frac{\nu_,\pi - \nu\pi_,}{\mu\nu_, - \mu_,\nu}\, a + \frac{\mu\pi_, - \mu_,\pi}{\mu\nu_, - \mu_,\nu}\, b : c.$$

Giltig für den Zonenpunkt zweier beliebigen Flächen

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi} \text{ und } \frac{a}{\mu_,} : \frac{b}{\nu_,} : \frac{c}{\pi_,}.$$

Setzen wir darin $\pi = \pi_, = 1$, so folgt die besondere Zonenpunktformel. Die symmetrische Anordnung der Buchstaben läßt die allgemeine Formel aus der besondern sogleich erkennen, denn man braucht neben die gestrichelten einfachen Buchstaben nur ein ungestricheltes π und umgekehrt zu setzen; oder bringt durch Multiplication die allgemeinen Flächenausdrücke $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi}$ und $\frac{a}{\mu_,} : \frac{b}{\nu_,} : \frac{c}{\pi_,}$ auf die Form

$$\frac{\pi}{\mu}a : \frac{\pi}{\nu}b : c \text{ und } \frac{\pi_,}{\mu_,}a : \frac{\pi_,}{\mu_,}b : c,$$

und erlangt sofort durch Setzung von

$$\mu = \frac{\mu}{\pi},\ \nu = \frac{\nu}{\pi};\ \mu_, = \frac{\mu_,}{\pi_,},\ \nu_, = \frac{\nu_,}{\pi_,}$$

den Beweis.

Hat man es mit Brüchen zu thun, so wird es öfter bequem, sich dieser breitern Formel zu bedienen, weil man dann nach Bernhardi's Vorgang pag. 28 nie Brüche bekommt.

Beispiel. Es soll der Durchschnitt zweier Flächen

$$\tfrac{3}{2}a : 3b : c = \frac{a}{2} : b : \frac{c}{3} \text{ vorn rechts}$$

$$\text{und } 2a : \tfrac{2}{3}b' : c = a : \frac{b'}{3} : \frac{c}{2} \text{ vorn links}$$

gesucht werden. Wir haben dann

$$\begin{array}{l|l} \mu : \nu : \pi = 2:1:3 & (\nu,\pi - \nu\pi,)\ a + (\mu\pi, - \mu,\pi) b + (\mu\nu, - \mu,\nu)\ c \\ \mu, : \nu, : \pi, = 1 : \underline{3} : 2 & (-3.3 - 1.2) a + (2.2 - 1.3) b + (-2.3 - 1.1) c \\ & \quad -11a \qquad + \qquad b \qquad\qquad - 7c \end{array}$$

$$= \frac{11}{7} a - \frac{b}{7} = \frac{11}{7} a + \frac{b'}{7}$$

d. h. der Zonenpunkt liegt vorn im linken Quadranten.

Suchten wir den Durchschnitt von $\frac{a}{2} : \frac{b}{3} : \frac{c}{4}$ mit $\frac{a}{5} : \frac{b}{6} : \frac{c}{7}$, so hätten wir kurz

$$\begin{array}{ccc|l} \mu & \nu & \pi & (6.4 - 3.7)\ a + (2.7 - 5.4)\ b + (2.6 - 5.3)\ c \\ 2 & 3 & 4 & \quad 3a \qquad\qquad - 6b \qquad\qquad - 3c \\ 5 & 6 & 7 & \quad -a \qquad\qquad\quad 2b \qquad\qquad\quad c \\ \mu, & \nu, & \pi, & \end{array}$$

d. h. a' + 2b liegt hinten rechts, wenn wir ein für allemal b' und a' auf die Gegenseite verlegen. Nach der speciellen Formel würden die Sectionslinien derselben Flächen lauten:

$2a : \frac{4}{3}b$ und $\frac{7}{5}a : \frac{7}{6}b$. Wir hätten:

$$\frac{\frac{1}{2} \mid \frac{3}{4}}{\frac{5}{7} \mid \frac{6}{7}} = \frac{\frac{14}{28} \mid \frac{21}{28}}{\frac{20}{28} \mid \frac{24}{28}}$$

zu setzen, da die Kreuzproducte 28tel geben, und haben dann

$$\frac{24 - 21}{28} a + \frac{14 - 20}{28} b + \frac{12 - 15}{28} c$$
$$= 3 - 6 - 3c = a' + 2b$$

wie oben. Wenn man mit Rücksicht auf die Kreuzproducte gleich den größten gemeinsamen Nenner wählt, so machen Brüche auch keine Schwierigkeit, weil jener Nenner sich wegmultiplicirt. Auch ist der Vortheil der Anschauung und das Rechnen mit zwei statt drei Gliedern anzuschlagen. Die Sache ist übrigens so leicht durchschaut, daß es keiner Worte weiter bedarf.

Zwei besondere Fälle gibt es: es kann

1) die Fläche $\frac{a}{\mu,} : \frac{b}{\nu,}$ einer der Axen a oder b parallel gehen, dann wird das entsprechende Zeichen = 0; d. h. für $\mu, = 0$ geht die Fläche der a und für $\nu, = 0$ der b parallel. Also gibt:

$$\nu, = 0,\ P = ma + nb = (0 - \nu)\ a + (\mu - \mu,)\ b + (0 - \mu,\nu)\ c$$
$$= \frac{a}{\mu,} + \frac{\mu, - \mu}{\mu,\nu} b.$$

$$\mu, = 0,\ P = ma + nb = (\nu, - \nu)\ a + (\mu - 0)\ b + (\mu\nu, - 0)\ c$$
$$= \frac{\nu, - \nu}{\mu\nu,} a + \frac{b}{\nu,}.$$

2) Geht die Linie $\frac{a}{\mu,} : \frac{b}{\nu,}$ durch den Mittelpunkt, so hat sie den Ausdruck

$$\frac{a}{\pm\infty\mu,} : \frac{b}{\mp\infty\nu,},$$

denn was Axe a positiv schneidet, muß Axe b negativ schneiden, und umgekehrt. Wir dürfen daher in der Zonenpunktformel nur $\mu, = \pm\infty\mu,$ und $\nu, = \mp\infty\nu,$ setzen, also:

$$(\mp\infty\nu, - \nu)\,a + (\mu \mp \infty\mu,)\,b + (\mp\infty\mu\nu, \mp \infty\mu,\nu)\,c$$
$$= \nu,a + \mu,b + (\mu\nu, + \mu,\nu)\,c, \text{ daher}$$
$$P = ma + nb = \frac{\nu,a}{\mu\nu, + \mu,\nu} + \frac{\mu,b}{\mu\nu, + \mu,\nu}.$$

Für $\nu = \nu, = 1$ wird $P = \frac{a}{\mu + \mu,} + \frac{\mu,b}{\mu + \mu,}$. Diese einfachere **Mittelpunktsformel** läßt sich oft bequem anwenden. Suche ich z. B. wie im Pyramidengranatoeder die gebrochene Oktaederkante $a : \frac{3}{2}a$ durch die diagonale Axe getheilt wird, so ist $\mu, = 1$, $\mu = \frac{2}{3}$, folglich haben wir $\frac{a}{\frac{2}{3} + 1} + \frac{\frac{2}{3}b}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{3}{5}a + \frac{2}{5}a$, d. h. die Kante wird im Verhältniß von 3 : 2 getheilt. Die Granatoederkante geht $a : \sqrt{2}$, die trigonale Axe, welche senkrecht auf die Oktaederfläche steht, ebenfalls, also ist $\mu, = \mu = 1$, also $P = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$. Dieser abgekürzte Satz wurde oben pag. 182 schon angewendet.

Ist diese Linie $PQ = \frac{a}{\pm\infty\mu,} : \frac{b}{\mp\infty\nu,}$ Kantenzonenlinie, so muß $\mu, = \nu,$ werden, und die Formel geht über in

$$P = ma + mb = \frac{\mu,a}{\mu\mu, + \mu,\nu} + \frac{\mu,b}{\mu\mu, + \mu,\nu}$$
$$= \frac{a}{\mu + \nu} + \frac{b}{\mu + \nu} \text{ (Kantenzone).}$$

Das **Kantenzonengesetz** lautet also $m = n = \frac{1}{\mu + \nu}$ (Weiß, Abh. Berl. Akad. 1819 pag. 252).

Prüfen wir an der Feldspathprojection pag. 186 die drei Kantenzonen $\frac{1}{1} + \frac{1}{1}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, so ist für die

erste $\frac{1}{1} + \frac{1}{1}$: $m = \frac{1}{3 - 2}$, $u = \frac{1}{4 - 3}$, $o = \frac{1}{2 - 1}$, $P = \frac{1}{1 + 0}$,

$$g = \frac{1}{1 + 0} = 1;$$

zweite $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$: $o = \frac{1}{1 + 2}$, $d = \frac{1}{8 - 5}$, $n = \frac{1}{4 - 1}$,

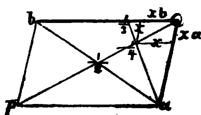
$$y = \frac{1}{3 - 0} = \frac{1}{3};$$

dritte $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$: $n = \frac{1}{1+4}$, $m = \frac{1}{3+2}$, $t = \frac{1}{5+0}$, $s = \frac{1}{6-1}$,

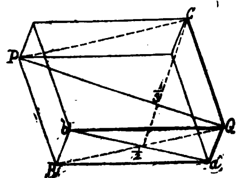
$$\nu = \frac{1}{8-3} = \frac{1}{5}.$$

Das Kantenzonengesetz

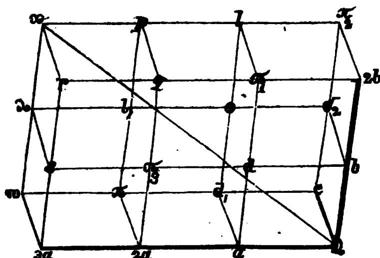
ist im Grunde nichts weiter als das **Parallelogramm der Kräfte**, und wird dadurch zum **wichtigsten Gesetze der Krystallographie**. Hätten wir zwei Kräfte $1 = \frac{1}{1}$, und construirten daraus das Parallelogramm, so wird die Längsdiagonale Qp durch die Querdiagonale halbirt, weil $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ ist. Ziehe ich jetzt eine Linie von a nach $\frac{1}{3}$, so wird sie geviertelt, weil $\frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$ ist. Der Beweis liegt auch in der Projection



$1 : \frac{1}{3} = x : \frac{1}{3} - x$, oder $1 + \frac{1}{3} : \frac{1}{3} = 1 : x$, d. h. $x = \frac{1}{4}$.
Hätten wir die Querdiagonale $\frac{1}{\mu} : \frac{1}{\nu}$, so schnitte sie $\frac{1}{\mu + \nu}$ von der Längsdiagonale ab.



Schreiten wir jetzt zum Hexaid (Parallelepipedum), aus den Axen abc construirt, so schneidet ab von der Resultante $Qp = p$ die Hälfte $\frac{p}{2}$ ab. Das Parallelogramm QpPc hat zur Längsdiagonale QP, welche mit der Resultante des Parallelepipeds zusammenfällt. Eine Linie von c nach $\frac{1}{2}$p gezogen, muß sie dritteln, d. h. eine Fläche a : b : c wird die trigonale Axe (Eckenaxe) QP in $\frac{1}{3}$ schneiden, weil $\frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$ ist. Eine allgemeine Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi}$ schneidet daher $\frac{1}{\mu + \nu + \pi}$ ab. Das alles fließt unmittelbar aus dem einfachen Kantenzonengesetze. Die Krystallflächen sind aber nichts weiter als der Effect solch ziehender Kräfte.



Wir machen uns das am bequemsten im regulären Systeme klar. Denn habe ich einen Strahl $Qx = 3a + 2b + c = 3 + 2 + 1$, so bekommt für rechtwinkliche Axen eine senkrecht dagegen gelegte Fläche den Ausdruck $\frac{1}{3a} : \frac{1}{2b} : c = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1$ pag. 165. Der gewöhnliche 48flächner

$\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a : a$ hat daher zum Perpendikel die Linie Qx. In der Ebene ab ist $d = a + b$, d. h. eine Ebene senkrecht gegen diesen Strahl d gibt das Granatoeder $a : a$. Ebenso verhält sich d_1 und d_2. Ziehe ich in der Axenebene ab den Strahl Qd, so trifft derselbe $q = 2a + 2b$, was man $= a + b$ setzen kann, denn es ist gleichgiltig, ob die Zugkraft auf d oder q wirkt, wenn beide in einer Richtung liegen. Der Pyramidenwürfel $\pi = c + 2a$ wird $a : \frac{1}{2}a : \infty a$, ebenso $\pi_1 = a + 2b$ und $\pi_2 = c + 2b$. Die Ecke $\omega = c + 3a$ würde einen niedrigern Pyramidenwürfel $a : \frac{1}{3}a : \infty a$ und Ecke $r = 3a + 2b$ einen $\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a : \infty a$ bestimmen. Der Strahl Qo führt uns zum Oktaederträger $a + b + c = a : a : a = 1 : 1 : 1$, der nur einzig im Oktanten sein kann. Das Leucitoeder $l = a + c + 2b = a : a : \frac{1}{2}a$ und $l_1 = b + c + 2a$ würde im Punkte $a + b : 2c$ den dritten Strahl haben, welcher auf der Figur nicht gezeichnet ist, dagegen ist $\lambda = b + c + 3a = a : a : \frac{1}{3}a$ das niedrige Leucitoeder vorhanden. Punkt $p = 2b + 2a : c = 2a : 2a : a$ gehört dagegen dem Pyramidenoktaeder $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : a = a : a : 2a$. Auf diese Weise können wir uns die Strahlen der ziehenden Kräfte leicht klar machen. Man kann auch die Kräfte wieder componiren: so ist Ql die Resultante von $2b + a + c$, Qd_1 aber die Resultante von $a + b$, also ist Ql die Resultante von $2b + Qd_1$ ꝛc.

Für Anfänger ist es gut, sich an solchen nach den Axen orientirten Hexaiden die verschiedenen Methoden klar zu machen. Hätten wir nebenstehendes **rechtwinkliche Hexaid** mit den dreierlei Kantenlängen abc, entsprechend den Coordinaten xyz orientirt, so ist die diagonale Zwischenaxe d die Resultante der Kräfte ab, dagegen die trigonale Eckaxe $t = t$, wieder die Resultante der Kräfte cd, wie das Parallelogramm QPP_1c zeigt. Bei der Linearprojection legt man gewöhnlich alles durch den Punkt c, und sucht sich auf der Projectionsebene ab zu orientiren. Unsere Zonenaxe t, welche von c nach dem Punkte $P = a + b$ strahlt, entspricht der Resultante der drei durch die Axeneinheiten abc repräsentirten Kräfte. Macht t mit c den Winkel γ, mit b den Winkel β, mit a den Winkel α, so ist in dem rechtwinklichen Dreiecke PQc oder PP_1c

$$t : \sin R = c : \cos\gamma,\ t = \frac{c}{\cos\gamma},$$

da $\sin R = \sin 90^0 = 1$ wird. Ganz ebenso finden wir

$$t = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{a}{\cos\alpha},$$

denn es ist einerlei, welche der vier Eckaxen QP,, cP, bT, aT wir wählen, wir bekommen immer dieselben drei Axen abc und drei Winkel $\alpha\beta\gamma$. Da nun ferner

$$t^2 = c^2 + d^2 = c^2 + b^2 + a^2 = \frac{c^2}{\cos\gamma^2} = \frac{b^2}{\cos\beta^2} = \frac{a^2}{\cos\alpha^2}$$

ist, so folgt sofort der bekannte Satz der Mechanik

$$\cos\gamma^2 = \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\cos\beta^2 = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\cos\alpha^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1.$$

Nach der andern Anschauung legt man die Zonenaxe t, durch den Mittelpunkt Q, dann ist die Richtung der Linie t in Beziehung auf Axe c entgegengesetzt, was namentlich von Einfluß auf die Controlformel wird. Wir bekommen diese nach unserer Entwickelung $m\mu + n\nu = p\pi$. Dagegen muß für die Mittelpunktslage der Zonenaxe

$$m\mu + n\nu = -p\pi \text{ oder } m\mu + n\nu + p\pi = 0$$

werden. Mathematiker lieben es, die Zonenaxen durch den Mittelpunkt zu legen, und alle möglichen Lagen derselben durch die Coordinaten abc auf der Kugelfläche zu fixiren. Da der rechte Winkel für die Rechnung Vereinfachung gewährt, so denkt man sich statt der Resultanten Perpendikel auf die Flächen gefällt, und fixirt diesen Punkt (Flächenort) auf der Kugel. Hätte diese Fläche senkrecht auf t, durch den Punkt P, gelegt den Ausdruck $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi}$, so wäre im Dreiecke $\frac{a}{\mu} Q \frac{c}{\pi}$ der rechte Winkel (R) bei P,, folglich

$$\frac{a}{\mu} : \sin R = QP, : \cos\alpha, \ \sin R = 1, \text{ gibt}$$

$$QP, = \frac{a}{\mu} . \cos\alpha.$$

Ganz auf die gleiche Weise findet sich dasselbe

$$QP, = \frac{b}{\nu} . \cos\beta \text{ und } QP, = \frac{c}{\pi} . \cos\gamma,$$

wo wie vorhin $\alpha\beta\gamma$ die Winkel bedeuten, welche das Perpendikel t, mit den entsprechenden Axen abc macht, daher ist

$$QP, = \frac{a}{\mu} . \cos\alpha = \frac{b}{\nu} . \cos\beta = \frac{c}{\pi} . \cos\gamma,$$

bekanntlich pag. 70 der Fundamentalsatz, wovon Miller ausgeht.

Betrachten wir die Projection des regulären Systems in Beziehung auf Resultanten und Perpendikel, so fallen beim Würfel, Oktaeder und Granatoeder Resultanten und Perpendikel zusammen, die Leucitoide

$\frac{a}{m} : a : a$ und Pyramidenoktaeder $ma : a : a$ vertauschen dagegen Resultanten und Perpendikel mit einander. Das Leucitoeder $c : 2a : 2a$ hat in der Projectionsebene den Punkt der Resultante in $2a + 2a$, den Punkt seines Perpendikels dagegen in $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$; beim Pyramidenoktaeder $c : \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a$ ist es dagegen umgekehrt, sie verhalten sich also reciprok. Dasselbe gilt im Allgemeinen von den Achtundvierzigflächnern $a : \frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a$, sie vertauschen ihre Resultante mit dem Perpendikel auf $a : ma : na$. Dagegen ist beim Pyramidenwürfel

$$a : ma : \infty a = a : \frac{a}{m} : \infty a,$$

die erste Fläche liegt für $m = 2$ blos oben, die andere unten, es ist daher auch das Perpendikel auf die eine Fläche zugleich die Resultante auf die andere. Dieselbe Eigenschaft hat auch der Achtundvierzigflächner

$$a : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{4}a = 4a : 2a : a,$$

wo jede Resultante zugleich das Perpendikel der andern reciproken Fläche sein muß.

Die Rechnung der Länge dieser Resultante ist nach der weiter unten entwickelten Seitenwinkelformel sehr einfach. Wir setzen blos zur Orientirung in die Axen $y = c : 2b : 4a$, so ist

$$\cos = 1 + mm, + nn, : \sqrt{1 + m^2 + n^2}\ \sqrt{1 + m,^2 + n,^2}, \text{ gibt für } m = 4,\ n = 2$$
$$= 1 + 4m, + 2n, \ : \sqrt{1 + 16 + 4}\ \ \sqrt{1 + m,^2 + n,^2}$$
$$m, = n, = 0 \ \ldots\ldots \cos\gamma = 1 + 0 + 0 : \sqrt{21}\ \sqrt{1 + 0 + 0} = \sqrt{\tfrac{21}{21}},\ \cos\gamma^2 = \tfrac{1}{21}$$
$$m, = 0, n, = \infty\ .\ \cos\beta = 1 + 4\infty + 0 : \sqrt{21}\ \sqrt{1 + 0 + \infty^2} = 4\sqrt{\tfrac{1}{21}},\ \cos\beta^2 = \tfrac{16}{21}$$
$$m, = \infty, n, = o\ .\ \cos\alpha = 1 + 0 + 2\infty : \sqrt{21}\ \sqrt{1 + \infty^2 + 0} = 2\sqrt{\tfrac{1}{21}},\ \cos\alpha^2 = \tfrac{4}{21}$$
$$\overline{\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = \tfrac{21}{21} = 1.}$$

Wenn nemlich die Zonenaxe von c nach $4a + 2b$ strahlt, so geht Axe c durch den gemeinsamen Punkt, ihr Zonenpunkt liegt daher im $0 + 0$ auf der Projectionsebene. Dagegen muß ich nun auch Axe b durch den gemeinsamen Punkt c legen, dann strahlt sie von c parallel der Axe b ins Unendliche, daher für sie $n, = \infty$. Ebenso a durch c gelegt muß $m, = \infty$ werden.

2. Sectionslinienformel.

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} = \frac{a}{n, - n} : \frac{b}{m - m,} : \frac{c}{mn, - m,n}$$

$$= \frac{mn, - m,n}{n, - n}a : \frac{mn, - m,n}{m - m,}b = \frac{N}{n, - n}a : \frac{N}{m - m,}b.$$

Jetzt sind zwei Zonenpunkte $P = ma + nb$ und $P_, = m_,a + n_,b$ gegeben, ich soll die durchgelegte Sectionslinie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ finden. Dazu genügen wieder die zwei Gleichungen:

$$\frac{1}{\mu} : m = \frac{1}{\nu} : \frac{1}{\nu} - n \quad \text{und} \quad \frac{1}{\mu} : m_, = \frac{1}{\nu} : \frac{1}{\nu} - n_,$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{m}{\nu} \cdot \frac{\nu}{1 - n\nu} = \frac{m_,}{\nu} \cdot \frac{\nu}{1 - n_,\nu} \ldots \frac{1}{\nu} = \frac{n}{\mu} \cdot \frac{\mu}{1 - m\mu} = \frac{n_,}{\mu} \cdot \frac{\mu}{1 - m_,\mu}$$

$$\frac{m}{1 - n\nu} = \frac{m_,}{1 - n_,\nu} \qquad \frac{n}{1 - m\mu} = \frac{n_,}{1 - m_,\mu}$$

$$m - mn_,\nu = m_, - m_,n\nu \qquad n - m_,n\mu = n_, - mn_,\mu$$

$$m - m_, = (mn_, - m_,n)\nu \qquad (mn_, - m_,n)\mu = n_, - n.$$

$$\frac{m - m_,}{mn_, - m_,n} = \nu \qquad \mu = \frac{n_, - n}{mn_, - m_,n}.$$

Allgemein: $\frac{a}{n_,p - np_,} : \frac{b}{mp_, - m_,p} : \frac{c}{mn_, - m_,n}$.

Wir kommen auf diese Weise zu derselben Gedächtnißregel, wie bei der Zonenpunktformel, nur was dort Multiplicator war, ist hier Divisor.

Beispiel. Die mittlere Pyramidengranatoederfläche $\frac{2}{3}a : 2b : c$ unten links fällt rechts in die erste Kantenzone $a + b$ und links in die Diagonalzone $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$. Jetzt dürfen wir die Brüche nicht umkehren (invertiren), sondern müssen sie hinstellen, und dann ganz wie vorhin verfahren. Also:

$$\frac{1 \; 1}{\frac{1}{2} \; \underline{\frac{1}{2}}} \text{ gibt } \frac{a}{-\frac{1}{2} - \frac{2}{2}} : \frac{b}{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}} : \frac{c}{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2})} = \frac{a}{-\frac{3}{2}} : \frac{b}{\frac{1}{2}} : \frac{c}{-1}$$

$$= \frac{2}{3}a : -2b : c = \frac{2}{3}a : 2b'.$$

Nach der allgemeinen Formel haben wir zu setzen

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{1} & 2 \end{matrix} \text{ gibt } \frac{a}{-1.1 - 2.1} : \frac{b}{1.2 - 1.1} : \frac{c}{-1.1 - 1.1}$$

$$= \frac{a}{-3} : b : \frac{c}{-2} = \frac{2}{3}a : 2b'.$$

Weil die Sache zu sperrig wird durch die Nenner, so können wir zur Abkürzung die Zähler weglassen, müssen dann aber die gefundene Zahl umkehren. Fläche o im Feldspath pag. 186 fällt hinten in die Zonenpunkte $\frac{5}{7}a + \frac{6}{7}$ und $\frac{3}{5}a + \frac{1}{5}$. Wir setzen hin

$$\frac{\frac{3}{5} \mid \frac{1}{5}}{\frac{5}{7} \mid \frac{1}{7}} = \frac{\frac{21}{35} \mid \frac{7}{35}}{\frac{25}{35} \mid \frac{5}{35}} \text{ gibt}$$

$$(5 - 7)\,a : (21 - 25)\,b : (3 - 5)\,c = -2a : -4b : -2c$$

$$= a : 2b : c, \text{ d. h. } a : \tfrac{1}{2}b.$$

Zur Abkürzung brauchen wir nur die Zähler 21, 7, 25, 5 hinzuschreiben, und blos den Nenner 35 im Gedächtniß zu behalten wegen des Kreuzproductes, welches man nicht mit den großen, sondern mit

den kleinern Brüchen macht, weil sich dann der Nenner wegmultiplicirt. Denn wollten wir mit den großen Brüchen rechnen, so kämen

$$\left(\frac{5}{35} - \frac{7}{35}\right) a : \left(\frac{21}{35} - \frac{25}{35}\right) b : \left(\frac{105}{35\,.\,35} - \frac{175}{35\,.\,35}\right) c$$

$$= \frac{-2}{35} a : \frac{-4}{35} b : \frac{-70}{35\,.\,35} c = -2a : -4b : -2c = a : 2b : c.$$

Dieses große Kreuzproduct vermeidet man, wenn man statt

$$\frac{105}{35\,.\,35} - \frac{175}{35\,.\,35}$$

die kleinern Brüche $\frac{3}{5} \,.\, \frac{1}{7} - \frac{5}{7} \,.\, \frac{1}{5} = \frac{3}{35} - \frac{5}{35}$ setzt, weil dann der Nenner gar nicht mehr nöthig ist. Man schafft sich auf diese Weise die Brüche leicht aus dem Wege, und rechnet dann mit der kleinern übersehbarern Formel ebenfalls sehr gern. Nach der allgemeinern Formel hätten wir

$\begin{matrix} 3 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{matrix}$ folglich $(1\,.\,5 - 1\,.\,7)\,a : (3\,.\,7 - 5\,.\,5)\,b : (3\,.\,1 - 5\,.\,1)\,c$

$$= -2a : -4b : -2c = a : 2b : c,$$

wie oben. Das Rechnen mit ganzen Zahlen und drei Gliedern gewährt zwar einen kleinen Vortheil, allein die Uebertragung auf die Figur ist mit zwei Gliedern unmittelbarer, und da man sich in den meisten Fällen die Brüche sofort auf gleichen Nenner bringt, so sind dann zwei Glieder wieder bequemer. Da übrigens die Brüche der Zonenpunkte gleiche Nenner haben, so ist das dritte Glied ebenfalls immer abzulesen.

Bei der Anwendung der Zonenpunkt- und Sectionslinienformel werden die lateinischen Buchstaben stets als Multiplicatoren, die griechischen dagegen als Divisoren genommen. Nur dadurch ist der gleiche Gang der Formelbildung ermöglicht, die sich außerordentlich leicht merken läßt.

Der Gleichmäßigkeit wegen habe ich früher auch die Zonenpunkte mit Divisoren bezeichnet, nemlich $\frac{a}{m} + \frac{b}{n}$ und $\frac{a}{m,} + \frac{b}{n,}$. Dann dürfen wir nur $m = \frac{1}{m}$, $n = \frac{1}{n}$; $m, = \frac{1}{m,}$, $n, = \frac{1}{n,}$ setzen, um sofort zur alten Formel

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} = \frac{m,n - mn,}{mm,(n - n,)} a : \frac{m,n - mn,}{nn,(m, - m)} b \text{ (Divisorenformel)}$$

zu gelangen. Setzen wir jetzt in obigem Beispiele $m = n = 1$, $m, = 2$, $n, = -2$, so kommt sofort $\frac{2}{3}a : 2b'$. Wir brauchen nicht umzukehren.

Besondere Fälle gibt es mehrere.

1. Liegt Punkt P, in der Axe a oder b, so wird m, oder n, = 0. Für n, = 0 liegt P, in Axe a, das ändert die Formel sofort in

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} = m,a : \frac{-m,n}{m - m,} b : c = m,a : \frac{m,n}{m, - m} b : c.$$

Für $m, = 0$ liegt P, in Axe b, dann wird

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} = \frac{mn,}{n, - n} a : n,b : c.$$

Beispiel. Feldspath $h = a : \frac{5}{4}b$ geht durch a und Zonenpunkt $\frac{7}{11} + \frac{5}{11}$, also ist $m, = 1$, $m = \frac{7}{11}$, $n = \frac{5}{11}$, gibt $\frac{m,n}{m, - m} = \frac{5}{4}$.

2. Liegt Punkt P, in der Kantenzone, so ist $n, = m,$. Die Formel wird

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} = \frac{m, (m - n)}{m, - n} a : \frac{m, (m - n)}{m - m,} b : c,$$

was keinen wesentlichen Vortheil bietet. Würde dagegen auch der zweite Punkt P in eine nebenliegende Kantenzone fallen, so müßte $\pm n = \mp m$ werden, und die Formel übergehen in

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} = \frac{m, (m + m)}{m, + m} a : \frac{m, (m + m)}{m - m,} b = \frac{2mm,}{m + m,} a : \frac{2mm,}{m - m,} b.$$

In diesem Falle wird die Formel einfacher, wenn wir die Zonenpunkte nicht $m,a \pm m,b$ und $ma + mb$, sondern mit Divisoren $\frac{a}{m,} \pm \frac{b}{m,}$ und $\frac{a}{m} + \frac{b}{m}$ bezeichnen. Dann geht die Formel über in

$$\frac{2 \frac{1}{mm,}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{m,}} a : \frac{2 \cdot \frac{1}{mm,}}{\frac{1}{m} - \frac{1}{m,}} b = \frac{2a}{m + m,} : \frac{2b}{m - m,}$$ (Zwischenkantenzonen-formel).

Natürlich ergiebt sich das auch unmittelbar aus obiger Divisoren-formel der Zonenpunkte, ich darf darin nur $n, = m,$ und $\pm n = \mp m$ setzen.

Beispiel. Feldspath pag. 186 $n = a : \frac{b}{4}$ liegt in der vordern Kantenzone $\frac{1}{4 + 1} = \frac{1}{5}$ und in der hintern $\frac{1}{4 - 1} = \frac{1}{3}$; folglich für die zwischenliegende Axe $\frac{1 + 1}{5 + 3} b = \frac{1}{4}b$, für die außenfallende

$$\frac{1 + 1}{5 - 3} a = a.$$

Fläche $d = \frac{a}{5} : \frac{b}{8}$ liegt vorn in $\frac{1}{8 + 5} = \frac{1}{13}$, hinten in $\frac{1}{8 - 5} = \frac{1}{3}$; folglich für die zwischenliegende Axe $\frac{1 + 1}{13 + 3} b = \frac{1}{8}b$; für die außen-fallende $\frac{1 + 1}{13 - 3} a = \frac{1}{5}a$. Das

Zwischenkantenzonengesetz lautet also:

$$\frac{1}{\mu} : \frac{1}{\nu} = \frac{1 + 1}{m \pm m,} : \frac{1 + 1}{m \mp m,},$$

giltig für nebenliegende Kantenzonen $\frac{a}{m} \pm \frac{b}{n}$ und $\frac{a}{m,} \mp \frac{b}{n,}$. Gerade diese Einfachheit beider Gesetze, welche die Schnitte der Kantenzonen- und Axenlinien mit einander verbinden, läßt uns gern die Umkehrung der Brüche mit in den Kauf nehmen.

3. Liegt $P, = m,a + n,b$ im Mittelpunkte, so wird $m, = n, = 0$, und die Sectionslinienformel geht über in

$$\frac{a}{-n} : \frac{b}{m} : \frac{c}{0} = 0ma : 0nb' : c = ma : nb' : \infty c.$$

Das ist die Richtung einer Sectionslinie, welche von P aus nach dem Mittelpunkte gezogen wird. Wählte ich die Divisorenformel, so müßte $m, = n, = \infty$ gesetzt werden. Es käme dann

$$\frac{a}{-\infty m} : \frac{b}{\infty n} = \frac{a'}{\infty m} : \frac{b}{\infty n}.$$

Bei Substitutionen wird von diesen Formeln Gebrauch gemacht.

3. Bedingungsgleichung (Controlformel).

Liegt ein Zonenpunkt $P = ma + nb$ in einer Sectionslinie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$, so findet die Bedingungsgleichung statt:

$$m\mu + n\nu = 1.$$

Denn es verhält sich:

$$\frac{1}{\mu} : m = \frac{1}{\nu} : \frac{1}{\nu} - n = \frac{1}{\nu} : \frac{1 - n\nu}{\nu} = 1 : 1 - n\nu$$

$$\frac{1 - n\nu}{\mu} = m, \quad 1 = m\mu + n\nu.$$

Dieser Satz dient zur Controle der Rechnungen und Projectionen.

Beispiel. Feldspath pag. 186 $o = a' : \frac{b}{2}$ bildet mit $\mu = \frac{a'}{3} : \frac{b}{4}$ einen Zonenpunkt $P = \frac{3}{5}a' + \frac{1}{5}b$. Denn es ist

$$\frac{1}{3}\Big|\frac{2}{4} \quad (-4 - 2)\,a + (1 - 3)\,b + (-4 - 6)\,c$$

$$= 6a + 2b + 10c = \frac{3}{5}a + \frac{1}{5}b.$$

Folglich $m = \frac{3}{5}$, $n = \frac{1}{5}$; $\mu = 1$, $\nu = 2$, gibt als Probe

$$m\mu + n\nu = \frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 2 = 1.$$

Nur einige Uebung, und ein Blick zeigt die Richtigkeit der Rechnung!

Setzen wir in dieser Controlformel $m = n$, so kommt sofort das Kantenzonengesetz $m = \frac{1}{\mu + \nu}$.

Allgemein lautet die Bedingungsgleichung $m\mu + n\nu = p\pi$. Wir haben dann die Ausdrücke

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi} = \frac{\pi}{\mu} a : \frac{\pi}{\nu} b : c \text{ und } ma + nb + cp = \frac{m}{p} a + \frac{n}{p} b + c$$

im Auge, und dürfen nur $\mu = \frac{\mu}{\pi}$, $\nu = \frac{\nu}{\pi}$; $m = \frac{p}{m}$, $n = \frac{n}{p}$ setzen, um sofort die allgemeinste Gleichung zu erhalten.

Unsere Zonenaxen strahlen immer von einem Punkte in c nach der Projectionsebene. Legten wir sie durch den Mittelpunkt der Projection pag. 194, so würde c negativ, die Gleichungen müßten die Form

$$m\mu + n\nu + 1 = 0 \text{ und } m\mu + n\nu + p\pi = 0 \text{ annehmen.}$$

Mögen auch diese drei (für schiefe und rechtwinkliche Axen giltige) Formeln auf längst bekannten Ausdrücken der analytischen Geometrie beruhen, so verbreitete ihre Anwendung auf die Entwickelung der Krystallflächen aus Zonen doch ein so neues Licht, daß von jener Zeit eine Epoche in der Behandlung datirt. Weiß (Abh. Berl. Akad. 1820 pag. 169) setzte das zuerst auseinander, und ihm folgte alsbald sein Schüler F. E. Neumann (Beiträge zur Krystallonomie 1823). Das Bestreben der Nachfolger konnte nur dahin gehen, den vorgezeichneten Weg in möglichst bündiger Weise darzulegen. In der geschichtlichen Einleitung pag. 28 wurde schon auseinandergesetzt, wie sich der talentvolle Vorgänger Bernhardi dazu verhielt, der zuerst in Deutschland (Gehlen's Journ. für Chem. Phys. Mineral. 1807 pag. 157) die unvollkommene Methode Hauy's siegreich angriff, und wirklich verbesserte. Wir haben nicht blos den einfachsten, sondern auch den anschaulichsten Weg eingeschlagen.

Bemerkung. Unsere Rechnung geht in der Projectionsebene vor sich. Haben wir darin irgend einen

$$\text{Zonenpunkt } m + n \doteq \frac{\nu_{,} - \nu}{z} + \frac{\mu - \mu_{,}}{z}$$

pag. 188 gefunden, d. h. haben wir die Gleichung

$$m : n = \frac{\nu_{,} - \nu}{z} : \frac{\mu - \mu_{,}}{z}, \text{ so ist } \frac{m}{n} = \frac{\nu_{,} - \nu}{\mu - \mu_{,}}.$$

Nur diese brauchen wir, denn die Sectionslinie ist blos eine Invertirung pag. 195:

$$\frac{1}{\mu} : \frac{1}{\nu} = \frac{N}{n_{,} - n} : \frac{N}{m - m_{,}} \text{ oder } \frac{\mu}{\nu} = \frac{n_{,} - n}{m - m_{,}}.$$

Kommt nun zu den beiden Flächen $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ und $\frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{\nu_1}$ noch eine dritte $\frac{a}{\mu_2} : \frac{b}{\nu_2}$ hinzu, die in der gleichen Zone m + n liegt, so ist

$$\frac{m}{n} = \frac{\nu_1 - \nu}{\mu - \mu_1} = \frac{\nu_2 - \nu}{\mu - \mu_2} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt

$$m\mu + n\nu = m\mu_1 + n\nu_1$$
$$m\mu + n\nu = m\mu_2 + n\nu_2$$
$$m\mu_{,} + n\nu_{,} = m\mu_2 + n\nu_2,$$

das gibt drei Divisionen, woraus

$$1 = \frac{m\mu_1 + n\nu_1}{m\mu_2 + n\nu_2} = \frac{m\mu + n\nu}{m\mu_1 + n\nu_1} = \frac{m\mu + n\nu}{m\mu_2 + n\nu_2}$$

folgt, was nur unter der Bedingung

$$1 = m\mu + n\nu = m\mu_1 + n\nu_1 = m\mu_2 + n\nu_2$$

möglich ist pag. 199.

Seien jetzt $\mu\nu$ und $\mu_{,}\nu_{,}$ die Coordinaten der Zonenpunkte und $\frac{1}{m} : \frac{1}{n}$ die Axenschnitte, so können wir aus der ersten Bedingungsgleichung

$$1 = m\mu + n\nu \ \ldots \ n = \frac{1 - m\mu}{\nu} \text{ und } m = \frac{1 - n\nu}{\mu} \text{ finden.}$$

Das in die zweite Bedingungsgleichung

$$1 = m\mu_{,} + n\nu_{,} \text{ gesetzt, gibt}$$

$$1 = m\mu_{,} + \frac{1 - m\mu}{\nu}\nu_{,} \text{ und } 1 = \frac{1 - n\nu}{\mu}\mu_{,} + n\nu_{,},$$

$$\nu = m\mu_{,}\nu + \nu_{,} - m\mu\nu_{,} \text{ und } \mu = \mu_{,} - n\mu_{,}\nu + n\mu\nu_{,}, \text{ oder}$$

$$m(\mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu) = \nu_{,} - \nu \text{ und } \mu - \mu_{,} = n(\mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu), \text{ oder}$$

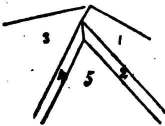
$$m = \frac{\nu_{,} - \nu}{\mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu} \text{ und } n = \frac{\mu - \mu_{,}}{\mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu}, \text{ d. h.}$$

die Sectionslinienformel, wenn man statt der griechischen lateinische Buchstaben und statt der lateinischen griechische schreibt.

Verbindung von Zonenpunkt- und Sectionslinienformel.

Levy (Edinburgh Philos. Journ. 1822 VI. 227) entwickelte diesen Satz allgemein mittelst Coordinaten, freilich ohne Weiß zu kennen und zu erwähnen. Gegeben sind vier Flächen

$$m_1a : n_1b : p_1c, \ m_2a : n_2b : p_2c,$$
$$m_3a : n_3b : p_3c, \ m_4a : n_4b : p_4c,$$



die in einem beliebigen Oktaide liegen müssen; gesucht wird

$$m_5a : n_5b : n_5c,$$

welche in die Zonen 1,2 und 3,4 fällt. Wir bekommen daher die fünf Gleichungen:

$$\frac{x}{m_5a} + \frac{y}{n_5b} + \frac{z}{p_5c} = 1$$

$$\frac{x}{m_1a} + \frac{y}{n_1b} + \frac{z}{p_1c} = 1$$

$$\frac{x}{m_2a} + \frac{y}{n_2b} + \frac{z}{p_2c} = 1 \text{ etc.}$$

Eliminiren wir aus den Flächen 1,2 und 1,5 die z, so bekommen wir die Gleichung der Projection ihrer Durchschnittslinie auf die Axenebene ab

$$\frac{p_1 x}{m_1 a} + \frac{p_1 y}{n_1 b} + \frac{z}{c} = p_1$$

$$\frac{p_2 x}{m_2 a} + \frac{p_2 y}{n_2 b} + \frac{z}{c} = p_2$$

$$\left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_2}{m_2}\right) \frac{x}{a} + \left(\frac{p_1}{n_1} - \frac{p_2}{n_2}\right) \frac{y}{b} = p_1 - p_2 \text{ (Flächen 1,2)},$$

$$\left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_5}{m_5}\right) \frac{x}{a} + \left(\frac{p_1}{n_1} - \frac{p_5}{n_5}\right) \frac{y}{b} = p_1 - p_5 \text{ (Flächen 1,5)}.$$

Da die beiden Zonenlinien 1,2 und 1,5 parallel gehen, so müssen es auch ihre Projectionen, folglich die Coefficienten von x und y beider Gleichungen proportional sein, d. h. auf die Form

$$\frac{m_2 p_1 - m_1 p_2}{m_1 m_2 (p_1 - p_2)} \frac{x}{a} + \frac{n_2 p_1 - n_1 p_2}{n_1 n_2 (p_1 - p_2)} \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{m_5 p_1 - m_1 p_5}{m_1 m_5 (p_1 - p_5)} \frac{x}{a} + \frac{n_5 p_1 - n_1 p_5}{n_1 n_5 (p_1 - p_5)} \frac{y}{b} = 1$$

gebracht, müssen die Kreuzproducte gleich sein, also:

$$\frac{m_2 p_1 - m_1 p_2}{m_1 m_2 (p_1 - p_2)} \cdot \frac{n_5 p_1 - n_1 p_5}{n_1 n_5 (p_1 - p_5)} = \frac{n_2 p_1 - n_1 p_2}{n_1 n_2 (p_1 - p_2)} \cdot \frac{m_5 p_1 - m_1 p_5}{m_1 m_5 (p_1 - p_5)}$$

$$m_5 n_2 (m_2 p_1 - m_1 p_2)(n_5 p_1 - n_1 p_5) = m_2 n_5 (n_2 p_1 - n_1 p_2)(m_5 p_1 - m_1 p_5)$$

$$p_1 p_2 (m_1 n_2 - m_2 n_1) = m_1 m_2 (n_2 p_1 - n_1 p_2) \frac{p_5}{m_5} - n_1 n_2 (m_2 p_1 - m_1 p_2) \frac{p_5}{n_5}.$$

Durch einfache Vertauschung finden wir die Gleichung von 3,4 und 3,5:

$$p_3 p_4 (m_3 n_4 - m_4 n_3) = m_3 m_4 (n_4 p_3 - n_3 p_4) \frac{p_5}{m_5} - n_3 n_4 (m_4 p_3 - m_3 p_4) \frac{p_5}{n_5}.$$

Daraus leitet Levy ab:

$$\frac{p_5}{m_5} = \frac{\left(\frac{1}{m_3 p_4} - \frac{1}{m_4 p_3}\right)\left(\frac{1}{m_2 n_1} - \frac{1}{m_1 n_2}\right) + \left(\frac{1}{m_2 p_1} - \frac{1}{m_1 p_2}\right)\left(\frac{1}{m_4 n_3} - \frac{1}{m_3 n_4}\right)}{\left(\frac{1}{n_1 p_2} - \frac{1}{n_2 p_1}\right)\left(\frac{1}{m_3 p_4} - \frac{1}{m_4 p_3}\right) + \left(\frac{1}{m_2 p_1} - \frac{1}{m_1 p_2}\right)\left(\frac{1}{n_3 p_4} - \frac{1}{n_4 p_3}\right)}.$$

Durch Vertauschung von m mit n und umgekehrt kommt $\frac{p_5}{n_5}$. Der Nenner, d. h. der Werth von p_5, ändert sich dabei nicht. Für $m_1 = n_1$ und $m_2 = n_2$ wird das erste Glied der Formel = 0, und dieselbe geht über in

$$\frac{p_5}{m_5} = \frac{p_5}{n_5} = \frac{\frac{1}{m_4 n_3 - m_3 n_4}}{\left(\frac{1}{n_3 p_4} - \frac{1}{n_4 p_3}\right) + \left(\frac{1}{m_3 p_4} - \frac{1}{m_4 p_3}\right)}.$$

Die Rechnung ist zwar elegant, aber wir gelangen mit unsern Formeln doch leichter zum Ziele. Es wird

$$\frac{a}{\mu_5} = \frac{(\nu_2-\nu_1)\ (\mu_3-\mu_4)\ -(\mu_1-\mu_2)\ (\nu_4-\nu_3)}{(\mu_3-\mu_4)\,(\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1)-(\mu_1-\mu_2)\,(\mu_3\nu_4-\mu_4\nu_3)}\,a$$

$$\frac{b}{\nu_5} = \frac{(\nu_2-\nu_1)\ (\mu_3-\mu_4)\ -(\mu_1-\mu_2)\ (\nu_4-\nu_3)}{(\nu_2-\nu_1)\,(\mu_3\nu_4-\mu_4\nu_3)-(\nu_4-\nu_3)\,(\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1)}\,b$$

für die gegebenen Flächen $\frac{a}{\mu_1}\frac{b}{\nu_1}$, $\frac{a}{\mu_2}\frac{b}{\nu_2}$, $\frac{a}{\mu_3}\frac{b}{\nu_3}$, $\frac{a}{\mu_4}\frac{b}{\nu_4}$.

Denn es werden die beiden Zonenpunkte

$\mu_1\nu_1$ und $\mu_2\nu_2 = (\nu_2-\nu_1)a + (\mu_1-\mu_2)b + (\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1)c = pa + qb + rc$,

$\mu_3\nu_3$ und $\mu_4\nu_4 = (\nu_4-\nu_3)a + (\mu_3-\mu_4)b + (\mu_3\nu_4-\mu_4\nu_3)c = p_1a + q_1b + r_1c$.

Setzen wir also in den gesuchten Sectionslinien

$$\frac{a}{\mu_5} : \frac{b}{\nu_5} = \frac{mn_1 - m_1n}{n_1 - n}\,a : \frac{mn_1 - m_1n}{m - m_1}\,b$$

$$m = \frac{p}{r},\ n = \frac{q}{r};\ m_1 = \frac{p_1}{r_1},\ n_1 = \frac{q_1}{r_1},\ \text{so ist}$$

$$\frac{a}{\mu_5} : \frac{b}{\nu_5} : c = \frac{a}{\frac{q_1}{r_1} - \frac{q}{r}} : \frac{b}{\frac{p}{r} - \frac{p_1}{r_1}} : \frac{c}{\frac{p}{r}\cdot\frac{q_1}{r_1} - \frac{p_1}{r_1}\cdot\frac{q}{r}}$$

$$= \frac{a}{q_1r - qr_1} : \frac{b}{pr_1 - p_1r} : \frac{c}{pq_1 - p_1q},$$

woraus obige Formeln sofort hervorgehen. Allgemein ist:

$$\mu_5 = (\mu_3\pi_4-\mu_4\pi_3)\,(\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1) - (\mu_1\pi_2-\mu_2\pi_1)\,(\mu_3\nu_4-\mu_4\nu_3),$$
$$\nu_5 = (\nu_2\pi_1-\nu_1\pi_2)\,(\mu_3\nu_4-\mu_4\nu_3) - (\nu_4\pi_3-\nu_3\pi_4)\,(\mu_3\nu_4-\mu_4\nu_3),$$
$$\pi_5 = (\nu_2\pi_1-\nu_1\pi_2)\,(\mu_3\pi_4-\mu_4\pi_3) - (\mu_1\pi_2-\mu_2\pi_1)\,(\nu_4\pi_3-\nu_3\pi_4).$$

Es ergibt sich das aus der Symmetrie und lexicographischen Ordnung der Buchstaben, wie wir oben pag. 189 sahen. Die Resultate müssen natürlich immer dieselben sein. Hätte Levy statt mnp die Bruchform $\frac{1}{m}\frac{1}{n}\frac{1}{p}$ gewählt, so durfte er die Brüche nur umkehren und die 1 weglassen. Eine Vergleichung der lateinischen mit unsern griechischen Buchstaben und die gehörige Rücksichtnahme auf die Vorzeichen läßt dann bald die Sache erkennen. Da in den meisten Fällen die Projection unmittelbarer zum Ziele führt, so mögen diese historischen Bemerkungen genügen.

Coordinatenrechnung

ist für den Analytiker bequemer, weil der Gang immer der gleiche ist, und es der Anschauung weniger bedarf. Eine Fläche

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi}\ \text{hat die Gleichung}\ \frac{\mu}{a}x + \frac{\nu}{b}y + \frac{\pi}{c}z = 1,$$

wobei die dreierlei Buchstaben sich lexicographisch entsprechen. Der Be-

weis liegt darin, daß für $z = y = o$, $x = \frac{a}{\mu}$ ꝛc. werden muß. Suchen wir jetzt die Zonenaxe, welche zwei Flächen

$$\frac{\mu}{a}x + \frac{\nu}{b}y + \frac{\pi}{c}z = 1 \text{ und } \frac{\mu_{,}}{a}x + \frac{\nu_{,}}{b}y + \frac{\pi_{,}}{c}z = 1$$

mit einander machen, so können wir die Flächen durch den Nullpunkt legen, denn es kommt ja nur auf die Richtung des Strahles an. Dann lauten die Gleichungen:

$$1)\ \frac{\mu}{a}x + \frac{\nu}{b}y + \frac{\pi}{c}z = 0 = \frac{\mu x}{\pi a} + \frac{\nu y}{\pi b} + \frac{z}{c} = \frac{\mu x}{\nu a} + \frac{y}{b} + \frac{\pi z}{\nu c},$$

$$2)\ \frac{\mu_{,}}{a}x + \frac{\nu_{,}}{b}y + \frac{\pi_{,}}{c}z = 0 = \frac{\mu_{,}x}{\pi_{,}a} + \frac{\nu_{,}y}{\pi_{,}b} + \frac{z}{c} = \frac{\mu_{,}x}{\nu_{,}a} + \frac{y}{b} + \frac{\pi_{,}z}{\nu_{,}c}.$$

Da im Durchschnitte xyz beiden Ebenen gemein sind, so bekommen wir durch Elimination weiter

$$3)\ \left(\frac{\mu}{\pi} - \frac{\mu_{,}}{\pi_{,}}\right)\frac{x}{a} + \left(\frac{\nu}{\pi} - \frac{\nu_{,}}{\pi_{,}}\right)\frac{y}{b} = (\mu\pi_{,} - \mu_{,}\pi)\frac{x}{a} + (\nu\pi_{,} - \nu_{,}\pi)\frac{y}{b} = 0$$

$$4)\ \left(\frac{\mu}{\nu} - \frac{\mu_{,}}{\nu_{,}}\right)\frac{x}{a} + \left(\frac{\nu}{\pi} - \frac{\nu_{,}}{\pi_{,}}\right)\frac{z}{c} = (\mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu)\frac{x}{a} + (\nu_{,}\pi - \nu\pi_{,})\frac{z}{c} = 0.$$

Daraus folgt sogleich

$$\frac{x}{a} = \frac{\nu_{,}\pi - \nu\pi_{,}}{\mu\pi_{,} - \mu_{,}\pi}\frac{y}{b} = \frac{\nu_{,}\pi - \nu\pi_{,}}{\mu_{,}\nu - \mu\nu_{,}}\frac{z}{c}.$$

Da es blos auf das Axenverhältniß ankommt, so setzen wir $\frac{z}{c} = 1$, dann ist

$$x = \frac{\nu_{,}\pi - \nu\pi_{,}}{\mu_{,}\nu - \mu\nu_{,}}a,\ y = \frac{\mu\pi_{,} - \mu_{,}\pi}{\mu_{,}\nu - \mu\nu_{,}}b,$$

d. h. die aus dem Nullpunkte strahlende Zonenaxe hat die Coordinaten:

$$(\nu_{,}\pi - \nu\pi_{,})\,a + (\mu\pi_{,} - \mu_{,}\pi)\,b + (\mu_{,}\nu - \mu\nu_{,})\,c,$$

was sich von unserer obigen Zonenpunktformel pag. 189 nur durch das entgegengesetzte Vorzeichen von c unterscheidet, weil damals die Zonenaxe von c herab und nicht aus dem Nullpunkte heraus strahlte.

Ist uns nun ein solcher Strahl durch die Ordinaten

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{nb} + \frac{z}{pc}$$

gegeben, so wird seine Lage durch die Projection auf zwei Coordinatenebenen mit zwei Gleichungen bestimmt:

$$\frac{x}{ma} = \frac{y}{nb} \text{ und } \frac{x}{ma} = \frac{z}{pc}.$$

Denn rückten wir den Strahl aus dem Mittelpunkt heraus, so wäre $\frac{x}{ma} = \frac{y}{nb} + 1$, und für $y = 0$, $x = ma$, d. h. wir bezeichnen die

Zonenpunkte nicht mit Bruchformen $\frac{a}{m}$, wie die Axenschnitte, sondern mit ganzen Factoren.

Soll nun eine Ebene

$$\frac{\mu}{a}x + \frac{\nu}{b}y + \frac{\pi}{c}z = 0$$

in diesem Strahle liegen, so müssen in beiden xyz identisch sein. Es braucht also blos $y = \frac{nb}{ma}x$ und $z = \frac{pc}{ma}x$ in der Flächengleichung substituirt zu werden, so kommt

$$\frac{\mu}{a}x + \frac{\nu}{b} \cdot \frac{nb}{ma}x + \frac{\pi}{c} \cdot \frac{pc}{ma}x = 0, \text{ woraus die}$$

Bedingungsgleichung pag. 200 $m\mu + n\nu + p\pi = 0$ sofort hervorgeht. Hätten wir einen zweiten Strahl

$$\frac{x}{m,a} = \frac{y}{n,b} \text{ und } \frac{x}{m,a} = \frac{z}{p,c}$$

gegeben, so bekämen wir ganz auf die gleiche Weise eine zweite Bedingungsgleichung

$$m,\mu + n,\nu + p,\pi = 0.$$

Aus beiden Bedingungsgleichungen folgt

$$\frac{m\mu + n\nu}{m,\mu + n,\nu} = \frac{-p\pi}{-p,\pi} \text{ und } \frac{m\mu + p\pi}{m,\mu + p,\pi} = \frac{-n\nu}{-n,\nu}$$

$$p,(m\mu + n\nu) = p\,(m,\mu + n,\nu) \ldots n,(m\mu + p\pi) = n\,(m,\mu + p,\pi)$$

$$\mu\,(mp, - m,p) = \nu\,(n,p - np,) \ldots \mu\,(mn, - m,n) = \pi\,(np, - n,p)$$

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{n,p - np,}{mp, - m,p}, \quad \frac{\mu}{\pi} = \frac{np, - n,p}{mn, - m,n} = \frac{n,p - np,}{m,n - mn,}.$$

$$\mu : \nu : \pi = n,p - np, : mp, - m,p : m,n - mn,.$$

Stimmt wieder bis auf das negative c mit der Sectionslinienformel pag. 196.

Alle diese Formeln gelten allgemein für schiefwinkliche wie rechtwinkliche Coordinaten, weil wir blos Hexaidkanten und keine Winkel zu Hilfe nehmen.

Winkelrechnung.

Wenn die frühern drei Formeln auch für schiefwinkliche, so gelten die folgenden zunächst nur für rechtwinkliche Axen. Es kommen dabei hauptsächlich Cosinus und Tangenten in Anwendung, denn bald gewähren die einen bald die andern Vortheile. Man muß daher mit beiden vertraut sein. Ich beginne mit denen, welche sich am besten an die Entwickelung unserer Zonenpunkte anschließen, das sind die

Cosinusformeln.

1. Seiten

$$\pm \cos = \frac{1 + mm,a^2 + nn,b^2}{\sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2}\ \sqrt{1 + m,^2a^2 + n,^2b^2}}.$$

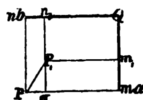
Giltig für zwei Zonenaxen c; ma + nb und c; m,a + n,b.

2. Kanten

$$\mp \cos = \frac{a^2b^2 + \mu\mu,b^2 + \nu\nu,a^2}{\sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}\ \sqrt{a^2b^2 + \mu,^2b^2 + \nu,^2a^2}}.$$

Giltig für zwei Ebenen $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ und $\frac{a}{\mu,} : \frac{b}{\nu,}$.

Beweis. Gegeben Punkt P = ma + nb und P, = m,a + n,b; so ist Linie



$$Pq = nb - n,b = (n - n,)b \text{ und}$$
$$P,q = ma - m,a = (m - m,)a$$
$$PP, = C = \sqrt{(m-m,)^2a^2 + (n-n,)^2b^2}$$
$$= \sqrt{(m^2 + m,^2 - 2mm,)a^2 + (n^2 + n,^2 - 2nn,)b^2}.$$

Jetzt denken wir uns von der senkrecht gegen Axenebene ab (Projectionsebene) stehenden Axe c die Zonenaxe cP = A und cP, = B gezogen, so gilt für den zwischenliegenden Winkel A/B = ω der bekannte Satz

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2A \,.\, B \,.\, \cos\omega, \text{ d. i.}$$
$$(PP,)^2 = (cP)^2 + (cP,)^2 - 2cP \,.\, cP, \,.\, \cos\omega.$$

Setzen wir bei allen unsern Rechnungen ein für allemal die aufrechte Axe c = 1, so ist

$A^2 = (cP)^2 = 1 + m^2a^2 + n^2b^2$ und $B^2 = (cP,)^2 = 1 + m,^2a + n,^2b^2$, folglich $2A \,.\, B \,.\, \cos\omega = (A^2 + B^2 - C^2) = 2 + 2mm,a^2 + 2nn,b^2$, woraus obiger positiver cos. sogleich folgt. Denn es ist

$$\cos \omega = \frac{1 + mm,a^2 + nn,b^2}{AB} \text{ und}$$

$A = \sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2}$ und $B = \sqrt{1 + m,^2a^2 + n,^2b^2}$.
Er gilt für die Winkel auf den Flächen, die ja stets zwischen zwei den Zonenaxen entsprechenden Kanten liegen müssen.

Geben wir nun dieser so eben gefundenen Formel die Form

$$\cos = \left(1 + \frac{a^2}{mm,} + \frac{b^2}{nn,}\right) : \sqrt{1 + \frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2}} \sqrt{1 + \frac{a^2}{m,^2} + \frac{b^2}{n,^2}}$$

(Divisorenformel), so gilt sie für die Zonenpunkte $P = \frac{a}{m} + \frac{b}{n}$ und $P, = \frac{a}{m,} + \frac{b}{n,}$. Wir dürfen dabei die Brüche nur umkehren (invertere), und die lateinischen mit griechischen Buchstaben vertauschen, um sogleich die Kantenformel zu haben. Also

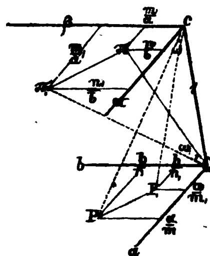
$$\cos = \left(\frac{1}{1} + \frac{mm,}{a^2} + \frac{nn,}{b^2}\right) : \sqrt{\frac{1}{1} + \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \sqrt{\frac{1}{1} + \frac{m,^2}{a^2} + \frac{n,^2}{b^2}}.$$

Wenn wir jetzt die Axen wegmultipliciren, so geht natürlich die lexicographische Ordnung verloren. Man sieht es daher den Formeln sogleich an, was bei der Rechnung als Divisor, und was als Multiplicator fungirt. Auf diese Weise kommt der Winkel zwischen den Perpendikeln, welcher in dem gegebenen Falle scharf ist. Da die eigentliche Kante aber das Supplement zu 180° bildet, so müssen die Vorzeichen auch invertirt werden: wo bei den Seiten +, muß bei den Kanten — stehen, und umgekehrt. Wie aus den Seiten die Kanten, so finden wir umgekehrt aus den Kanten die Seiten, wenn wir die Axen invertiren, also

$$\pm\cos = \left(\frac{1}{a^2b^2} + \frac{\mu\mu,}{bb} + \frac{\nu\nu,}{aa}\right) : \sqrt{\frac{1}{a^2b^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{a^2}} \sqrt{\frac{1}{a^2b^2} + \frac{\mu,^2}{b^2} + \frac{\nu,^2}{a^2}},$$

und nun die griechischen mit lateinischen Buchstaben vertauschen. Denn unsere Kantenformel gilt für die Flächen $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ und $\frac{a}{\mu,} : \frac{b}{\nu,}$, deren Orte in der obern Projectionsebene in $\frac{\mu}{a} + \frac{\nu}{b}$ und $\frac{\mu,}{a} + \frac{\nu,}{b}$ umschlagen.

Die Sache ist außerordentlich elementar, dennoch macht sie dem Anfänger oft Schwierigkeit. Ich verweise daher nochmals auf nebenstehende Figur, worin in der obern Projectionsebene die griechischen Axen und Punkte den lateinischen in der untern correspondiren. Wir haben jetzt die Zonenaxen unten



$$cP = c; \frac{a}{m} + \frac{b}{n} \text{ und } cP, = c; \frac{a}{m,} + \frac{b}{n,}.$$

gesetzt. Fällen wir nun vom untern Centrum Q aus darauf Perpendikel, so fällt ihr Ort nach π

und $\pi_,$. Es ist aber für Axe $c = 1$ in der obern Projectionsebene Punkt

$$\Pi = \frac{m}{a} + \frac{n}{b} \text{ und } \Pi_, = \frac{m_,}{a} + \frac{n_,}{b}.$$

Rechnen wir jetzt mit diesen Größen den $\cos \omega_,$ aus, so haben wir weiter nichts zu thun, als in der Divisorenformel die Brüche $\frac{a}{m}$, $\frac{a}{m_,}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{b}{n_,}$ umzukehren. Der Winkel $\omega_,$ unten zwischen den Perpendikeln gibt uns aber den Supplementwinkel, welche die zu den Punkten π und $\pi_,$ gehörigen Ebenen mit einander machen.

Um die **Reciprocität** der Seiten- und Kantenformeln dem Auge recht klar zu legen, dürfen wir nur

$$a = \frac{1}{\alpha}, \; b = \frac{1}{\beta} \text{ und } \alpha = \frac{1}{a}, \; \beta = \frac{1}{b}$$

setzen, so gehen die Formeln sofort über in:

$$\text{Seiten} \pm \cos = \frac{1 + mm_,a^2 + nn_,b^2}{\sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2}\;\sqrt{1 + m_,^2a^2 + n_,^2b^2}}$$

$$\text{Kanten} \mp \cos = \frac{1 + \mu\mu_,\alpha^2 + \nu\nu_,\beta^2}{\sqrt{1 + \mu^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2}\;\sqrt{1 + \mu_,^2\alpha^2 + \nu_,^2\beta^2}}$$

$$\text{Seiten} \pm \cos = \frac{\alpha^2\beta^2 + mm_,\beta^2 + nn_,\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2\beta^2 + m^2\beta^2 + n^2\alpha^2}\;\sqrt{\alpha^2\beta^2 + m_,^2\beta^2 + n_,^2\alpha^2}}$$

$$\text{Kanten} \mp \cos = \frac{a^2b^2 + \mu\mu_,b^2 + \nu\nu_,a^2}{\sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}\;\sqrt{a^2b^2 + \mu_,^2b^2 + \nu_,^2a^2}}.$$

Wir haben dann für Seiten und Kanten je zwei Formeln, die einander vollständig entsprechen, nur daß die griechischen gegen lateinische Buchstaben vertauscht sind. Um von der Eins Nutzen zu ziehen, wählt man gewöhnlich die Rechnung der Kanten mit griechischen Axen. Habe ich den Logarithmus einer Axe aufgeschlagen, so darf ich ihn nur von Null abziehen, um sofort den Logarithmus der reciproken Axe zu bekommen. Wir können auf diese Weise immer von der einen Axe zur andern mit Leichtigkeit überspringen, was oftmals die Rechnung abkürzt.

Die **allgemeinere** Form ist in manchen Fällen wünschenswerth. Schon die Symmetrie der Seitenformel (1) weist sofort darauf hin, was wir statt 1 zu setzen haben, und aus dieser folgt dann wieder durch Invertirung die Kantenformel (2). Aber auch diese läßt sich selbstständig leicht interpoliren.

$$\text{Seiten} \pm \cos = \frac{mm_,a^2 + nn_,b^2 + pp_,c^2}{\sqrt{m^2a^2 + n^2b^2 + p^2c^2}\;\sqrt{m_,^2a^2 + n_,^2b^2 + p_,^2c^2}}.$$

Giltig für zwei Zonenaxen $ma + nb + pc$ und $m_,a + n_,b + p_,c$.

$$\text{Kanten} \mp \cos = \frac{\pi\pi_,a^2b^2 + \nu\nu_,a^2c^2 + \mu\mu_,b^2c^2}{\sqrt{\pi^2a^2b^2 + \nu^2a^2c^2 + \mu^2b^2c^2}\;\sqrt{\pi_,^2a^2b^2 + \nu_,^2a^2c^2 + \mu_,^2b^2c^2}}.$$

Giltig für zwei Ebenen $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi}$ und $\frac{a}{\mu,} : \frac{b}{\nu,} : \frac{c}{\pi,}$.

Für $\pi = \pi, = c = 1$ müssen diese allgemeinen Ausdrücke wieder in die besondern (1 und 2) übergehen. Zum Beweise dürfen wir die Zonenaxen und Flächen nur auf die Form

$$1 + \frac{nb}{pc} + \frac{ma}{pc} \text{ und } 1 + \frac{n,b}{p,c} + \frac{m,b}{p,c}$$

$$1 + \frac{\pi}{\mu} a : \frac{\pi}{\nu} b \text{ und } 1 : \frac{\pi,}{\mu,} a : \frac{\pi,}{\nu,} b$$

bringen, um sofort durch Substitution die weitläufigern Formeln zu erhalten. Um alle Fälle bereit zu haben, will ich auch noch die Multiplicatoren- mit der Divisorenform vertauschen.

Divisorenform der Seitenwinkel:

$$\pm \cos = \frac{\frac{a^2}{mm,} + \frac{b^2}{nn,} + \frac{c^2}{pp,}}{\sqrt{\frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2} + \frac{c^2}{p^2}} \sqrt{\frac{a^2}{m,^2} + \frac{b^2}{n,^2} + \frac{c^2}{p,^2}}}$$

$$= \frac{nn,pp,a^2 + mm,pp,b^2 + mm,nn,c^2}{\sqrt{n^2p^2a^2 + m^2p,^2b^2 + m^2n^2c^2} \sqrt{n,^2p,^2a^2 + m,^2p,^2b^2 + m,^2n,^2c^2}}.$$

Giltig für zwei Zonenaxen $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p}$ und $\frac{a}{m,} + \frac{b}{n,} + \frac{c}{p,}$.

Geht für $p = p, = c = 1$ in die besondere Form über:

$$\pm \cos = \frac{mm,nn, + mm,b^2 + nn,a^2}{\sqrt{m^2n^2 + m^2b^2 + n^2a^2} \sqrt{m,^2n,^2 + m,^2b^2 + n,^2a^2}},$$

welche jetzt nicht lexicographisch geordnet sind.

Multiplicatorenform der Kantenwinkel:

$$\mp \cos = \frac{\frac{a^2b^2}{\pi\pi,} + \frac{a^2c^2}{\nu\nu,} + \frac{b^2c^2}{\mu\mu,}}{\sqrt{\frac{a^2b^2}{\pi^2} + \frac{a^2c^2}{\nu^2} + \frac{b^2c^2}{\mu^2}} \sqrt{\frac{a^2b^2}{\pi,^2} + \frac{a^2c^2}{\nu,^2} + \frac{b^2c^2}{\mu,^2}}}$$

$$= \frac{\mu\mu,\nu\nu,a^2b^2 + \mu\mu,\pi\pi,^2a^2c^2 + \nu\nu,\pi\pi,b^2c^2}{\sqrt{\mu^2\nu^2a^2b^2 + \mu^2\pi^2a^2c^2 + \nu^2\pi^2b^2c^2} \sqrt{\mu,^2\nu,^2a^2b^2 + \mu,^2\pi,^2a^2c^2 + \nu,^2\pi,^2b^2c^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\mu\mu,a^2} + \frac{1}{\nu\nu,b^2} + \frac{1}{\pi\pi,c^2}}{\sqrt{\frac{1}{\mu^2a^2} + \frac{1}{\nu^2b^2} + \frac{1}{\pi^2c^2}} \sqrt{\frac{1}{\mu,^2a^2} + \frac{1}{\nu,^2b^2} + \frac{1}{\pi,^2c^2}}}.$$

Giltig für zwei Ebenen $\mu a : \nu b : \pi c$ und $\mu,a : \nu,b : \pi,c$.

Geht für $p = p, = c = 1$ in die besondere Form über:

$$\mp \cos = \frac{\mu\mu,\nu\nu,a^2b^2 + \mu\mu,a^2 + \nu\nu,b^2}{\sqrt{\mu^2\nu^2a^2b^2 + \mu^2a^2 + \nu^2b^2} \sqrt{\mu,^2\nu,^2a^2b^2 + \mu,^2a^2 + \nu,^2b^2}},$$

welche jetzt lexicographisch geordnet ist.

Besondere Fälle sind mehrere denkbar, z. B. wenn in der **Seitenformel** $m = n$ und $m, = n$, wird, man also Kantenzonen vor sich hat. Aber wesentliche Abkürzungen entstehen dadurch nicht. Fällt ein Punkt $m, + n$, in den Mittelpunkt, so ist $m, = n, = 0$, und es wird

$$\cos = 1 : \sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2},$$

was man unmittelbar aus der Projectionsfigur ablesen kann, denn die Zonenaxe muß in diesem Falle der Radius werden für den $\cos = c = 1$.

Liegen die Flächen der **Kantenformel** in einer Zone, so entsteht auch keine wesentliche Erleichterung, nur wenn eine z. B. $\frac{a}{\mu,} : \frac{b}{\nu,}$ durch den Mittelpunkt geht, so wird sie $\pm \frac{0 \,.\, a}{\mu,} : \mp \frac{0 \,.\, b}{\nu,}$. Wir haben also $\mu, = \pm \frac{\mu,}{0} = \pm \infty\mu,$ und $\nu, = \mp \frac{\nu,}{0} = \mp \infty\nu,$ zu setzen, und es kommt der abgekürzte

$$\mp \cos = \frac{a^2b^2 \pm \frac{\mu\mu,}{0} b^2 \mp \frac{\nu\nu,}{0} a^2}{\sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}\sqrt{a^2b^2 + \frac{\mu,^2b^2}{0^2} + \frac{\nu,^2a^2}{0^2}}}$$

$$= \frac{\mu\mu,b^2 - \nu\nu,a^2}{\sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}\ \sqrt{\mu,^2b^2 + \nu,^2a^2}},$$

d. h. die Neigung einer Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ gegen eine beliebige Säulenfläche $\frac{a}{\mu,} : \frac{b}{\nu,} : \infty c$.

Wenn nun weiter $\nu, = \mu,$ wird, so daß wir eine Kantenzone haben, so kommt

$$\mp \cos = (\mu\mu,b^2 - \mu,\nu a^2) : \sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}\ \sqrt{\mu,^2b^2 + \mu,^2a^2}$$
$$= (\mu b^2 \quad - \nu a^2) \quad : \sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}\ \sqrt{a^2 + b^2},$$

weil sich $\mu,$ dann ganz wegdividirt: es ist die Neigung einer Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ gegen die Säule $a : b : \infty c$.

Für $\nu, = 0$, geht die Sectionslinie $\frac{a}{\mu,} : \frac{b}{\nu,}$ der Axe b parallel, und wir erhalten sofort den kürzern Ausdruck

$$\mp \cos = a^2b^2 + \mu\mu,b^2 : \sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}\ \sqrt{a^2b^2 + \mu,^2b^2}.$$

Wird nun weiter noch $\frac{1}{\mu,} = 0$ oder $\mu, = \infty$, so fällt die Linie $\frac{a}{\mu,} : \frac{b}{\nu,}$ mit der Axe b zusammen, und wir erhalten

$$\mp \cos = a^2b^2 + \infty\mu b^2 : \sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}\ \sqrt{a^2b^2 + \infty^2b^2}$$
$$= \mu b : \sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}.$$

Aus gleichem Grunde wird für $\mu_, = 0$ und $\nu_, = \infty$ auf der Vorderseite in a

$$\mp \cos = \nu a : \sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2},$$

weil jetzt die Sectionslinie $\frac{a}{\mu_,} : \frac{b}{\nu_,}$ mit Axe a zusammenfällt. So oft die Säulenflächen und Axenebenen die gesuchten Winkel halbiren, bedient man sich mit Vortheil solch abgekürzter Formeln.

Gehen endlich beide Flächen durch den Mittelpunkt, so müßte nach pag. 191

$$\mu_, = \pm \infty\mu_,,\ \nu_, = \mp \infty\nu_,;\ \mu = \pm \infty\mu,\ \nu = \mp \infty\nu$$

gesetzt werden, wir erhielten

$$\mp \cos = \frac{a^2b^2 + \infty\mu\mu_,b^2 + \infty\nu\nu_,a^2}{\sqrt{a^2b^2 + \infty^2\mu^2b^2 + \infty^2\nu^2a^2}\ \sqrt{a^2b^2 + \infty^2\mu_,^2b^2 + \infty^2\nu_,^2a^2}}$$

$$= \frac{\mu\mu_,b^2 + \nu\nu_,a^2}{\sqrt{\mu^2b^2 + \nu^2a^2}\ \sqrt{\mu_,^2b^2 + \nu_,^2a^2}}$$

$$= \frac{mm_,a^2 + nn_,b^2}{\sqrt{m^2a^2 + n^2b^2}\ \sqrt{m_,^2a^2 + n_,^2b^2}},$$

weil wir in diesem Falle die Zonenpunkte für die Sectionslinien substituiren können.

Tangentenformeln der ganzen Winkel.

Es ist zuweilen wünschenswerth, die tg oder ctg des ganzen Winkels zu haben. Da nun

$$tg^2 = \frac{1 - \cos^2}{\cos^2} \text{ oder } ctg^2 = \frac{\cos^2}{1 - \cos^2}$$

ist, so können wir aus den Cosinusformeln dieselben leicht entwickeln. Es kommt dann für die

3. Seiten

$$\pm ctg = \frac{1 + mm_,a^2 + nn_,b^2}{\sqrt{(m - m_,)^2a^2 + (n_, - n)^2b^2 + (mn_, - m_,n)^2a^2b^2}}.$$

Giltig für zwei Zonenaxen c; ma + nb und c; m,a + n,b.

4. Kanten

$$\mp ctg = \frac{a^2b^2 + \mu\mu_,b^2 + \nu\nu_,a^2}{ab\sqrt{(\nu_, - \nu)^2a^2 + (\mu - \mu_,)^2b^2 + (\mu\nu_, - \mu_,\nu)^2}}.$$

Giltig für zwei Ebenen $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ und $\frac{a}{\mu_,} : \frac{b}{\nu_,}$.

Der Zähler stimmt mit den Cosinusformeln noch überein, während im Nenner unter dem Wurzelzeichen die drei Glieder der Zonenpunkt=

formel pag. 188 im Quadrat stehen, was natürlich äußerst bequem für das Gedächtniß wird.

Beweis. Für die **Seiten** setzen wir in der Cosinusformel (1) pag. 206

$$1 + mm,a^2 + nn,b^2 = Z$$
$$\sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2}\,\sqrt{1 + m,^2a^2 + n,^2b^2} = N,$$

d. h. $\cos = \frac{Z}{N}$, so ist

$$tg^2 = \left(1 - \frac{Z^2}{N^2}\right) : \frac{Z^2}{N^2} = \frac{N^2 - Z^2}{Z^2}.$$

Nun ist

$$N^2 = 1 + m^2m,^2a^4 + n^2n,^2b^4 + m^2a^2 + m,^2a^2 + n^2b^2 + n,^2b^2 + m^2n,^2a^2b^2 + m,^2n^2a^2b^2$$
$$-Z^2 = -1 - m^2m,^2a^4 - n^2n,^2b^4 - 2mm,a^2 - 2nn,b^2 - 2mm,nn,a^2b^2$$
$$N^2 - Z^2 = (m - m,)^2a^2 + (n, - n)^2b^2 + (mn, - m,n)^2a^2b^2,$$

woraus der Seitenwinkel sofort folgt. Die

Kantenformel geht daraus wieder durch einfache Invertirung hervor, nemlich

$$\mp ctg = \left(\frac{1}{1} + \frac{mm,}{a^2} + \frac{nn,}{b^2}\right) : \sqrt{\frac{(m-m,)^2}{a^2} + \frac{(n,-n)^2}{b^2} + \frac{(mn,-m,n)^2}{a^2b^2}},$$

wobei wir blos die lateinischen Buchstaben mit griechischen zu vertauschen haben. Oder noch einfacher können wir auch hier

Kanten

$$\mp ctg = \frac{1 + \mu\mu,\alpha^2 + \nu\nu,\beta^2}{\sqrt{(\mu - \mu,)^2\alpha^2 + (\nu, - \nu)^2\beta^2 + (\mu\nu, - \mu,\nu)^2\alpha^2\beta^2}}$$

gleich hinschreiben ꝛc.

Damit ist uns nun schon auch der Weg für die allgemeinern Formeln angedeutet. Wir haben für die Wurzel blos die allgemeine Zonenpunktformel zu Hilfe zu nehmen, und schreiben sofort hin:

Seiten

$$\pm ctg = \frac{mm,a^2 + nn,b^2 + pp,c^2}{\sqrt{(mp, - m,p)^2a^2c^2 + (n,p - np,)^2b^2c^2 + (mn, - m,n)^2a^2b^2}}$$

giltig für zwei Zonenaxen cp; ma + nb und cp,; m,a + n,b.

Kanten

$$\mp ctg = \frac{\pi\pi,a^2b^2 + \nu\nu,a^2c^2 + \mu\mu,b^2c^2}{abc\sqrt{(\nu,\pi - \nu\pi,)^2a^2 + (\mu\pi, - \mu,\pi)^2b^2 + (\mu\nu, - \mu,\nu)^2c^2}}$$

$$= \frac{\frac{\pi\pi,}{c^2} + \frac{\nu\nu,}{b^2} + \frac{\mu\mu,}{a^2}}{\frac{1}{abc}\sqrt{(\nu,\pi - \nu\pi,)^2a^2 + (\mu\pi, - \mu,\pi)^2b^2 + (\mu\nu, - \mu,\nu)^2c^2}}$$

giltig für zwei Ebenen $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi}$ und $\frac{a}{\mu,} : \frac{b}{\nu,} : \frac{c}{\pi,}$.

Der Beweis ist immer wieder der, daß man Zonenaxen und Ebenen auf die Formen

$$c;\ \frac{m}{p}a + \frac{n}{p}b,\ c;\ \frac{m_{,}}{p_{,}}a + \frac{n_{,}}{p_{,}}b \text{ und } c : \frac{\pi b}{\nu} : \frac{\pi a}{\mu},\quad c : \frac{\pi_{,} b}{\nu_{,}} : \frac{\pi_{,} a}{\mu_{,}}$$

zurückführt, und die neuen Werthe $\frac{m}{p}, \frac{n}{p}, \frac{m_{,}}{p_{,}}, \frac{n_{,}}{p_{,}}$ und $\frac{\mu}{\pi}, \frac{\nu}{\pi}, \frac{\mu_{,}}{\pi_{,}}, \frac{\nu_{,}}{\pi_{,}}$ respective für die einfachern Buchstaben $m n m_{,} n_{,}$ und $\mu \nu \mu_{,} \nu_{,}$ in (3) und (4) substituirt. Natürlich stehen beide ebenfalls gegenseitig in einem Invertirungsverhältniß. Wir könnten daher gleich

Kanten

$$\mp \operatorname{ctg} = \frac{\mu\mu_{,}\alpha^2 + \nu\nu_{,}\beta^2 + \pi\pi_{,}\gamma^2}{\sqrt{(\mu\pi_{,} - \mu_{,}\pi)^2\alpha^2\gamma^2 + (\nu_{,}\pi - \nu\pi_{,})^2\beta^2\gamma^2 + (\mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu)^2\alpha^2\beta^2}}$$

hinschreiben ꝛc.

Tangentenformeln der halben Winkel.

Weiß und nach ihm Neumann suchten immer den Winkel, welchen eine beliebige Ebene $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ mit einer Mittelpunktsebene

$$\pm \frac{0a}{\mu_{,}} : \mp \frac{0b}{\nu_{,}} = \frac{\pm a}{\infty\mu_{,}} : \frac{\mp b}{\infty\nu_{,}}$$

macht, weil dieselbe sich wesentlich vereinfacht, und so oft sie den gesuchten Winkel halbirt, gleich zum Resultat führt. Wir dürfen also in Formel (4) pag. 211 nur $\mu_{,} = \pm\infty\mu_{,}$ und $\nu_{,} = \mp\infty\nu_{,}$ setzen, und erlangen sofort:

$$\operatorname{ctg} = \frac{a^2b^2 + \infty\mu\mu_{,}b^2 - \infty\nu\nu_{,}a^2}{ab\sqrt{\infty^2\nu_{,}^2a^2 + \infty^2\mu_{,}^2b^2 + (-\infty\mu\nu_{,} - \infty\mu_{,}\nu)^2}}$$

$$= \frac{\mu\mu_{,}b^2 - \nu\nu_{,}a^2}{ab\sqrt{\nu_{,}^2a^2 + \mu_{,}^2b^2 + (\mu\nu_{,} + \mu_{,}\nu)^2}}.$$

Diese Formel ist vom Zonenpunkte ma + nb unabhängig. Wir können nun denselben einführen, wenn wir $\frac{1}{\mu_{,}} = m$ und $\frac{1}{\nu_{,}} = n$ setzen, dann wird

$$\operatorname{ctg} = \left(\frac{\mu b^2}{m} - \frac{\nu a^2}{n}\right) : ab\sqrt{\frac{a^2}{n^2} + \frac{b^2}{m^2} + \left(\frac{\mu}{n} + \frac{\nu}{m}\right)^2}$$

$$= (n\mu b^2 - m\nu a^2) : ab\sqrt{m^2a^2 + n^2b^2 + (m\mu + n\nu)^2}.$$

Nach der Controlformel pag. 199 ist aber $m\mu + n\nu = 1$, folglich haben wir

5. Kante $\operatorname{tg} = ab\sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2} : (n\mu b^2 - m\nu a^2)$.

Giltig für einen Zonenpunkt ma + nb und eine Sectionslinie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$.

6. Seite $\operatorname{ctg} = \sqrt{a^2b^2 + \nu^2a^2 + \mu^2b^2} : (m\nu a^2 - n\mu b^2)$,

ebenfalls giltig für ma + nb und $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$. Formel 5 ist mit 6 nicht ganz adäquat. Setzen wir aber für ab die reciproken Axen $\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}$, so kommt

$$ctg = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2\beta^2} + \frac{\nu^2}{\alpha^2} + \frac{\mu^2}{\beta^2}} : \left(\frac{m\nu}{\alpha^2} - \frac{n\mu}{\beta^2}\right)$$
$$= \alpha\beta \sqrt{1 + \mu^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2} : \nu m\beta^2 - \mu n\alpha^2,$$

welche sich zu (5) vollständig reciprok verhält, indem die Axen und Coefficienten blos aus griechisch lateinisch und umgekehrt geworden sind. Die Formel ist in diesem Falle giltig für Zonenpunkt $\frac{m}{\alpha}+\frac{n}{\beta}$ und $\frac{1}{\mu\alpha} : \frac{1}{\nu\beta}$, also haben m + n und $\frac{1}{\mu} : \frac{1}{\nu}$ keine Veränderung erlitten.

Um das bequem zu beweisen, verwandeln wir (5) in die vollständige Divisorenformel, dadurch daß wir $m = \frac{1}{m}$ und $n = \frac{1}{n}$ setzen, es kommt dann

$$7)\ tg = ab\sqrt{m^2n^2 + n^2a^2 + m^2b^2} : (m\mu b^2 - n\nu a^2)$$

giltig für $\frac{a}{m} + \frac{b}{n}$ und $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$.

Durch Division mit $mn\mu\nu$ bringen wir diese auf die ursprüngliche Bruchform,

$$tg = \frac{a}{\mu} \cdot \frac{b}{\nu} \sqrt{1 + \frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2}} : \left(\frac{b}{n} \cdot \frac{b}{\nu} - \frac{a}{m} \cdot \frac{a}{\mu}\right)$$

und kehren die einzelnen Glieder dann um, so kommt

$$\frac{1}{tg} = \frac{\mu}{a}\,\frac{\nu}{b} \sqrt{1 + \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} : \left(\frac{n\nu}{b^2} - \frac{m\mu}{a^2}\right)$$

$$ctg = \sqrt{a^2b^2 + m^2b^2 + n^2a^2} : \left(\frac{na^2}{\mu} - \frac{mb^2}{\nu}\right),$$

$$8)\ ctg = mn \sqrt{a^2b^2 + \nu^2a^2 + \mu^2b^2} : n\nu a^2 - m\mu b^2,$$

worin wir blos die lateinischen Buchstaben mit griechischen und die griechischen mit lateinischen vertauscht haben. Für $\frac{1}{m} = m$ und $\frac{1}{n} = n$ geht es wieder in (6) über.

Bei Invertirung der Cosinusformeln, wo es sich um Supplemente (Ergänzungen zu 180°) handelte, genügte das entgegengesetzte Vorzeichen $\mp$ und $\pm$. Jetzt bei der Neigung der Ebenen zu den Mittelpunktsflächen, wo der Winkel kleiner als 90°, handelt es sich um Complemente (Ergänzungen zu 90°). Da nun

$$tg\ (45^0 - a) = ctg\ (45^0 + a)$$

ist, so muß statt $\frac{\cos}{\sin} = \text{ctg} = \frac{1}{\text{tg}}$ auch umgekehrt $\frac{\sin}{\cos} = \text{tg} = \frac{1}{\text{ctg}}$ gesetzt werden.

Setzen wir $\mu = \frac{1}{\mu}$ und $\nu = \frac{1}{\nu}$, so gehen die Formeln über in:

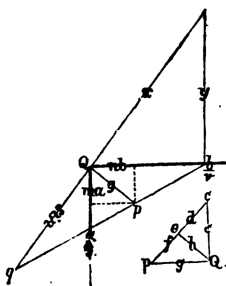
$$9)\ \text{tg} = \mu\nu ab\sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2} : n\nu b^2 - m\mu a^2$$

$$10)\ \text{ctg} = \sqrt{\mu^2\nu^2a^2b^2 + \mu^2a^2 + \nu^2b^2} : m\mu a^2 - n\nu b^2.$$

Giltig für $\mu a + \nu b$ und $ma + nb$.

Dieß sind die einfachsten Formeln, womit ich am liebsten rechne, zumal da sie an der Hand der Projection am besten die Anschauung leiten. Poggendorffs Annal. 1835 Bd. 34 pag. 517 habe ich sie schon in einer Weise entwickelt, die ich hier kurz wiederholen will:

Für die **Kanten** ist gegeben die Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$; wir nehmen darin irgend einen beliebigen Punkt $p = ma + nb$ an, verbinden denselben mit dem Mittelpunkte Q durch die Linie g, und suchen nun den Winkel, welchen die Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ mit der Mittelpunktsebene cpQ macht. Es ist leicht einzusehen, daß das Perpendikel $Qe = h$, vom Mittelpunkte Q auf die gegenüberliegende Hypotenuse cp gefällt, den cos liefert, wie der nebenstehende Aufriß zeigt, worin die drei Dreiecke cpQ, ceQ, epQ (das Ganze und die beiden Theile) einander ähnlich sind (Vierzonenkörperrechnung pag. 90). Daher



$$h : c = g : d + f,\ h = \frac{c \cdot g}{\sqrt{c^2 + g^2}},\ \text{oder für } c = 1$$

$$\cos = g : \sqrt{1 + g^2}.$$

Der sin muß senkrecht auf cos sowie auf der ganzen Mittelpunktsebene stehen. Wir dürfen daher nur Qq senkrecht gegen $Qp = g$ ziehen, und über Q hinaus verlängern, bis sie die Hilfslinie y ⧣ a schneidet, so gibt der Durchschnitt der Linie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ in q uns die Länge des gesuchten $\sin = Qq$. Die drei Gleichungen

$$\sin : \sin + x = \frac{a}{\mu} : y;\ y : \frac{b}{\nu} = nb : ma;\ x : \frac{b}{\nu} = g : ma$$

genügen zur Bestimmung. Darnach ist

$$\sin : \frac{a}{\mu} = x : y - \frac{a}{\mu} = x : \frac{\mu y - a}{\mu},\ \sin = \frac{ax}{\mu y - a}.$$

$$y = \frac{nb^2}{m\nu a}, \qquad x = \frac{bg}{m\nu a},$$

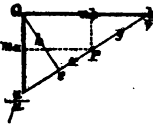
$$\mu y - a = \frac{\mu nb^2 - m\nu a^2}{m\nu a}, \qquad ax = \frac{bg}{m\nu},\ \text{folglich}$$

$$\sin : \cos = \frac{abg}{\mu nb^2 - m\nu a^2} : \frac{g}{\sqrt{1 + g^2}} = \frac{ab\sqrt{1 + g^2}}{\mu nb^2 - m\nu a^2}$$

$$tg = ab\sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2} : (n\mu b^2 - m\nu a^2)\ (5).$$

Für die **Seiten** (ebenen Winkel) ist wieder die Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ gegeben; ziehe darauf das Perpendikel Qe = h, so ist

$$h = \frac{a}{\mu} \cdot \frac{b}{\nu} : \sqrt{\frac{a^2}{\mu^2} + \frac{b^2}{\nu^2}} = \frac{ab}{\sqrt{\nu^2a^2 + \mu^2b^2}} \text{ und } ce = \cos = \sqrt{1 + h^2}.$$



Der cos gilt für die Punkte aller Zonenaxen, während die sin vom Fußpunkte e aus bis zum Fußpunkte der Zonenaxen reichen, deren Neigung ich suche. Häufig darf man die Sache auf den Sectionslinien nur ablesen, doch gelingt das nicht immer, und namentlich dann nicht, wenn uns das Perpendikel Qe = h nicht durch die Deduction eingesetzt ist. Ist nun in der Sectionslinie irgend ein Punkt P = ma + nb gegeben, dessen zugehörigen Zonenaxenwinkel Pce ich finden will, so ist

$$(Pe)^2 = \sin^2 = m^2a^2 + n^2b^2 - h^2$$
$$= \frac{m^2\nu^2a^4 + n^2\mu^2b^4 + m^2\mu^2a^2b^2 + n^2\nu^2a^2b^2 - a^2b^2}{\nu^2a^2 + \mu^2b^2}$$

$$\cos^2 = 1 + h^2 = \frac{a^2b^2 + \nu^2a^2 + \mu^2b^2}{\nu^2a^2 + \mu^2b^2}, \text{ folglich}$$

$$\frac{\sin^2}{\cos^2} = tg^2 = \frac{m^2\nu^2a^4 + n^2\mu^2b^4 + (m^2\mu^2 + n^2\nu^2 - 1)a^2b^2}{a^2b^2 + \nu^2a^2 + \mu^2b^2}.$$

Nach der Controlformel pag. 199 ist

$$1 = (m\mu + n\nu)^2 = m^2\mu^2 + n^2\nu^2 + 2m\mu n\nu$$
$$-2m\mu n\nu = m^2\mu^2 + n^2\nu^2 - 1, \text{ daher}$$

$$tg^2 = \frac{m^2\nu^2a^4 + n^2\mu^2b^4 - 2m\mu n\nu a^2b^2}{a^2b^2 + \nu^2a^2 + \mu^2b^2} = \frac{(m\nu a^2 - n\mu b^2)^2}{a^2b^2 + \nu^2a^2 + \mu^2b^2}$$

Seite $ctg = \sqrt{a^2b^2 + \nu^2a^2 + \mu^2b^2} : (m\nu a^2 - n\mu b^2) \ldots (6).$

Wir haben jetzt den Vortheil, daß wir uns um das Perpendikel nicht mehr zu kümmern brauchen, obgleich wir immer nur den Winkel finden, welchen die Zonenaxe mit der Cosinuslinie bildet.

Hätten wir ganz allgemein eine Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi}$, und setzten die Länge der Sinuslinie $= l = \sqrt{\frac{a^2}{\mu^2} + \frac{b^2}{\nu^2}}$, so wäre

$$\cos = \sqrt{\frac{c^2}{\pi^2} + h^2} = \frac{abc}{\mu\nu\pi}\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2}} : l, \text{ oder}$$

$$\cos : \sin = \frac{abc}{\mu\nu\pi}\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2} : \frac{a^2}{\mu^2} + \frac{b^2}{\nu^2}}.$$

Die sin sind also unabhängig von π. Neumann nannte das das Grundverhältniß der Cosinus- zur Sinuslinie. Wollen wir damit rechnen, so müssen wir (fig. pag. 216) das Stück x suchen zwischen dem Fußpunkte P der Zonenaxe und dem Fußpunkte e des cos. Nun findet sich

$$x = \sin = \left(\frac{nb^2}{\nu} - \frac{ma^2}{\mu}\right) : l^2, \; l^2 = \frac{a^2}{\mu^2} + \frac{b^2}{\nu^2}, \text{ daher}$$

$$\cos : \sin = \frac{abc}{\mu\nu\pi} \sqrt{\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2}} : \frac{nb^2}{\nu} - \frac{ma^2}{\mu} \text{ (Seite);}$$

$$\sin : \cos = \frac{\mu\nu\pi}{abc} \sqrt{\frac{a^2}{\mu^2} + \frac{b^2}{\nu^2} + \frac{c^2}{\pi^2}} : \frac{\nu}{nb^2} - \frac{\mu}{ma^2} \text{ (Kante).}$$

Setzen wir darin $\pi = c = 1$, und schaffen die Divisoren weg, so kommt für ctg Formel (6); für tg müssen wir, wie immer, nur die griechischen und lateinischen Buchstaben vertauschen, sodann $\frac{1}{m} = m$, $\frac{1}{n} = n$, und $\frac{1}{\mu} = \mu$, $\frac{1}{\nu} = \nu$ setzen, um Formel (5) zu bekommen. Blos die Vorzeichen $\pm$ der Nenner sind umgekehrt, was jedoch auf die Winkel keinen Einfluß hat, und daher rührt, daß wir ursprünglich die tg berechneten, und zur ctg durch Invertirung gelangten; jetzt dagegen umgekehrt die ctg direct ermittelt wurde, und die tg durch Invertirung.

Schröder in Clausthal unterscheidet in seiner lehrreichen Schrift (Elemente der rechnenden Krystallographie 1852 pag. 27) für die Schnittformeln fünf Fälle:

a) Zwei „Polflächen" $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ und $\frac{a}{\mu_,} : \frac{b}{\nu_,} : c$ schneiden sich. Das gibt den allgemeinsten Fall, wo die Formeln

$$\cos = \frac{\mu\mu_, b^2 + \nu\nu_, a^2 + a^2b^2}{\sqrt{\nu^2a^2 + \mu^2b^2 + a^2b^2}\,\sqrt{\nu_,^2a^2 + \mu_,^2b^2 + a^2b^2}} \text{ (2) pag. 208 und}$$

$$\text{ctg} = \frac{\mu\mu_, b^2 + \nu\nu_, a^2 + a^2b^2}{ab\,\sqrt{(\nu_, - \nu)^2a^2 + (\mu - \mu_,)^2b^2 + (\mu\nu_, - \mu_,\nu)^2}} \text{ (4) pag. 211}$$

Anwendung finden.

b) Eine Polfläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ und eine Säulenfläche (Mittelpunktsebene) $\frac{a}{\mu_,} : \frac{b'}{\nu_,} : \infty c$ schneiden sich. Dann kommen die besondern Formeln

$$\cos = \frac{\mu\mu_, b^2 - \nu\nu_, a^2}{\sqrt{\nu^2a^2 + \mu^2b^2 + a^2b^2}\,\sqrt{\nu_,^2a^2 + \mu_,^2b^2}} \text{ pag. 210 und}$$

$$\text{ctg} = \frac{\mu\mu_, b^2 - \nu\nu_, a^2}{ab\,\sqrt{\nu_,^2a^2 + \mu_,^2b^2 + (\mu\nu_, + \mu_,\nu)^2}} \text{ pag. 213}$$

zur Anwendung. Denn wir dürfen in (2) nur $\mu_, = \mu_,\infty$ und $\nu_, = -\nu_,\infty$ setzen. Da nun durch $\mu\nu_, + \mu_,\nu$ dividirt

$$\text{ctg} = \left(\frac{\mu\mu_{,}b^2}{\mu\nu_{,}+\mu_{,}\nu} - \frac{\nu\nu_{,}a^2}{\mu\nu_{,}+\mu_{,}\nu}\right) : ab\sqrt{\frac{\nu_{,}^2a^2}{\mu\nu_{,}+\mu_{,}\nu} + \frac{\mu_{,}^2b^2}{\mu\nu_{,}+\mu_{,}\nu} + 1}$$

wird, und nach der Zonenpunktformel der Schnitt mit der Mittelpunktsebene pag. 191

$$P = ma + nb = \frac{\nu_{,}a}{\mu\nu_{,} + \mu_{,}\nu} + \frac{\mu_{,}b}{\mu\nu_{,} + \mu_{,}\nu}$$

ist, so kann man die Coordinaten der Zonenpunkte m und n einführen, und die Formel erhält sofort unsere gewöhnliche Form

$$\text{tg} = ab\sqrt{m^2a^2 + n^2b^2 + 1} : (n\mu b^2 - m\nu a^2) \ldots (5) \text{ pag. } 213$$

giltig für $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ und $ma + nb$.

c) Eine Polfläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ mit der Projectionsebene $c : \infty a : \infty b$ gibt nach pag. 90

$$\text{ctg} = ab : \sqrt{\nu^2a^2 + \mu^2b^2}.$$

Sie ist zugleich das Complement der Polflächenneigung gegen Axe c, also

$$\text{tg} = ab : \sqrt{\nu^2a^2 + \mu^2b^2}.$$

d) Zwei Säulenflächen $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \infty c$ und $\frac{a}{\mu_{,}} : \frac{b}{\nu_{,}} : \infty c$ geben

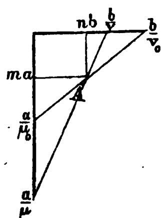
$$\cos = (\mu\mu_{,}b^2 + \nu\nu_{,}a^2) : \sqrt{\nu^2a^2 + \mu^2b^2}\,\sqrt{\nu_{,}^2a^2 + \mu_{,}^2b^2}.$$

e) Die Säulenflächen gegen die Projectionsebene stehen bei rechtwinklichen Axen senkrecht.

Berechnung der Indices für unableitbare Flächen.

Läßt sich eine Fläche nicht deduciren, so muß ich entweder eine Zone und einen Winkel, oder bei keiner Zone zwei Winkel ermitteln (Beiträge zur rechnenden Krystallographie 1848 pag. 29).

1) Ein Zonenpunkt $ma + nb$ und ein Winkel A, zwischen der bekannten Fläche $c : \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ und der gesuchten $c : \frac{a}{\mu_0} : \frac{b}{\nu_0}$ ist gemessen, die Indices $\mu_0\nu_0$ zu finden.



Die gesuchte Fläche muß die Bedingungsgleichung

$$m\mu_0 + n\nu_0 = 1 \text{ oder } \nu_0 = \frac{1 - m\mu_0}{n}$$

erfüllen. Damit können wir aus der Tangentenformel (5) ν, eliminiren, nemlich:

$$\text{tg} = ab\sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2} : \left[n\mu_0 b^2 - m\left(\frac{1 - m\mu_0}{n}\right)a^2\right]$$

$$\text{tg} = nab\sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2} : (n^2\mu_0 b^2 + m^2\mu_0 a^2 - ma^2)$$

$$\mu_0(m^2a^2 + n^2b^2)\,\text{tg} - ma^2\,\text{tg} = nab\sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2}$$

$$\mu_0 = \frac{ma^2 \, tg + nab \sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2}}{(m^2a^2 + n^2b^2) \, tg}, \text{ folglich}$$

$$\nu_0 = \frac{nb^2 \, tg - mab \sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2}}{(m^2a^2 + n^2b^2) \, tg}.$$

tg bedeutet die Tangente des Winkels, welchen die gesuchte Fläche $c : \frac{a}{\mu_0} : \frac{b}{\nu_0}$ mit der Säulenfläche $ma : nb' : \infty c$ macht. Sie folgt unmittelbar aus der Messung des Winkels.

Für die **Kantenzonen** $ma + mb$ ist blos $m = n$ zu setzen, und wir erhalten sofort nach der Division mit m die einfachern Gleichungen

$$\mu_0 = \frac{a^2 \, tg + ab \sqrt{1 + m^2(a^2 + b^2)}}{m(a^2 + b^2) \, tg},$$

$$\nu_0 = \frac{b^2 \, tg + ab \sqrt{1 + m^2(a^2 + b^2)}}{m(a^2 + b^2) \, tg}.$$

Für die **Axenpunkte**

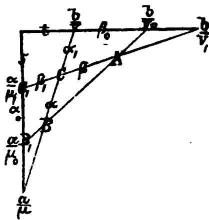
in a ist $n = 0$, folglich $\mu_0 = \frac{1}{m}$ und $\nu_0 = \frac{b \sqrt{1 + m^2a^2}}{ma \, tg}$,

in b ist $m = 0$, folglich $\nu_0 = \frac{1}{n}$ und $\mu_0 = \frac{a \sqrt{1 + n^2b^2}}{nb \, tg}$.

Mit den Cosinusformeln läßt sich die Sache viel umständlicher durchführen, weil man hier wegen der Unbekannten unter dem Wurzelzeichen zu Gleichungen zweiten Grades kommt.

2) Keine Zone bekannt und zwei Winkel α und β gemessen. Hier suchen wir unsern Zweck mit Triangulation zu erreichen, zu deren Einsicht die Projection sehr nützlich ist.

Allgemeinster Fall: Die Winkel AB, welche die gesuchte Fläche $\frac{a}{\mu_0} : \frac{b}{\nu_0}$ mit $\frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{\nu_1}$ (A) und $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ (B) macht, sind gemessen, man soll die Axenschnitte μ_0 und ν_0 finden. Da Winkel C zwischen $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ und $\frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{\nu_1}$ bekannt ist, so haben wir nach pag. 85 im körperlichen Dreiecke ABC die Seiten α und β nur hinzusetzen:



$$\cos \alpha = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \, . \sin C},$$

$$\cos \beta = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}.$$

Die Seite α, zwischen den bekannten Zonenpunkten $C = ma + nb$ und

$\frac{b}{\nu}$, und Seite β, zwischen C und $\frac{a}{\mu,}$ ergeben sich aus der Cosinusformel pag. 206 sofort, wenn man darin $m, = \frac{1}{\mu,}$, $n, = 0$ und $m, = 0$, $n, = \frac{1}{\nu}$ setzt:

$$\cos \alpha, = (\nu + nb^2) : \sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2}\ \sqrt{\nu^2 + b^2}.$$
$$\cos \beta, = (\mu, + ma^2) : \sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2}\ \sqrt{\mu,^2 + a^2}.$$

Jetzt kennen wir im Dreiecke AB,C, zwei Winkel A und C, und die zwischenliegende Seite $\beta + \beta, = \beta_x$, folglich läßt sich die Seite α_0 nach pag. 87 finden:

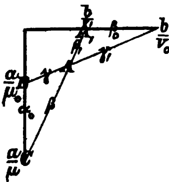
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\alpha_0 + \gamma) = \frac{\cos \frac{1}{2} (B, - C,)}{\cos \frac{1}{2} (B, + C,)} \operatorname{tg} \frac{\beta_x}{2}$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\alpha_0 - \gamma) = \frac{\sin \frac{1}{2} (B, - C,)}{\sin \frac{1}{2} (B, + C,)} \operatorname{tg} \frac{\beta_x}{2}.$$

Ganz auf analoge Weise wird die Seite β_0 bestimmt. Da nun die Seiten s und t bekannt sind, so ist das gewünschte

$$\frac{a}{\mu_0} = \operatorname{tg} (s + \alpha_0) \text{ und } \frac{\beta}{\nu_0} = \operatorname{tg} (t + \beta_0)$$

gefunden. Setzen wir voraus, daß das System schon nach seinen bekannten Flächen $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ und $\frac{a}{\mu,} : \frac{b}{\nu,}$ in Beziehung auf Seiten und Kanten berechnet ist, so haben wir blos die vier Seiten $\alpha\beta\alpha_0\beta_0$ auszurechnen, um daraus sofort die beiden Unbekannten μ_0 und ν_0 zu bestimmen. Unter den

besondern Fällen kann eine z. B. $\frac{a}{\mu,} : \frac{b}{\nu,}$ zur Säulenfläche werden, was insofern keine wesentliche Erleichterung gibt, als immer noch vier Unbekannte $\alpha\beta\alpha_0\beta_0$ zu bestimmen bleiben. Wird dagegen dieselbe zu einer der Axenebenen, z. B. wie in nebenstehender Figur $\frac{a}{\mu,} : \frac{b}{\nu,}$ zur Axenebene ac, so ergeben sich



$$\cos \alpha_0 = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\beta_0 + \gamma,) = \frac{\cos \frac{1}{2} (A - A,)}{\cos \frac{1}{2} (A + A,)} \operatorname{tg} \frac{\beta,}{2}$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\beta_0 - \gamma,) = \frac{\sin \frac{1}{2} (A - A,)}{\sin \frac{1}{2} (A + A,)} \operatorname{tg} \frac{\beta,}{2}$$

unmittelbar ohne Vermittelung von α und β. Ist dann sogar noch die zweite Polfläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ die Axenebene bc, so kommt ein einfaches Dreieck ABC mit einem rechten Winkel in C. Es wird daher $\cos C = 0$, $\sin C = 1$, daher

$$\cos \alpha_0 = \frac{\cos A}{\sin B} \text{ und } \cos \beta_0 = \frac{\cos B}{\sin A}.$$

Anwendung der Rechenformeln.

1. Regulärsystem.

Rechnung mit Cosinusformeln.

Hier ist $a = b = c = 1$ zu setzen, wodurch sich sämmtliche Formeln sofort wesentlich vereinfachen. Die Klammern läßt man als selbstverständlich weg.

1. Seiten $\pm \cos = 1 + mm, + nn, : \sqrt{1+m^2+n^2} \; \sqrt{1+m,^2+n,^2}$.
2. Kanten $\mp \cos = 1 + \mu\mu, + \nu\nu, : \sqrt{1+\mu^2+\nu^2} \; \sqrt{1+\mu,^2+\nu,^2}$.

Allgemein.

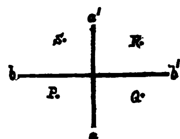
3. Seiten $\pm \cos = mm, + nn, + pp, : \sqrt{m^2+n^2+p^2} \; \sqrt{m,^2+n,^2+p,^2}$.
4. Kanten $\mp \cos = \mu\mu, + \nu\nu, + \pi\pi, : \sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2} \; \sqrt{\mu,^2+\nu,^2+\pi,^2}$.

Abgesehen von den griechischen und lateinischen Buchstaben lauten die Formeln zwar gleich, aber bei den Seiten müssen wir mnm,n, setzen, wenn bei den Kanten $\frac{1}{\mu}\;\frac{1}{\nu}\;\frac{1}{\mu,}\;\frac{1}{\nu,}$ steht, wodurch sich das Invertirungsverhältniß klar ausspricht. Es gibt also zu jedem Körper $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ einen winkeltauschenden Gegenkörper, der die Fußpunkte der Zonenaxen in $\mu a + \nu b$ hat. Zur Unterstützung des Gedächtnisses setzen wir die Symbole

$$\frac{1 + m + n}{1 + m, + n,} \text{ und } \frac{1 + \mu + \nu}{1 + \mu, + \nu,} \text{ oder } \frac{m + n + p}{m, + n, + p,} \text{ und } \frac{\mu + \nu + \pi}{\mu, + \nu, + \pi,}$$

über einander, und machen nach der Graßmann'schen Regel pag. 61 für das erste Glied die Producte der über einander stehenden Buchstaben, für das zweite die Quadrate mit den Wurzelzeichen.

Der Bequemlichkeit wegen behalte ich öfter die Axenbenennung abc bei, um die positive und negative Lage der Zonenpunkte und Axenschnitte leichter bezeichnen zu können: ist also ein Punkt $P = a + b$, so ist



$Q = a - b = a + b'$, $S = - a + b = a' + b$, $R = - a - b = a' + b'$. Durch die Striche der Gegenaxen wird das Negative am kürzesten angedeutet. Gehe ich dagegen vom Quadranten R aus, so setze ich R nicht $= a' + b' = - a - b$, sondern $R = a + b$, es muß dann $P = a' + b'$, $Q = a' + b$, $S = a + b'$ werden. Die Sache ist übrigens so elementar, daß daraus keine Schwierigkeiten selbst bei Anfängern entstehen können.

Beispiel. Es wird der Winkel gesucht, welchen die beiden Flächen

$$a : \tfrac{1}{2}b : \tfrac{1}{3}c \text{ und } \tfrac{1}{3}a : b : \tfrac{1}{2}c$$

mit einander machen. Ohne irgend eine Anschauung von der Sache zu haben, setzen wir in der allgemeinen Formel (4)

$$\mu = 1,\ \nu = 2,\ \pi = 3 \text{ und } \mu_{,} = 3,\ \nu_{,} = 1,\ \pi_{,} = 2$$

und erlangen im regulären System

$$\cos = 1 . 3 + 2 . 1 + 3 . 2 : \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}\ \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = 11 : 14.$$

Wollen wir die kleinere Formel (2) anwenden, so müssen wir zuvor die Flächen auf die Form

$$3a : \tfrac{3}{2}b : c \text{ und } \tfrac{2}{3}a : 2b : c$$

bringen, und dann die Brüche umkehren, d. h.

$$\mu = \tfrac{1}{3},\ \nu = \tfrac{2}{3} \text{ und } \mu_{,} = \tfrac{3}{2},\ \nu = \tfrac{1}{2}$$

setzen, dann kommt ebenfalls

$$\cos = 1 + \tfrac{1}{3} . \tfrac{3}{2} + \tfrac{2}{3} . \tfrac{1}{2} : \sqrt{1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9}}\ \sqrt{1 + \tfrac{9}{4} + \tfrac{1}{4}} = 11 : 14.$$

Die Brüche sind hier schwerer zu übersehen. Oefter findet jedoch auch das Umgekehrte Statt.

Es wird der Winkel gesucht, welchen zwei Zonenaxen

$$c;\ a + 2b \text{ und } c;\ a' + 2b$$

mit einander machen. Jetzt ist in der Seitenformel (1)

$$m = 1,\ n = 2 \text{ und } m_{,} = -1,\ n_{,} = 2$$

zu setzen, und es folgt sofort

$$\cos = 1 - 1 + 2 . 2 : \sqrt{1 + 1 + 2^2}\ \sqrt{1 + 1 + 2^2} = 4 : 6 = 0{,}666 \ldots$$

Oktaederkante durch Flächen a : b : c und a : b' : c erzeugt gibt

$$\mu = \nu = \mu_{,} = 1 \text{ und } \nu_{,} = -1;$$

Granatoederkanten in den Zonenaxen c; a + b und c; a + b' geben

$$m = n = m = 1 \text{ und } n_{,} = -1,$$

folglich ist für beide $\cos = 1 + 1 - 1 : \sqrt{1 + 1 + 1}\ \sqrt{1 + 1 + 1}$

$$= 0{,}333 \ldots .\ 70^0\ 32',$$

d. h. der Rhombus des Granatoeders hat den Winkel der Kante des Oktaeders.

Umgekehrt hat **Granatoederkante** durch Flächen a : ∞b : c und ∞a : b : c erzeugt

$$\mu = \nu_{,} = 1 \text{ und } \mu_{,} = \nu = 0,$$

O k t a e d e r k a n t e n in den Zonenaxen c; a + 0b und c; 0a + b geben

$$m = n_{,} = 1 \text{ und } m_{,} = n = 0,$$

folglich ist für beide

$$\cos = 1 + 0 + 0 : \sqrt{1 + 1 + 0}\ \sqrt{1 + 0 + 1} = 0{,}5 \ldots .\ 60^0,$$

d. h. die Seite des Oktaeders hat den Winkel der Kante des Granatoeders. Es ist dabei natürlich vom Haupt- und Nebenwinkel abgesehen, allein darüber kann kein Irrthum entstehen: das gleichseitige Dreieck im Oktaeder hat 60°, die Kante im Granatoeder 120°.

Leucitoederkante durch Flächen 2a : 2b : c und 2a : 2b' : c erzeugt gibt

$$\mu = \nu = \mu_{,} = \tfrac{1}{2},\ \nu_{,} = -\tfrac{1}{2};$$

Pyramidenwürfelkanten in den Zonenaxen c; $\frac{1}{2}$a + $\frac{1}{2}$b und c; $\frac{1}{2}$a + $\frac{1}{2}$b' geben

$$m = n = m_, = \tfrac{1}{2},\ n_, = -\tfrac{1}{2},$$

folglich ist für beide

$$\cos = 1 + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} : \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}}\ \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}}$$
$$= 0{,}666 \ldots 48^0\ 12' = 131^0\ 48'.$$

Umgekehrt hat **Pyramidenwürfelkante** durch Flächen $\frac{1}{2}$a : ∞b : c und ∞a : $\frac{1}{2}$b : c erzeugt

$$\mu = \nu_, = 2 \text{ und } \mu_, = \nu = 0;$$

Leucitoederkanten in den Zonenaxen c; 2a + 0b und c; 0a + 2b geben

$$m = n_, = 2 \text{ und } m_, = n = 0,$$

folglich für beide

$$\cos = 1 + 0 + 0 : \sqrt{1 + 4 + 0}\ \sqrt{1 + 0 + 4}$$
$$= 0{,}2 \ldots 78^0\ 27'\ 47'' = 101^0\ 32'\ 13''.$$

Es ist der Winkel, welchen Hauy für die Fläche des Kalkspathrhomboeders (Hdb. Miner. 1863 pag. 395) annahm.

Pyramidenoktaederkante durch Flächen $\frac{1}{2}$a : $\frac{1}{2}$b : c und $\frac{1}{2}$a : $\frac{1}{2}$b' : c erzeugt gibt

$$\mu = \nu = \mu_, = 2,\ \nu_, = -2;$$

Pyramidenwürfelkanten in den Zonenaxen c; 2a + 2b und c; 2a + 2b' geben

$$m = n = m_, = 2 \text{ und } n_, = -2,$$

folglich für beide

$$\cos = 1 + 4 - 4 : \sqrt{1 + 4 + 4}\ \sqrt{1 + 4 + 4} = 0{,}111 \ldots = 83\,.\,39 \text{ oder } 96\,.\,21.$$

Umgekehrt hat **Pyramidenwürfelkante** durch Flächen 2a : ∞b : c und ∞a : 2b : c erzeugt

$$\mu = \nu_, = \tfrac{1}{2} \text{ und } \mu_, = \nu = 0;$$

Pyramidenoktaederkanten in den Zonenaxen c; $\frac{1}{2}$a + 0b und c; 0a + $\frac{1}{2}$b geben

$$m = n_, = \tfrac{1}{2} \text{ und } m_, = n = 0,$$

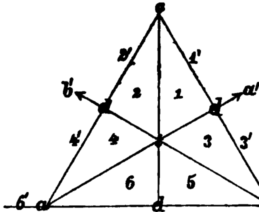
folglich für beide

$$\cos = 1 + 0 + 0 : \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} + 0}\ \sqrt{1 + 0 + \tfrac{1}{4}} = 0{,}8 = 36^0 = 52'\ 143^0\ 8'.$$

Diese Beispiele werden die Leichtigkeit der Rechnung im Allgemeinen beweisen. Die Schwierigkeit tritt erst bei Ungeübten ein, welche die Anschauung aus der Projection auf die Körper übertragen wollen. Das wird im Folgenden die Aufgabe.

Das **Rechnen mit der kleinern Formel** (2) geschieht an der Hand der Projection ohne jegliche weitere Vorbereitung, weil wir eben die Werthe der Sectionslinien unmittelbar ablesen können. Wählen wir als Beispiel das **Pyramidengranatoeder** a : $\frac{1}{2}$b : $\frac{1}{3}$c, so schreiben wir uns ein getheiltes Dreieck als Sinnbild hin, was leichter, als eine Kugelzeichnung bewerkstelligt werden kann. Wir haben dann nur zu berück-

sichtigen, daß in den Axenecken die anliegenden Flächen 1 . 2, 3 . 5 und 4 . 6 zum kürzesten Schnitt $\frac{1}{3}$ kommen, über die digonale Ecke d hinweg liegt daher der mittlere $\frac{1}{2}$, und über die trigonale t der längste 1. Das gibt folgendes Schema:



1) $a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c = 3a : \frac{3}{2}b;\ \mu\nu = \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}$ } oberes Paar.
2) $\frac{1}{2}a : b : \frac{1}{3}c = \frac{3}{2}a : 3b;\ \mu_{,}\nu_{,} = \frac{2}{3}\ \frac{1}{3}$

3) $a : \frac{1}{3}b : \frac{1}{2}c = 2a : \frac{2}{3}b;\ \mu\nu = \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}$ } mittleres Paar.
4) $\frac{1}{3}a : b : \frac{1}{2}c = \frac{2}{3}a : 2b;\ \mu_{,}\nu_{,} = \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}$

5) $\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}b : c = \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}b;\ \mu\nu = 2\ 3$ } unteres Paar.
6) $\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c = \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b;\ \mu_{,}\nu_{,} = 3\ 2$

Die untere Axe c' brauchen wir nie; die Flächen in den anliegenden Quadranten haben dieselben Ausdrücke, nur links die b' und rechts die a' gestrichelt d. h. negativ; im gegenüberliegenden beide a' und b' negativ.

Kante 1/2 hat cos $= 1+\frac{2}{9}+\frac{2}{9} : \sqrt{1+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}\ \sqrt{1+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{13}{9} : \frac{14}{9} = \frac{13}{14}$.

Kante 1/3 . . . . . . $1+\frac{1}{6}+1 : \frac{1}{3}\sqrt{14}\quad \sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{13}{6} : \frac{14}{6} = \frac{13}{14}$.

Kante 1/4 . . . . . . $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} : \frac{1}{3}\sqrt{14}\quad \sqrt{1+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{11}{6} : \frac{14}{6} = \frac{11}{14}$.

Kante 1/5 . . . . . . $1+\frac{2}{3}+2 : \frac{1}{3}\sqrt{14}\quad \sqrt{1+4+9} = \frac{11}{3} : \frac{14}{3} = \frac{11}{14}$.

Kante 1/6 . . . . . . $1+1+\frac{4}{3} : \frac{1}{3}\sqrt{14}\quad \sqrt{1+9+4} = \frac{10}{3} : \frac{14}{3} = \frac{10}{14}$.

Kante 1/1' . . . . . $1-\frac{1}{9}+\frac{4}{9} : \frac{1}{3}\sqrt{14}\quad \sqrt{1+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = \frac{12}{9} : \frac{14}{9} = \frac{12}{14}$.

Kante 1/2' . . . . . $1+\frac{2}{9}-\frac{2}{9} : \frac{1}{3}\sqrt{14}\quad \sqrt{1+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{9}{9} : \frac{14}{9} = \frac{9}{14}$.

Kante 1/3' . . . . . $1-\frac{1}{6}+1 : \frac{1}{3}\sqrt{14}\quad \sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{11}{6} : \frac{14}{6} = \frac{11}{14}$.

Kante 1/4' . . . . . $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} : \frac{1}{3}\sqrt{14}\quad \sqrt{1+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{7}{6} : \frac{14}{6} = \frac{7}{14}$.

Kante 1/5' . . . . . $1-\frac{2}{3}+2 : \frac{1}{3}\sqrt{14}\quad \sqrt{1+4+9} = \frac{7}{3} : \frac{14}{3} = \frac{7}{14}$.

Kante 1/6' . . . . . $1+1-\frac{4}{3} : \frac{1}{3}\sqrt{14}\quad \sqrt{1+9+4} = \frac{4}{3} : \frac{14}{3} = \frac{2}{7}$.

Die Divisoren der Cosinusse sind vom positiven oder negativen Vorzeichen unabhängig, da das Quadrat in beiden Fällen positiv wird. Unter 24 Flächen kann jede nur von 23 geschnitten werden. Habe ich davon die ersten sechs gerechnet, so ergeben sich alle andern von selbst blos durch die Vorzeichen der Glieder des Zählers. Denn derselbe kann

in Beziehung auf die Vorzeichen seiner drei Glieder nur viererlei Formen annehmen:

$$1 + \mu\mu_{,} + \nu\nu_{,}, \quad 1 - \mu\mu_{,} + \nu\nu_{,}, \quad 1 + \mu\mu_{,} - \nu\nu_{,}, \quad 1 - \mu\mu_{,} - \nu\nu_{,}.$$

Daher lassen sich aus sechs beliebigen Kanten die übrigen 17 durch einfache Abänderung der Vorzeichen ableiten. Die weitern zwölf Zahlen sind also:

$1+\frac{1}{9}-\frac{4}{9}=\frac{6}{9} \ldots \frac{6}{14}$; $1+\frac{2}{9}-\frac{2}{9}=\frac{9}{9} \ldots \frac{9}{14}$; $1+\frac{1}{6}-1=\frac{1}{6} \ldots \frac{1}{14}$;
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6} \ldots \frac{5}{14}$; $1+\frac{2}{3}-2=-\frac{1}{3} \ldots -\frac{1}{14}$; $1-1+\frac{4}{3}=\frac{4}{3} \ldots \frac{4}{14}$;
$1-\frac{1}{9}-\frac{4}{9}=\frac{4}{9} \ldots \frac{4}{14}$; $1-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}=\frac{5}{9} \ldots \frac{5}{14}$; $1-\frac{1}{6}-1=-\frac{1}{6} \ldots -\frac{1}{14}$;
$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \ldots \frac{1}{14}$; $1-\frac{2}{3}-2=-\frac{5}{3} \ldots -\frac{5}{14}$; $1-1-\frac{4}{3}=-\frac{4}{3} \ldots -\frac{4}{14}$.

Die Brüche überschauen wir zwar leicht, allein sie hindern immerhin die Abkürzung der Rechnung, welche stattfinden kann, wenn wir es mit den Flächen ein und desselben Körpers zu thun haben, weil dann in der allgemeinern Formel $\mu_{,} = \pm\mu$, $\nu_{,} = \pm\nu$, $\pi_{,} = \pm\pi$ wird, folglich die Wurzeln wegfallen, und die Formel übergeht in

$$-\cos = \frac{\mu\mu_{,} + \nu\nu_{,} + \pi\pi_{,}}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2}.$$

Wie wir in der geschichtlichen Einleitung pag. 61 erwähnten, so hat schon Graßmann (Zur physischen Krystallonomie 1829 pag. 154) dieß mit mathematischer Meisterschaft, wenn auch in etwas verhüllter Weise, auseinander gesetzt, und folgende einfache Gedächtnißregel gegeben: „man „setze die Wiederholungsexponenten der beiden Träger, deren Winkel gesucht „wird, in der Ordnung, in welcher sie sich auf die eingeführte Folge „der Coordinatenaxen beziehen nach Art eines Bruches unter einander, „so gibt die Productensumme aus je zwei unter einander stehenden „Wiederholungsexponenten den Zähler, die Quadratensumme derselben „den Nenner", also

$$\frac{\beta\gamma\delta}{\gamma\delta\beta} \text{ gibt} - \cos \frac{\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta}{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2} \text{ pag. 61.}$$

„Sind die Gestalten verschieden, so kommt die allgemeine Formel mit „dem Producte zweier Wurzeln aus den Quadratsummen der Wpten „über und unter dem Strich", also

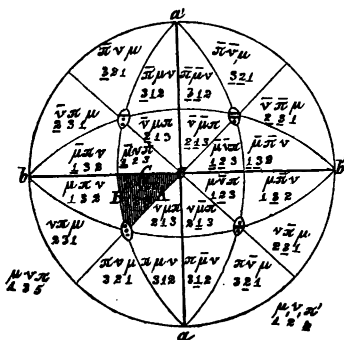
$$\frac{\beta\gamma\delta}{\pi\varkappa\tau} \text{ gibt} - \cos \frac{\beta\pi + \gamma\varkappa + \delta\tau}{\sqrt{(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(\pi^2 + \varkappa^2 + \tau^2)}}.$$

Die Wahl der griechischen Buchstaben ist sehr geschickt, indem die drei weichen den drei harten Consonanten gegenüber stehen, und damit unser Stricheln vermieden ist. Miller (A Treatise on Crystallographie 1839 pag. 25) kam zehn Jahre später freilich auf ganz anderm Wege zu denselben Formeln, aber ohne Graßmann zu nennen. Dabei schloß er sich an die von Whewell pag. 62 eingeführten Buchstaben hkl und pqr an, deren Correspondenz man nicht mit gleicher Leichtigkeit erkennt. Die

Formeln ergeben sich allerdings einfach aus der analytischen Geometrie, allein wie verdienstlich ihre erste Anwendung auf Krystalle war, beurtheilt man aus Bernhardi (Beiträge zur nähern Kenntniß der regelmäßigen Krystallformen 1826), der sich förmlich abquält, um für jeden einzelnen regulären Körper die Formel zu finden.

Mein eingeschlagener Weg folgt der Weiß'schen Deductionsmethode, und ist eine dritte Weise, die sich immer möglichst an die Anschauung anlehnt. In ihren Resultaten kommen alle drei zusammen. Wenn es sich blos um mechanische Ausführung handelt, so liefert

Graßmann's Methode das Beste. Ich will daher das Wesentliche in meiner Weise erläutern: zu dem Ende zieht man einen beliebigen Kreis, verzeichnet darin die Axen aa' und bb', und zieht mit $ab = \sqrt{2}$ die vier Granatoederkreise, welche mir die vier Orte der Oktaederflächen geben, durch welche ich die beiden den Sectionslinien des Granatoeders gehörigen Zwischenaxen lege. Dann liefern die Durchschnitte der Granatoederkreise mit den Axen die Granatoederflächenorte, während die Würfelflächenorte in den Axenenden liegen.



Wir bekommen auf diese Weise das Kugelbild eines Achtundvierzigflächners, worin bekanntlich alle übrigen regulären Körper stecken (Methode der Krystallographie 1840 pag. 184). Jetzt füllt man den als positiv angenommenen Oktanten mit den sogenannten Indices, wählt dazu keine Buchstaben, sondern gleich die Nenner des gewöhnlichen Pyramidengranatoeders $a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c = 123$, und hat nur zu erwägen, daß in jedem Axenende der kürzeste Schnitt $\frac{1}{3}$ liegt, d. h. die größte Zahl 3 gemäß der alphabetischen Ordnung der Axenbuchstaben die 1ste, 2te oder 3te Stelle einnehme. Ueber den Granatoederflächenort weg kommt der mittlere $\frac{1}{2}$, und über den Oktaederflächenort weg der größte 1. Um Axenpunkt c müssen die kleinsten Schnitte $3 = \frac{1}{3}$ in der dritten Stelle stehen; um a in der ersten; um b in der 2ten (Mitte), und in jedem Oktanten sich natürlich dieselben sechs Ternionen wiederholen, sie unterscheiden sich blos durch das Vorzeichen, was Graßmann sehr passend auf dem Orte der Oktaederfläche andeutete. Längs den Axen steht auf beiden Seiten dieselbe Zahlenfolge, und die Oktanten unterscheiden sich nur durch Strichelung von einander, so daß ein Irrthum in der Bezeichnung der Flächen sogleich in die Augen fiele. Wir wollen jetzt die 23 Winkel der drei gewöhnlichsten Achtundvierzigflächner hinschreiben, und setzen dabei die drei obern Indices nur einmal hin, weil mit denselben alle Zahlen unterm Strich der Reihe nach multiplicirt werden:

$a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c$	$a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{4}c$	$a : \frac{1}{3}b : \frac{1}{5}c$
$\frac{1}{2}\frac{2}{1}\frac{3}{3}$ ... $2+2+9=13$	$\frac{1}{2}\frac{2}{1}\frac{4}{4}$ ... $2+2+16=20$	$\frac{1}{3}\frac{3}{1}\frac{5}{5}$ ... $3+3+25=31$
$1\,3\,2$ ... $1+6+6=13$	$1\,4\,2$ ... $1+8+8=17$	$1\,5\,3$ ... $1+15+15=31$
$3\,1\,2$ ... $3+2+6=11$	$4\,1\,2$ ... $4+2+8=14$	$5\,1\,3$ ... $5+3+15=23$
$2\,3\,1$ ... $2+6+3=11$	$2\,4\,1$ ... $2+8+4=14$	$3\,5\,1$ ... $3+15+5=23$
$3\,2\,1$ ... $3+4+3=10$	$4\,2\,1$ ... $4+4+4=12$	$5\,3\,1$ ... $5+9+5=19$
$\bar{1}\,2\,3$ ... $-1+4+9=12$	$\bar{1}\,2\,4$ ... $-1+4+16=19$	$\bar{1}\,3\,5$ ... $-1+9+25=33$
$2\,\bar{1}\,3$ ... $2-2+9=9$	$2\,\bar{1}\,4$ ... $2-2+16=16$	$3\,\bar{1}\,5$ ... $3-3+25=25$
$\bar{1}\,3\,2$ ... $-1+6+6=11$	$\bar{1}\,4\,2$ ... $-1+8+8=15$	$\bar{1}\,5\,3$ ... $-1+15+15=29$
$3\,\bar{1}\,2$ ... $3-2+6=7$	$4\,\bar{1}\,2$ ... $4-2+8=10$	$5\,\bar{1}\,3$ ... $5-3+15=17$
$\bar{2}\,3\,1$ ... $-2+6+3=7$	$\bar{2}\,4\,1$ ... $-2+8+4=10$	$\bar{3}\,5\,1$ ... $-3+15+5=17$
$3\,\bar{2}\,1$ ... $3-4+3=2$	$4\,\bar{2}\,1$ ... $4-4+4=4$	$5\,\bar{3}\,1$ ... $5-9+5=1$
$1\,\bar{2}\,3$ ... $1-4+9=6$	$1\,\bar{2}\,4$ ... $1-4+16=13$	$1\,\bar{3}\,5$ ... $1-9+25=17$
$\bar{2}\,1\,3$ ... $-2+2+9=9$	$\bar{2}\,1\,4$ ... $-2+2+16=16$	$\bar{3}\,1\,5$ ... $-3+3+25=25$
$1\,\bar{3}\,2$ ... $1-6+6=1$	$1\,\bar{4}\,2$ ... $1-8+8=1$	$1\,\bar{5}\,3$ ... $1-15+15=1$
$\bar{3}\,1\,2$ ... $-3+2+6=5$	$\bar{4}\,1\,2$ ... $-4+2+8=6$	$\bar{5}\,1\,3$ ... $-5+3+15=13$
$2\,\bar{3}\,1$ ... $2-6+3=-1$	$2\,\bar{4}\,1$ ... $2-8+4=-2$	$3\,\bar{5}\,1$ ... $3-15+5=-7$
$\bar{3}\,2\,1$ ... $-3+4+3=4$	$\bar{4}\,2\,1$ ... $-4+4+4=4$	$\bar{5}\,3\,1$ ... $-5+9+5=9$
$\bar{1}\,\bar{2}\,3$ ... $-1-4+9=4$	$\bar{1}\,\bar{2}\,4$ ... $-1-4+16=11$	$\bar{1}\,\bar{3}\,5$ ... $-1-9+25=15$
$\bar{2}\,\bar{1}\,3$ ... $-2-2+9=5$	$\bar{2}\,\bar{1}\,4$ ... $-2-2+16=12$	$\bar{3}\,\bar{1}\,5$ ... $-3-3+25=19$
$\bar{1}\,\bar{3}\,2$ ... $-1-6+6=-1$	$\bar{1}\,\bar{4}\,2$ ... $-1-8+8=-1$	$\bar{1}\,\bar{5}\,3$ ... $-1-15+15=-1$
$\bar{3}\,\bar{1}\,2$ ... $-3-2+6=1$	$\bar{4}\,\bar{1}\,2$ ... $-4-2+8=2$	$\bar{5}\,\bar{1}\,3$ ... $-5-3+15=7$
$\bar{2}\,\bar{3}\,1$ ... $-2-6+3=-5$	$\bar{2}\,\bar{4}\,1$ ... $-2-8+4=-6$	$\bar{3}\,\bar{5}\,1$ ... $-3-15+5=-13$
$\bar{3}\,\bar{2}\,1$ ... $-3-4+3=-4$	$\bar{4}\,\bar{2}\,1$ ... $-4-4+4=-4$	$\bar{5}\,\bar{3}\,1$ ... $-5-9+5=-9$
$1^2+2^2+3^2=14$	$1^2+2^2+4^2=21$	$1^2+3^2+5^2=35.$

Gewöhnlich sucht man bei den vollflächigen Körpern nur die drei Winkel

$$A\ \frac{123}{213} \ldots \cos\frac{13}{14} = 158.12.48;\ \frac{124}{214} \ldots \cos\frac{20}{21} = 162.14.50;$$

$$\frac{135}{315} \ldots \cos\frac{31}{35} = 152.20.22.$$

$$B\ \frac{123}{132} \ldots \cos\frac{13}{14} = 158.12.48;\ \frac{124}{142} \ldots \cos\frac{17}{21} = 144.2.58;$$

$$\frac{135}{153} \ldots \cos\frac{31}{35} = 152.20.22.$$

$$C\ \frac{123}{\underline{1}23} \ldots \cos\frac{12}{14} = 148.59.50;\ \frac{124}{\underline{1}24} \ldots \cos\frac{19}{21} = 154.47.28;$$

$$\frac{135}{\underline{1}35} \ldots \cos\frac{33}{35} = 160.32.13.$$

Aber auch die übrigen sind für die Erforschung der Formen von Wichtigkeit: die Zahlen 13 . 13 in $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ wie 31 . 31 in $\frac{1}{3}:\frac{1}{5}$ zeigen, daß die auf den Oktaederflächen stehenden Dreikantner in Dihexaeder übergehen; wir haben sogar drei gleiche Zahlen, dort 11 . 11 . 11 hier 17 . 17 . 17. Zwei der 11 zeigen an, daß die abwechselnden Dihexaederflächen ein Rhomboeder bilden, daher erscheinen auch im Dreikantner $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$ die gleichen Zahlen 14. Die dritte 11 .. $\frac{123}{\underline{1}32}$ beweist, daß auch im 2gliedrigen Oktaeder auf der Granatoederfläche die gegenüberliegenden

Flächen den Winkel des Hälftflächner vom Dihexaeder haben. Jede Fläche wird daher in unsymmetrischer Weise von drei andern unter gleichen Winkeln geschnitten. Dasselbe zeigt $\frac{1}{3}:\frac{1}{5}$, wenn auch an andern Flächen, durch die Zahlen 17. Das Pyramidengranatoeder zeigt außerdem noch sieben Mal gleiche Winkel 13 . 13, 9 . 9, 7 . 7, 5 . 5, 4 . 4, 1 . 1, —1 . —1; Fläche $\frac{1}{3}:\frac{1}{5}$ noch 25 . 25, 23 . 23, 19 . 19, 1 . 1; Fläche $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$ außer dem nothwendigen Zwischenrhomboederwinkel 14 . 14 noch 16 . 16, 12 . 12, 10 . 10, 4 . 4.

Tetraedrie. Für die Berechnung der gebrochenen Tetraederkanten der geneigtflächigen Hemiedrie dürfen wir nur einen Quadranten überspringen, und den gegenüberliegenden nehmen, also:

$$\frac{123}{\underline{21}3} \ldots \cos\frac{5}{14} = 110 . 56 . 30; \quad \frac{124}{\underline{21}4} \ldots \cos\frac{12}{21} = 124 . 51;$$

$$\frac{135}{\underline{31}5} \ldots \cos\frac{19}{35} = 122 . 52 . 42.$$

Die übrigen beiden Winkel bleiben den holoedrischen Formen gleich.

Pyritoedrie. Hier kommen im gebrochenen Pyritoeder zwei Winkel hinzu; die gebrochene Würfel- und Rhomboederkante:

$$\frac{123}{1\underline{2}3} \ldots \cos\frac{6}{14} = 115 . 22 . 37; \quad \frac{124}{1\underline{2}4} \ldots \cos\frac{13}{21} = 128 . 14 . 48;$$

$$\frac{135}{1\underline{3}5} \ldots \cos\frac{17}{35} = 119 . 3 . 33.$$

$$\frac{123}{312} \ldots \cos\frac{11}{14} = 141 . 47 . 12; \quad \frac{124}{412} \ldots \cos\frac{14}{21} = 131 . 48 . 37;$$

$$\frac{135}{513} \ldots \cos\frac{23}{35} = 131 . 4 . 56.$$

Gyroedrie liefert zwei Winkel: Dach- und Oktaederkante; denn die Rhomboederkante hat es mit dem gebrochenen Pyritoeder gemein.

$$\frac{123}{\underline{1}32} \ldots \cos\frac{11}{14} = 141 . 47 . 12; \quad \frac{124}{\underline{1}42} \ldots \cos\frac{15}{21} = 135 . 35 . 5;$$

$$\frac{135}{1\underline{5}3} \ldots \cos\frac{29}{35} = 145 . 57 . 8.$$

$$\frac{123}{2\underline{1}3} \ldots \cos\frac{9}{14} = 130 . 0 . 19; \quad \frac{124}{\underline{2}14} \ldots \cos\frac{16}{21} = 139 . 37 . 57;$$

$$\frac{135}{\underline{3}15} \ldots \cos\frac{25}{35} = 135 . 35 . 5.$$

Tetartoedrie hat die Flächenrhomboederkante $\frac{123}{312}$ mit beiden vorigen Hemiedrien gemein, nur die Eckrhomboeder- und Dachkante sind neu:

$$\frac{123}{\underline{3}\underline{1}2} \ldots \cos\frac{1}{14} = 94 \,.\, 5 \,.\, 45; \quad \frac{124}{\underline{4}\underline{1}2} \ldots \cos\frac{2}{21} = 95 \,.\, 27 \,.\, 54;$$

$$\frac{135}{\underline{5}\underline{1}3} \ldots \cos\frac{7}{35} = 101 \,.\, 32 \,.\, 14.$$

$$\frac{123}{\underline{1}\underline{2}3} \ldots \cos\frac{4}{14} = 106 \,.\, 36 \,.\, 6; \quad \frac{124}{\underline{1}\underline{2}4} \ldots \cos\frac{11}{21} = 121 \,.\, 30 \,.\, 26;$$

$$\frac{135}{\underline{1}\underline{3}5} \ldots \cos\frac{15}{35} = 115 \,.\, 22 \,.\, 37.$$

Ist man mit den allgemeinen Körpern fertig, so ergeben sich die besondern von selbst, denn man darf dann die Zahlen nur gleich Eins oder Null setzen. Bei dem

Pyramidenoktaeder $\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}b : c$ haben wir im Pyramidengranatoeder blos $2 = 3$ zu setzen, dann werden die Kanten:

Granatoederkante . $\dfrac{123}{213} = \dfrac{122}{212} = \dfrac{2+2+4}{2^2+1^2+2^2} = -\cos\frac{8}{9}$
$= 152 \,.\, 44 \,.\, 2 = A.$

Gebr. Würfelkante $\dfrac{123}{132} = \dfrac{122}{122} = \dfrac{1+4+4}{} = -\cos\frac{9}{9} = 180^0 = B.$

Oktaederkante . . . $\dfrac{123}{\underline{1}23} = \dfrac{122}{\underline{1}22} = \dfrac{-1+4+4}{} = -\cos\frac{7}{9}$
$= 141 \,.\, 3 \,.\, 27 = C.$

Gebr. Tetraederkante $\dfrac{123}{\underline{2}\underline{1}3} = \dfrac{122}{\underline{2}\underline{1}2} = \dfrac{-2-2+4}{} = -\cos 0 = 90^0 = D.$

Winkel 180^0 zeigt, daß die Dihexaederkanten $\frac{123}{132} = \frac{213}{312} = \frac{312}{231}$ wegfallen, und eine rhomboedrische Ecke entsteht. Bei der Tetraedrie wird die gebrochene Tetraederkante 90^0, weil $\cos = 0$, das Deltoeder setzt sich also aus vier Würfelecken zusammen. Mit der gleichen Leichtigkeit lassen sich die Winkel von den Pyramidenoktaedern 133, 144, 155 zc. hinschreiben. Im

Leucitoeder $a : b : \frac{1}{2}c = 112$ wird $2 = 1$ und $3 = 2$, wir haben also im Pyramidengranatoeder blos auf die Stellung von 3 zu sehen, folglich

Granatoederkante . $\dfrac{123}{213} = \dfrac{112}{112} = \dfrac{1+1+4}{1+1+2^2} = -\cos 1 = 180^0 = A.$

Gebr. Würfelkante $\dfrac{123}{132} = \dfrac{112}{121} = \dfrac{1+2+2}{} = -\cos\frac{5}{6} = 146.26.34 = B.$

Gebr. Oktaederknt. $\dfrac{123}{\underline{1}23} = \dfrac{112}{\underline{1}12} = \dfrac{-1+1+4}{} = -\cos\frac{4}{6} = 131.48.37 = C.$

Tetraederkante . . . $\dfrac{123}{\underline{2}\underline{1}3} = \dfrac{112}{\underline{1}\underline{1}2} = \dfrac{-1-1+4}{} = -\cos\frac{2}{6} = 109.28.16.$

Das Pyramidentetraeder hat also in seiner Tetraederkante den Oktaederwinkel.

Das **Leucitoid** $a : b : \frac{1}{3}c = 113$ schnell auf die Winkel geprüft, gibt

$$\frac{113}{131} = \frac{1 + 3 + 3}{1 + 3^2 + 1} = \frac{7}{11} \ldots 129 . 31 . 16 = B;$$

$$\frac{113}{113} = \frac{\bar{1} + 1 + 9}{1 + 3^2 + 1} = \frac{9}{11} \ldots 144 . 54 . 12 = C;$$

$$\frac{\bar{1}\bar{1}3}{113} = \frac{-1 - 1 + 9}{1 + 3^2 + 1} = \frac{7}{11}.$$

Wir haben also in dem zugehörigen Pyramidentetraeder den merkwürdigen Fall, daß alle Winkel $= \cos \frac{7}{11} = 129^0\ 31'\ 16''$ sind.

Pyramidenwürfel $\frac{a}{0} : b : \frac{1}{2}c = 012$ ist $= 123$ zu setzen, dann ist $1 = 0$, $2 = 1$, $3 = 2$, wir haben

$$\frac{123}{213} \ldots \frac{012}{102} \ldots \frac{0 + 0 + 2 . 2}{1 + 0 + 2^2} = \frac{4}{5};$$

$$\frac{123}{132} \ldots \frac{012}{021} \ldots \frac{2 + 2}{5} = \frac{4}{5};$$

$$\frac{123}{213} \ldots \frac{012}{102} \ldots \frac{2 . 2}{5} = \frac{4}{5}.$$

Wir bekommen in allen Fällen, sogar in der Tetraedrie $- \cos \frac{4}{5} = 143^0\ 7'\ 48''$, also dihexaedrische Ecken, und man kann den Körper wie ein gebrochenes Pyramidentetraeder ansehen. Nur ein Fall

$$\frac{123}{123} \ldots \frac{012}{012} \text{ gibt } \frac{1 + 4}{1 + 4} = 1, \text{ d. h.} - \cos = 180^0,$$

die gebrochene Oktaederkante im Pyramidengranatoeder fällt also weg.

Pyritoeder. Wir brauchen dabei nur auf unsere obige Zahlenformel zu sehen, und 012 zu substituiren, so kommt nach der Pyritoedrieformel

Würfelkante . . $\frac{123}{123} \ldots \frac{012}{01\bar{2}} \ldots \frac{-1+4}{5} = \frac{3}{5} \ldots \cos = 126^0\ 52'\ 12''.$

Rhomboederkante $\frac{123}{312} \ldots \frac{0\bar{1}2}{201} \ldots \frac{2}{5} \ldots\ldots\ldots \cos = 113^0\ 34'\ 41''.$

Dagegen fällt die gebrochene Oktaederkante

$$C = \frac{123}{123} \ldots \frac{012}{012} \ldots \frac{1 + 4}{5} = 1$$

weg, weil $- \cos 1 = 180^0$ ist. Für das

Granatoeder $a : b : c$ ist im Pyramidenwürfel blos $2 = 1$ zu setzen, es kommt dann

$$\frac{123}{213} \ldots \frac{011}{101} \ldots \frac{0 + 0 + 1}{1 + 1} = \frac{1}{2} - \cos \frac{1}{2} = 120^0.$$ Im

Oktaeder a : b : c wird $\frac{123}{123}$ zu $\frac{111}{-111}$ gibt $\frac{-1+1+1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$, $-\cos\frac{1}{3} = 109^0\ 28'\ 16''$. Endlich der

Würfel $\frac{a}{0} : \frac{b}{0} : c = 001$ gibt in allen Fällen $\cos 0 = 90^0$.

Die Prüfung der Körper auf Gleichheit und Ungleichheit der Winkel wird nach der gegebenen Regel außerordentlich einfach. Wollen wir z. B. die Achtundvierzigflächner auf das Dihexaeder prüfen, so haben wir blos die beiden ersten Formeln

$$A = \frac{123}{213} \text{ und } B = \frac{123}{132}$$

in Anwendung zu bringen, wir bekommen dann für die auf die Oktaederfläche aufgesetzten Dreikantner $\cos\frac{13}{14} = \cos\frac{13}{14}$; bei $\frac{1}{3} : \frac{1}{5}$ gab es $\cos\frac{31}{35} = \cos\frac{31}{35}$. Die Flächen $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ geben

$$\frac{234}{324} \cdots \frac{6+6+16}{3^2+2^2+4^2} = \frac{28}{29} \text{ und } \frac{234}{243} \cdots \frac{4+12+12}{2^2+4^2+3^2} = \frac{28}{29},$$

d. h. cos = 164 . 54 . 35.

Die Flächen $\frac{1}{7} : \frac{1}{11} : \frac{1}{15}$ geben ebenfalls

$$\frac{7.11.15}{11.7.15} \cdots \frac{77+77+225}{11^2+7^2+15^2} = \frac{379}{395} \text{ und}$$

$$\frac{7.11.15}{7.15.11} \cdots \frac{49+165+165}{7^2+15^2+11^2} = \frac{379}{395},$$

d. h. cos = 163 . 38 . 11.

Während wir bei diesen Körpern das Dihexaeder auf der Fläche des eingeschriebenen Oktaeders zu stehen haben, kommt bei $1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{7} = 137$ die Gleichheit der Kanten in den Tetraederecken der geneigtflächigen Hemiedrie vor. Denn die gebrochene Würfelkante ist:

$$\frac{123}{132} \text{ wird } \frac{137}{173} \cdots \frac{1+21+21}{1+7^2+3^2} = \frac{43}{59},\ \cos = 136 . 47 . 13;$$

und nach der Tetraedrie geht die gebrochene Tetraederkante

$$\frac{123}{213} \text{ über in } \frac{137}{317} \cdots \frac{-3-3+49}{59} = \frac{43}{59},\ \text{d. h. } \cos\frac{43}{59} = \cos\frac{43}{59}.$$

Ich knüpfe gewöhnlich an das Zahlenzeichen $123 = a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c$ meine Betrachtungen, da es mir am anschaulichsten und für das Gedächtniß am leichtesten ist. Wir können aber auch das Gesagte in allgemeine Formeln hüllen, und wollen dabei die frühern griechischen Buchstaben

$$\mu = 1,\ \nu = 2,\ \pi = 3$$

anwenden. Ich habe das an obigem Schema nach Anleitung der Zahlen vereinigt, wobei das kleinste π um Axe c in der dritten, um b in der zweiten und um a in der ersten Stelle stehen muß, so ist

Pyramidengranatoeder (48flächner).

Holoedrie.

$$-\cos A = \frac{\mu\nu\pi}{\nu\mu\pi} = \frac{2\,\mu\nu + \pi^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} \;\ldots\; \frac{13}{14} \quad \text{Granatoederkante.}$$

$$-\cos B = \frac{\mu\nu\pi}{\mu\pi\nu} = \frac{\mu^2 + 2\,\nu\pi}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} \;\ldots\; \frac{13}{14} \quad \text{Würfelkante.}$$

$$-\cos C = \frac{\mu\nu\pi}{\underline{\mu}\nu\pi} = \frac{-\mu^2 + \nu^2 + \pi^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} \;\ldots\; \frac{12}{14} \quad \text{Oktaederkante.}$$

Tetraedrie.

$$-\cos D = \frac{\mu\nu\pi}{\underline{\nu}\underline{\mu}\pi} = \frac{-2\,\mu\nu + \pi^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} \;\ldots\; \frac{5}{14} \quad \text{Tetraederkante.}$$

Pyritoedrie.

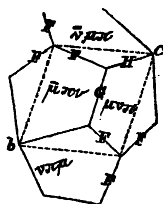
$$-\cos E = \frac{\mu\nu\pi}{\mu\underline{\nu}\pi} = \frac{\mu^2 - \nu^2 + \pi^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} \;\ldots\; \frac{6}{14} \quad \text{Dachkante.}$$

$$-\cos F = \frac{\mu\nu\pi}{\pi\mu\nu} = \frac{\mu\pi + \mu\nu + \nu\pi}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} \;\ldots\; \frac{11}{14} \quad \text{Rhomboederkante.}$$

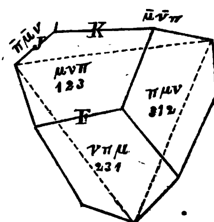
Gyroedrie.

$$-\cos G = \frac{\mu\nu\pi}{\mu\pi\nu} = \frac{-\mu^2 + 2\,\nu\pi}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} \;\ldots\; \frac{11}{14} \quad \text{Dachkante.}$$

$$-\cos H = \frac{\mu\nu\pi}{\underline{\nu}\mu\pi} = \frac{\pi^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} \;\ldots\; \frac{8}{14} \quad \text{Zwischenoktaederkante.}$$



Gyroeder.



Tetartoeder.

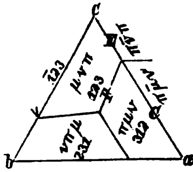
Tetartoedrie.

$$-\cos J = \frac{\mu\nu\pi}{\underline{\pi}\underline{\mu}\nu} = \frac{-\mu\nu - \mu\pi + \nu\pi}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} \;\ldots\; \frac{1}{14} \quad \text{Tetraedereckkante.}$$

$$-\cos K = \frac{\mu\nu\pi}{\underline{\mu}\underline{\nu}\pi} = \frac{-\mu^2 - \nu^2 + \pi^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} \;\ldots\; \frac{4}{14} \quad \text{Dachkante.}$$

Für Geübte braucht es dabei weiter keiner besondern Figur, man ersieht es leicht aus dem holoedrischen Schema. Alles geht wie bei den Zahlen von der einzigen etwas dunkel gehaltenen Fläche $\mu\nu\pi$ aus, die

man auch **unter** den Strich stellen könnte, um **oben** die negativen Zeichen passender über den Indices anzubringen. Es leuchtet dann bei der **Tetraedrie** sofort ein, daß für die gebrochene Tetraederkante D ein Quadrant cba' übersprungen, und $\mu\nu\pi$ mit $\bar{\nu}\bar{\mu}\pi$ combinirt werden müsse. In der **Pyritoedrie** muß man einen gebrochenen Pyramidenwürfel im Auge haben, woraus dann sofort einleuchtet, daß für die gebrochene Würfelkante E der Schnitt $\mu\nu\pi$ mit $\mu\bar{\nu}\pi$, und für die Rhomboederkante F der Schnitt $\mu\nu\pi$ mit $\pi\mu\nu$ gelten muß. Das kleine nebenstehende Dreieck mag das noch zur weitern Anschauung bringen,



worin die dritte Kante $\pi\mu\nu$ mit $\pi\mu\nu$ im Zähler wieder $-\mu^2 + \nu^2 + \pi^2$ gibt, also mit der gebrochenen Oktaederkante C übereinstimmt. Für die **Gyroedrie** bleibt die Rhomboederkante F, dagegen muß man auf das Dach der Granatoederfläche sehen, worin sich $\mu\nu\pi$ mit $\bar{\mu}\pi\nu$ schneidet, und die Dachkante G erzeugt, während die Oktaederkante H aus der Combination von $\mu\nu\pi$ mit $\bar{\nu}\mu\pi$ hervorgeht. Für die **Tetartoedrie** darf man sich in der Tetraedrie nur wieder Eins und Null rc. auf den Flächen denken, wo sich dann für das Eckrhomboeder J die Verbindung von $\mu\nu\pi$ mit $\bar{\pi}\bar{\mu}\nu$, und für die Dachkante K von $\mu\nu\pi$ mit $\bar{\mu}\bar{\nu}\pi$ ergibt.

Ist einmal der allgemeine Körper $\mu\nu\pi = 123$ mit allen seinen möglichen Hemiedrien festgestellt, so besteht die ganze Thätigkeit in Substituiren einfacher Zahlen. Lassen wir also $\pi = \nu$ werden, so kommt $\mu\nu\nu$ (122), weil μ nach einem größern a geht.

Pyramidenoktaeder $\mu\nu\nu = 122$.

$$\frac{\mu\nu\nu}{\nu\mu\nu} \ldots -\cos A = \frac{2\,\mu\nu + \nu^2}{\mu^2 + 2\,\nu^2} \ldots\ldots \tfrac{8}{9}.$$

$$\frac{\mu\nu\nu}{\mu\nu\nu} \ldots -\cos B = \frac{\mu^2 + 2\,\nu^2}{\mu^2 + 2\,\nu^2} \ldots\ldots 1.$$

$$\frac{\mu\nu\nu}{\bar{\mu}\nu\nu} \ldots -\cos C = \frac{-\mu^2 + 2\nu^2}{\mu^2 + 2\,\nu^2} \ldots\ldots \tfrac{7}{9}.$$

$$\frac{\mu\nu\nu}{\bar{\nu}\mu\nu} \ldots -\cos D = \frac{-2\,\mu\nu + \nu^2}{\mu^2 + 2\,\nu^2} \ldots 0.$$

Die 1 zeigt 180° und 0 dagegen 90° an für den besondern Körper 122, wie wir oben sahen. In 180° liegt der Beweis, daß die gebrochene Würfelkante B verschwinde. Wir bekommen statt der Dreikantner- eine Rhomboeder-Ecke. Setzen wir in cos F der Pyritoedrie $\pi = \nu$, so kommt für cos A dieselbe Formel, wie hier. Es gilt das auch für die rhomboedrische Ecke der Gyroedrie, weil das eine allgemeine Eigenschaft des Dreikantners ist. Setzten wir dagegen $\nu = \mu$, so käme $\mu\mu\pi = 113$, wir wollen aber als Zahlenbeispiel das gewöhnliche

Leucitoeder $\mu\mu\pi = 112$ nehmen.

$$\frac{\mu\mu\pi}{\mu\mu\pi} \ldots -\cos A = \frac{2\,\mu^2 + \pi^2}{2\,\mu^2 + \pi^2} \ldots 1.$$

$$\frac{\mu\mu\pi}{\mu\pi\mu} \ldots -\cos B = \frac{2\,\mu\pi + \mu^2}{2\,\mu^2 + \pi^2} \ldots \tfrac{5}{6}.$$

$$\frac{\mu\mu\pi}{\underline{\mu}\mu\pi} \ldots -\cos C = \frac{\pi^2}{2\,\mu^2 + \pi^2} \ldots \tfrac{4}{6}.$$

$$\frac{\mu\mu\pi}{\underline{\mu}\underline{\mu}\pi} \ldots -\cos D = \frac{-2\mu^2 + \pi^2}{2\,\mu^2 + \pi^2} \ldots \tfrac{2}{6}.$$

Hier fällt also die Granatoederkante A weg. Setzen wir dagegen $\mu = 0$, so kommt $0\nu\pi = 023$. Als Zahlencontrole wählen wir statt dessen 012, so kommt

Pyramidenwürfel $0\nu\pi = 012$.

$$\frac{0\nu\pi}{\nu 0\pi} \ldots -\cos A = \frac{\pi^2}{\nu^2 + \pi^2} \ldots \tfrac{4}{5}.$$

$$\frac{0\nu\pi}{0\pi\nu} \ldots -\cos B = \frac{2\,\nu\pi}{\nu^2 + \pi^2} \ldots \tfrac{4}{5}.$$

$$\frac{0\nu\pi}{0\nu\pi} \ldots -\cos C = 1 = 180^0.$$

$$\frac{0\nu\pi}{\underline{\nu}0\pi} \ldots -\cos D = \frac{\pi^2}{\nu^2 + \pi^2} \ldots \tfrac{4}{5}.$$

$$\frac{0\nu\pi}{0\underline{\nu}\pi} \ldots -\cos E = \frac{-\nu^2 + \pi^2}{\nu^2 + \pi^2} \ldots \tfrac{3}{5}.$$

$$\frac{0\nu\pi}{\pi 0\nu} \ldots -\cos F = \frac{\nu\pi}{\pi^2 + \nu^2} \ldots \tfrac{2}{5}.$$

$$\frac{0\nu\pi}{0\pi\nu} \ldots -\cos G = \frac{2\,\nu\pi}{\pi^2 + \nu^2} \ldots \tfrac{4}{5}.$$

$$\frac{0\nu\pi}{\underline{\nu}0\pi} \ldots -\cos H = \frac{\pi^2}{\pi^2 + \nu^2} \ldots \tfrac{4}{5}.$$

$$\frac{0\nu\pi}{\pi 0\nu} \ldots -\cos J = \frac{\pi\nu}{\pi^2 + \nu^2} \ldots \tfrac{2}{5}.$$

$$\frac{0\nu\pi}{0\underline{\nu}\pi} \ldots -\cos K = \frac{\pi^2 - \nu^2}{\pi^2 + \nu^2} \ldots \tfrac{3}{5}.$$

Der Winkel C fällt also weg. Das Gyroeder GH fällt mit dem Pyramidenwürfel zusammen; das Tetartoeder mit dem Pyritoeder, denn man kann ja den Pyramidenwürfel wie ein gebrochenes Pyramidentetraeder ansehen.

Die **Granatoederkante** $-\cos A = \frac{1}{2}$ ergibt sich aus dem Pyramidenwürfel, wenn wir $\pi = \nu$ setzen. Eben so aus dem Pyramidengranatoeder, wenn wir außerdem noch $\mu = 0$ annehmen. Im Pyra-

midenoktaeder dürfen wir nur $\mu = 0$ machen. Es dividirt sich dann immer π^2 weg.

Die **Oktaederkante** — $\cos C = \frac{1}{3}$ folgt für $\mu = \nu = \pi$ aus den entsprechenden Formeln des Pyramidengranatoeders, Pyramidenoktaeders und Leucitoeders.

Die **Würfelkante** — $\cos B = 0$ folgt auf dieselbe Weise, wenn man $\nu = \pi = 0$ in den entsprechenden Kanten nimmt. Damit ist zugleich der Weiß'sche Ausdruck Granatoeder-, Würfel- und Oktaederkante gerechtfertigt.

Wenn die Symbole $\frac{1}{\mu}\ \frac{1}{\nu}\ \frac{1}{\pi}$ gegeben sind, so finden wir auf die angegebene Weise die Winkel leicht. Jetzt müssen wir aber auch umgekehrt aus den gemessenen Winkeln A bis K die Symbole, oder was dasselbe, die Indices $\mu\nu\pi$ finden. Also:

Aus den gemessenen Winkeln die Indices zu finden.

An den Flußspathwürfeln der Wilden Schappach und im Münsterthale (Schwarzwald) sowie in Cumberland und Derbyshire werden gar gern die Ecken sechsflächig, also durch einen Achtundvierzigflächner zugeschärft. Da das Flußspathoktaeder sehr blättrig ist, so kann man die Ecken leicht absprengen und messen. Wir dürfen die Axen abc nur mit der allgemeinen Figur parallel stellen, um sogleich die Ausdrücke hinzuschreiben, nemlich:

$$\frac{\mu\nu\pi}{\nu\mu\pi} \ldots \cos A = \frac{2\,\mu\nu + \pi^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} = 17 . 45 \ldots \text{num. } \tfrac{20}{21}.$$

$$\frac{\mu\nu\pi}{\mu\pi\nu} \ldots \cos B = \frac{2\,\nu\pi + \mu^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} = 35 . 57 \ldots \text{num. } \tfrac{17}{21}.$$

Die Zahlen gelten für die Schwarzwälder, deren Winkel

A = 162 . 15 und B = 144 . 3

betragen. Nun ist

l cos 17 . 45 = 9,9788175 num. 0,95240 und
l cos 35 . 57 = 9,9082327 num. 0,80953.

Verwandle ich die Decimalbrüche durch Kettenbruchrechnung in Näherungsbrüche, so ist

```
                                      1  20
9524,10000|1                       0 | 1  20
     9524|                         ─ | ─  ──
    476 |9524|20                   1 | 1  21
          952
          ───
            4
```

```
80953,100000|1
      80953|
      19047,80953|4
            76188
             4765,19047|4
                  19060
```

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 4 & 4 \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{4}{5} & \frac{17}{21}. \end{array}$$

Daher $\cos A = \frac{20}{21}$ und $\cos B = \frac{17}{21}$. Folglich haben wir:

$$21 = \mu^2 + \nu^2 + \pi^2$$
$$17 = \mu^2 + 2\,\nu\pi$$
$$20 = 2\,\mu\nu + \pi^2$$

$$21 - 17 = 4 = \nu^2 + \pi^2 - 2\nu\pi = (\nu - \pi)^2,\ 2 = \pi - \nu;$$
$$21 - 20 = 1 = \mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu = (\mu - \nu)^2,\ 1 = \nu - \mu;$$
folglich $\ldots\ 2 + 1 = 3 = \pi - \mu;$
$$3^2 = 9 = (\pi - \mu)^2 = \mu^2 + \pi^2 - 2\,\mu\pi,$$
$$21 - 9 = 12 = \nu^2 + 2\,\mu\pi$$
$$20 + 17 + 12 = 49 = (\mu + \nu + \pi)^2\ ..\ 7 = \mu + \nu + \pi.$$

Daraus folgt: $7 + 3 = 10 = \nu + 2\,\pi$
$$10 + 2 = 12 = \nu + 2\,\pi + (\pi - \nu) = 3\,\pi,$$
d. h. $\pi = 4$; folglich $\nu = 2$ und $\mu = 1$.

Die Zahlen $124 = \mu\nu\pi$ genügen obigen Ausdrücken. Nach diesem Schema findet man alle.

Da wir es bei solchen Rechnungen mit Wurzeln und quadratischen Gleichungen zu thun haben, so sind mehrere Lösungen möglich. Denn schon der ersten abgeleiteten Gleichung

$4 = \nu^2 + \pi^2 - 2\,\nu\pi$ kann in zweierlei Weise genügt werden:
$$4 = (\pi - \nu)^2 \text{ oder } 4 = (\nu - \pi)^2.$$

Eben so ist
$$1 = \mu^2 + \nu^2 - 2\,\mu\nu = (\nu - \mu)^2 \text{ oder } (\mu - \nu)^2.$$

Setzen wir jetzt den zweiten Fall, so ist
$$2 = \nu - \pi$$
$$1 = \mu - \nu$$
folglich $3 = \mu - \pi$. Da nun

$3^2 = 9 = (\mu - \pi)^2 = (\pi - \mu)^2 = \mu^2 + \pi^2 - 2\,\mu\pi$ bleibt, so folgt vor wie nach

$$7 = \mu + \nu + \pi$$
$$7 + 3 = 10 = 2\,\mu + \nu$$
$$1 = \mu - \nu$$

gibt $10 + 1 = 11 = 3\,\mu$, oder $\mu = \frac{11}{3}$,

folglich $\nu = \mu - 1 = \frac{8}{3}$ und $\pi = \nu - 2 = \frac{2}{3}$.

Es müssen daher $\mu\nu\pi = \frac{11}{3}\frac{8}{3}\frac{2}{3} = 11\ 8\ 2$ den Gleichungen

$$\cos A = \frac{2\mu\nu + \pi^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} = \frac{2.11.8 + 2^2}{11^2 + 8^2 + 2^2} = \frac{180}{189} = \frac{20}{21}$$

$$\cos B = \frac{2\nu\pi + \mu^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} = \frac{2.8.2 + 11^2}{11^2 + 8^2 + 2^2} = \frac{153}{189} = \frac{17}{21}$$

ebenfalls genügen. Ja es kämen sogar irrationale Ausdrücke, wenn wir setzen würden

$$\begin{array}{r} 2 = \nu - \pi \\ 1 = \nu - \mu \\ \hline 2 - 1 = 1 = \mu - \pi \\ 1^2 = 1 = \mu^2 + \pi^2 - 2\mu\pi \\ 21 = \mu^2 + \pi^2 + \nu^2 \\ \hline 21 - 1 = 20 = \nu^2 + 2\mu\pi \\ 17 = \mu^2 + 2\nu\pi \\ 20 = \pi^2 + 2\mu\nu \\ \hline \sqrt{57} = \mu + \nu + \pi. \end{array}$$

Daraus folgten $\mu = \sqrt{57}$, $\nu = \sqrt{57} + 3$, $\pi = \sqrt{57} - 3$, welche ebenfalls genügten. Hätten wir Zonen oder noch einen dritten Winkel gemessen, so würden diese Zweideutigkeiten sofort gehoben. Denn wir können von den drei Winkeln ABC drei Mal je zwei herausgreifen. Wir haben den ungünstigsten Fall AB gelöst. Wäre $C = 154.47$ gegeben, so käme $\cos 25.13 = \cos C = \frac{-\mu^2 + \nu^2 + \pi^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2} = \frac{19}{21}$ und wir hätten für BC

$$\begin{array}{l} 21 = \mu^2 + \nu^2 + \pi^2 \\ 19 = -\mu^2 + \nu^2 + \pi^2 \\ 17 = 2\nu\pi + \mu^2 \\ \hline 21 - 19 = 2 = 2\mu^2,\ \mu = 1 \\ 21 - 1^2 = 20 = \nu^2 + \pi^2 \text{ und } 17 - 1^2 = 16 = 2\nu\pi \\ 20 + 16 = 36 = (\nu + \pi)^2,\ 6 = \nu + \pi; \\ 20 - 16 = 4 = (\pi - \nu)^2,\ 2 = \pi - \nu; \end{array}$$

gibt $\nu = 2$ und $\pi = 4$. Hier findet keine Zweideutigkeit mehr statt, denn würden wir $2 = \nu - \pi$ setzen, so vertauschten ν und π blos ihre Zahlen.

Für AC wird die Rechnung am einfachsten, denn wir haben

$$\begin{array}{l} 19 = -\mu^2 + \nu^2 + \pi^2 \\ 20 = 2\mu\nu + \pi^2 \\ 21 = \mu^2 + \nu^2 + \pi^2 \\ \hline 21 - 19 = 2 = 2\mu^2,\ \mu = 1, \text{ folglich} \\ 19 = -1 + \nu^2 + \pi^2 \text{ oder } 20 = \nu^2 + \pi^2 = 2\mu\nu + \pi^2 = 2\nu + \pi^2 \\ \nu^2 = 2\mu\nu = 2\nu \text{ oder } \nu = 2 \text{ und } \pi = 4. \end{array}$$

Zu Cumberland beträgt Winkel

$$A = 158 . 47 \ldots \cos 21 . 13 = 0{,}93222 = \tfrac{55}{59}$$

$$B = 136 . 47 \ldots \cos 43 . 13 = 0{,}72877 = \tfrac{43}{59}.$$ Also

$$59 = \mu^2 + \nu^2 + \pi^2$$
$$55 = 2\mu\nu + \pi^2$$
$$43 = 2\nu\pi + \mu^2$$

$$59 - 55 = 4 = \mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu = (\nu - \mu)^2, \; 2 = \nu - \mu$$
$$59 - 43 = 16 = \nu^2 + \pi^2 - 2\mu\nu = (\pi - \nu)^2, \; 4 = \pi - \nu$$
$$4 + 2 = \pi - \mu = 6$$
$$36 = \mu^2 + \pi^2 - 2\mu\pi = (\pi - \mu)^2,$$
$$59 - 36 = 23 = \nu^2 + 2\mu\pi.$$ Folglich
$$55 + 43 + 23 = 121 = 11^2 = (\mu + \nu + \pi)^2, \; 11 = \mu + \nu + \pi$$
$$2 = \nu - \mu$$
$$9 = 2\mu + \pi$$
$$6 = -\mu + \pi$$
$$3 = 3\mu, \mu = 1,$$
daher $\nu = 3$ und $\pi = 7$.

Fläche 137 genügt den Ausdrücken. Würden wir

$$2 = \mu - \nu, \; 4 = \nu - \pi \text{ und } 6 = \mu - \pi$$

gesetzt haben, so käme $\mu = \frac{19}{3}$, $\nu = \frac{13}{3}$, $\pi = \frac{1}{3}$, folglich genügen auch die Zahlen 19 . 13 . 1.

Für Pyramidenoktaeder, Leucitoeder und Pyramidenwürfel braucht man nur einen Winkel. Auch hier ist derjenige am bequemsten, welcher durch Subtraction oder Addition der Zähler und Nenner gleich einen Index gibt. Hätten wir am

Pyramidenoktaeder $\mu\nu\nu = 122$ den Oktaederwinkel gemessen,

$$\frac{\mu\nu\nu}{\mu\nu\nu} \ldots \cos C = \frac{2\nu^2 - \mu^2}{2\nu^2 + \mu^2} = \tfrac{7}{9},$$ so gibt die

Summe $9 + 7 = 16 = 4\nu^2$, $\nu = 2$; und die

Differenz $9 - 7 = 2 = 2\mu^2$, $\mu = 1$,

so wären die Indices gleich gefunden. Dagegen müssen wir für A eine leichte quadratische Gleichung lösen, nemlich:

$$\frac{\mu\nu\nu}{\nu\mu\nu} \ldots \cos A = \frac{\nu^2 + 2\mu\nu}{\mu^2 + 2\nu^2} = \tfrac{8}{9} \text{ gibt}$$

$$9 - 8 = 1 = \mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu = (\mu - \nu)^2, \; 1 = \nu - \mu \text{ oder } \nu = \mu + 1$$
$$9 + 8 = 17 = \mu^2 + 3\nu^2 + 2\mu\nu = \mu^2 + 3(\mu + 1)^2 + 2\mu(\mu + 1)$$
$$17 = \mu^2 + 3\mu^2 + 3 + 6\mu + 2\mu^2 + 2\mu$$
$$14 = 6\mu^2 + 8\mu \text{ oder } \tfrac{7}{3} = \mu^2 + \tfrac{4}{3}\mu,$$
$$\mu = -\tfrac{2}{3} + \sqrt{\tfrac{4}{9} + \tfrac{7}{3}} = -\tfrac{2}{3} + \tfrac{5}{3} = 1.$$

Leucitoeder $\mu\mu\pi = 112$ gibt

$$\frac{\mu\mu\pi}{\mu\pi\mu} \ldots \cos B = \frac{\mu^2 + 2\mu\pi}{2\mu^2 + \pi^2} = \tfrac{5}{6},$$

$$6-5= \ 1=\mu^2+\pi^2-2\mu\pi=(\pi-\mu)^2, \ \pi=1+\mu.$$
$$6+5=11=3\mu^2+\pi^2+2\mu\pi$$
$$12=4\mu^2+2\pi^2 \text{ oder } 6=2\mu^2+\pi^2=2\mu^2+\mu^2+1+2\mu$$
$$\tfrac{5}{3}=\mu^2+\tfrac{2}{3}\mu, \ \mu=-\tfrac{1}{3}+\sqrt{\tfrac{1}{9}+\tfrac{5}{3}}=1, \text{ daher } \pi=2.$$

Dagegen bekommen wir aus C,D sofort die Zahlen. Denn es ist z. B.

$$\frac{\mu\mu\pi}{\mu\mu\pi} \ldots \cos C = \frac{\pi^2}{2\mu^2+\pi^2} = \tfrac{4}{6}, \text{ daher}$$
$$6-4 = \ 2 = 2\mu^2 \text{ oder } \mu = 1.$$
$$6+4 = 10 = 2\mu^2 + 2\pi^2 = 2 + 2\pi^2, 4 = \pi^2, \pi = 2.$$

Wäre am **gebrochenen Pyritoeder** 123 Winkel C und E gegeben, so folgte aus

$$\frac{\mu\nu\pi}{\mu\nu\pi} \ldots \cos C = \frac{-\mu^2+\nu^2+\pi^2}{\mu^2+\nu^2+\pi^2} = \frac{12}{14}.$$
$$14-12 = 2 = 2\mu^2, \ 1 = \mu. \text{ Ebenso aus}$$
$$\frac{\mu\nu\pi}{\mu\nu\pi} \ldots \cos E = \frac{\mu^2-\nu^2+\pi^2}{\mu^2+\nu^2+\pi^2} = \frac{6}{14}$$
$$14-6 = 8 = 2\nu^2, \ 2 = \nu, \text{ also } \pi = 3.$$

Nicht so leicht ergeben sich die Indices aus E und F pag. 232. Wir haben dann wieder

$$\cos E = \frac{6}{14} = \frac{\mu^2-\nu^2+\pi^2}{\mu^2+\nu^2+\pi^2}$$
$$14-6 = 8 = 2\nu^2, \text{ gibt } \nu = 2, \text{ folglich}$$
$$\tfrac{1}{2}(14+6) = 10 = \mu^2+\pi^2.$$
$$\cos F \text{ gibt } 11 = \mu\pi + \mu\nu + \nu\pi = \pi(\mu+2) + 2\mu$$
$$10+2.11+4 = 36 = \mu^2+\pi^2+2\pi(\mu+2)+4\mu+4 = 36$$
$$\mu(\mu+2)+2(\mu+2)+2\pi(\mu+2)+\pi^2 = 36$$
$$(\mu+2)^2+2\pi(\mu+2)+\pi^2 = (\mu+\pi+2)^2 = 36$$
$$\mu+\pi+2 = 6, \ \mu+\pi = 4.$$
$$\pi = 4-\mu, \text{ folglich}$$
$$10 = \mu^2+(4-\mu)^2 = 2\mu^2+16-8\mu$$
$$-6 = 2\mu^2-8\mu, \ \mu^2-4\mu = -3$$
$$\mu = +2-\sqrt{4-3} = 1, \text{ folglich } \pi = 3.$$

Wäre am Tetartoeder 123 Winkel J und K gegeben, so hätten wir nach pag. 232

$$\mu^2+\nu^2+\pi^2 = 14$$
$$\pi^2-\nu^2-\mu^2 = \ 4$$
$$14+4 = 2\pi^2 = 18, \ \pi = 3$$
$$14-4 = 2\mu^2+2\nu^2 = 10, \ \mu^2+\nu^2 = 5$$
$$-\mu\nu-\mu\pi+\nu\pi = 1, \text{ folglich}$$
$$14+2.1 = \mu^2+\nu^2+\pi^2-2\mu\nu-2\mu\pi+2\nu\pi = 16$$
$$(-\mu+\nu+\pi)^2 = 16, \ -\mu+\nu+\pi = 4, \ \nu = \mu+1$$

$(\mu + 1)^2 + \mu^2 = 5$

$\mu^2 + \mu = 2, \ \mu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1.$

Diese Beispiele einfacher Rechenexempel mögen genügen.

Rechnung mit zweierlei Körpern $\mu\nu\pi$ und $\mu_,\nu_,\pi_,$.

Bleiben wir immer bei unserer fixirten Fläche $\mu\nu\pi = 123$ stehen, und suchen den Schnitt mit $\mu_,\nu_,\pi_, = 124$, so ist

$$\frac{\mu\nu\pi}{\mu_,\nu_,\pi_,} = \frac{123}{124} \ldots - \cos = \mu\mu_, + \nu\nu_, + \pi\pi_, : \sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2}\ \sqrt{\mu_,^2+\nu_,^2+\pi_,^2}$$
$$= 1+4+12 : \sqrt{1^2+2^2+3^2}\ \sqrt{1^2+2^2+4^2} = 17 : \sqrt{14.21}.$$

Wir könnten nun sofort alle übrigen 23 Winkel wieder hinschreiben, und brauchten dabei nur die Indices gestrichelt zu denken. Käme z. B. $\mu\nu\pi$ mit $\nu_,\pi_,\mu_,$ d. h. mit $\frac{1}{2}a : \frac{1}{4}b' : c$ zum Schnitt, so wäre

$$\frac{\nu_,\pi_,\mu_,}{\mu\nu\pi} = \frac{241}{123} \ldots - \cos = 2-8+3 : \sqrt{14.21} = -3 : 7\sqrt{6} = -\tfrac{3}{7}\sqrt{\tfrac{1}{6}}.$$

Fläche $\mu\nu\pi$ mit der anliegenden $\nu_,\mu_,\pi_,$ gäbe

$$\frac{\mu\nu\pi}{\nu_,\mu_,\pi_,} = \frac{123}{214} \ldots - \cos = 2+2+12 : \sqrt{14.21} = 16 : 7\sqrt{6}.$$

Würde Fläche $\nu_,\mu_,\pi_,$ zum **Pyramidenoktaeder** $\nu_,\mu_,\nu_, = 212$, so käme

$$\frac{\mu\nu\pi}{\nu_,\mu_,\nu_,} \ldots - \cos = \mu_,\nu + \nu_,(\mu+\pi) : \sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2}\ \sqrt{\mu_,^2+2\nu_,^2}$$
$$= 1.2+2(1+3) : \sqrt{14}\ \sqrt{1+8} = 8 : 3\sqrt{14};$$

zum **Leucitoeder** $\mu_,\mu_,\pi_, = 112$, käme

$$\frac{\mu\nu\pi}{\mu_,\mu_,\pi_,} \ldots - \cos = \mu_,(\mu+\nu) + \pi\pi_, : \sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2}\ \sqrt{2\mu_,^2+\pi_,^2}$$
$$= 1.(1+2) + 2.3 : \sqrt{14}\ \sqrt{2+4} = 7 : \sqrt{14.6};$$

zum **Pyramidenwürfel** $\mu_,0\pi_, = 102$, käme

$$\frac{\mu\nu\pi}{\mu_,0\pi_,} \ldots - \cos = \mu\mu_, + \pi\pi_, : \sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2}\ \sqrt{\mu_,^2+\pi_,^2}$$
$$= 1.1+2.3 : \sqrt{14}\ \sqrt{1+4} = 7 : \sqrt{14.5}.$$

Es bleiben nur noch die Neigungen gegen

Oktaeder, wo $\mu_,\nu_,\pi_,$ in $\pi_,\pi_,\pi_,$ übergeht, also

$$\frac{\mu\nu\pi}{\pi_,\pi_,\pi_,} \ldots - \cos = (\mu+\nu+\pi)\pi_, : \sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2}\ \sqrt{3.\pi_,^2},$$
$$\cos^2 = \frac{(\mu+\nu+\pi)^2}{3(\mu^2+\nu^2+\pi)^2}.$$

Für **Granatoeder** geht $\nu_,\mu_,\pi_,$ über in $\pi_,0\pi_, = c : a : \infty b$, folglich

$$\frac{\mu\nu\pi}{\pi_,0\pi_,} \ldots - \cos = (\mu+\pi)\pi_, : \sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2}\ \sqrt{\pi_,^2+\pi_,^2},$$
$$\cos^2 = \frac{(\mu+\pi)^2}{2(\mu^2+\nu^2+\pi^2)}.$$

Für Würfel geht $\nu,\mu,\pi,$ über in $00\pi, = c : \infty a : \infty b$, folglich

$$\frac{\mu\nu\pi}{00\pi,} \ldots - \cos = \pi\pi, : \sqrt{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2}\ \sqrt{\pi,^2}$$

$$\cos^2 = \frac{\pi^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2}.$$

Das Rechnen mit den Indices $\mu\nu\pi$ ist ein einfacher Weg, aber er paßt nicht so unmittelbar zur Linearprojection, die man zur vollständigen Einsicht der Zonen nicht entbehren kann. Hier wird ein für allemal $c = 1$ gesetzt, und der Werth der andern Ausdrücke von den Axen ab abgelesen:

$$- \cos = \mu\mu, + \nu\nu, + 1 : \sqrt{\mu^2 + \nu^2 + 1}\ \sqrt{\mu,^2 + \nu,^2 + 1}.$$

Halten wir unsere

$$\text{Fläche}\ \mu\nu\pi = 123 = a : \frac{b}{2} : \frac{c}{3} = 3a : \tfrac{3}{2}b : 1$$

fest, so macht dieselbe mit

$$\mu,\nu,\pi, = 124 = a : \frac{b}{2} : \frac{c}{4} = 4a : 2b : c \text{ den Winkel}$$

$$- \cos = \tfrac{1}{3} . \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3} . \tfrac{1}{2} + 1 : \sqrt{\tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9} + 1}\ \sqrt{\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{4} + 1}$$
$$= \tfrac{1}{12} + \tfrac{4}{12} + \tfrac{12}{12} : \tfrac{1}{3} . \tfrac{1}{4} \sqrt{14 . 21} = 17 : \sqrt{14 . 21},$$

weil $\mu = \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{2}{3}$; $\mu, = \frac{1}{4}$, $\nu, = \frac{1}{2}$ zu setzen ist.

Für $\nu,\mu,\pi, = 214 = \frac{a}{2} : b : \frac{c}{4} = 2a : 4b : c$ kommt

$$- \cos = \tfrac{1}{3} . \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} . \tfrac{1}{4} + 1 : \tfrac{1}{3} \sqrt{14}\ \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + 1}$$
$$= \tfrac{2}{12} + \tfrac{2}{12} + \tfrac{12}{12} : \tfrac{1}{12} \sqrt{14 . 21} = 16 : 7 \sqrt{6}.$$

Pyramidenoktaeder $c : a : 2b$ gibt

$$- \cos = \tfrac{1}{3} . 1 + \tfrac{2}{3} . \tfrac{1}{2} + 1 : \tfrac{1}{3} \sqrt{14}\ \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} + 1}$$
$$= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{3} : \tfrac{1}{2} \sqrt{14} = 5 : \tfrac{3}{2} \sqrt{14}.$$

Leucitoeder $c : 2a : 2b$ gibt

$$- \cos = \tfrac{1}{3} . \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} . \tfrac{1}{2} + 1 : \tfrac{1}{3} \sqrt{14}\ \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + 1}$$
$$= \tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{6} + \tfrac{6}{6} : \tfrac{1}{6} \sqrt{14 . 6} = 9 : 2 \sqrt{21}.$$

Pyramidenwürfel $c : 2a : \infty b$ gibt

$$- \cos = \tfrac{1}{3} . \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} . 0 + 1 : \tfrac{1}{3} \sqrt{14}\ \sqrt{\tfrac{1}{4} + 1}$$
$$= \tfrac{1}{6} + \tfrac{6}{6} : \tfrac{1}{6} \sqrt{14 . 5} = 7 : \sqrt{14 . 5}.$$

Oktaeder $c : a : b$

$$- \cos = \tfrac{1}{3} . 1 + \tfrac{2}{3} . 1 + 1 : \tfrac{1}{3} \sqrt{14}\ \sqrt{1 + 1 + 1}$$
$$= \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{3} : \tfrac{1}{3} \sqrt{14 . 3} = 6 : \sqrt{42}.$$

Granatoeder $c : a : \infty b$

$$- \cos = \tfrac{1}{3} . 1 + \tfrac{2}{3} . 0 + 1 : \tfrac{1}{3} \sqrt{14}\ \sqrt{1 + 1}$$
$$= \tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{3} : \tfrac{1}{3} \sqrt{2 . 14} = 2 : \sqrt{7}.$$

Würfel $c : \infty a : \infty b$

$$- \cos = \tfrac{1}{3} . 0 + \tfrac{2}{3} . 0 + 1 : \tfrac{1}{3} \sqrt{14}\ \sqrt{1} = 1 : \tfrac{1}{3} \sqrt{14}.$$

Neigung gegen Mittelpunktsebenen.

Da die Winkel der regulären Körper durch die Mittelpunktsebenen häufig halbirt werden, so hat es Weiß vorgezogen, nur diese Winkel zu suchen. Wir wenden dabei die Formel pag. 210 an:

$$-\cos\frac{\omega}{2} = \mu b^2 - \nu a^2 : \sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}\ \sqrt{a^2 + b^2},$$

gibt für $a = b = 1$

$$-\cos\frac{\omega}{2} = \mu - \nu : \sqrt{2}\ \sqrt{1 + \mu^2 + \nu^2}.$$

Es ist die Neigung der Ebene eines 48flächner $\mu\nu 1$ gegen eine Granatoederfläche 110, die, wenn wir mit minus wegdividiren, allgemein lautet

$$\cos\frac{\omega}{2} = \nu - \mu : \sqrt{2(\mu^2 + \nu^2 + \pi^2)}.$$

Sie folgt auch unmittelbar aus der Neigung von $\mu\nu\pi$ zu $0\bar{1}1$, woraus sich das negative Zeichen $(-\nu)$ erklärt. Wird darin $\nu = 0$, d. h. geht die Kantenzonenlinie in die Axenlinie aa' über, so kommt

$\cos\frac{\omega}{2} = \mu : \sqrt{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2}$, die Neigung einer Fläche $\mu\nu\pi$ gegen die Axenebene ac.

Suchen wir jetzt beispielsweise den Winkel A pag. 232 des Pyramidengranatoeders 123, so haben wir

$$\frac{\mu\nu\pi}{110} \ldots \cos\tfrac{1}{2}A = 2 - 1 : \sqrt{2(14)} = \sqrt{\tfrac{1}{28}} \ldots 79^0\ 6'\ 24''.$$

$$\frac{\mu\nu\pi}{\bar{1}10} = \frac{\nu\pi\mu}{\bar{1}10} \ldots \cos\tfrac{1}{2}B = 3 - 2 : \sqrt{2(14)} = \sqrt{\tfrac{1}{28}} \ldots 79 . 6 . 24.$$

$$\frac{\mu\nu\pi}{100} \ldots \cos\tfrac{1}{2}C = 1 : \sqrt{14} = \sqrt{\tfrac{1}{14}} \ldots\ldots 74 . 29 . 55.$$

Dieß ist unbedingt der einfachste Weg. Da der halbe Winkel kleiner als ein Rechter sein muß, so braucht man sich um das $\pm$ Vorzeichen des Cos. nicht zu kümmern.

Berechnung der Seiten (Ebenen Winkel).

$\cos = mm, + nn, + pp, : \sqrt{m^2+n^2+p^2}\ \sqrt{m,^2+n,^2+p,^2}$. Für $p = p, = 1$
$\cos = mm, + nn, + 1 : \sqrt{m^2+n^2+1}\ \sqrt{m,^2+n,^2+1}$.

m und n drücken in der Linearprojection die Coordinaten der Fußpunkte von den Zonenaxen aus. Die Coordinaten in der Projectionsebene haben immer die Form $\frac{ma}{p} + \frac{nb}{p}$, wobei die dritte Dimension $c = 1$ gedacht wird. Wir können daher, um nicht mit Brüchen

zu rechnen, sogleich den Ausdruck in $ma + nb + pc$ umsetzen. Suchten wir z. B. den Winkel, welchen die Zonenaxe

$$c;\ \tfrac{9}{5} + \tfrac{3}{5} \text{ und } c;\ \tfrac{5}{4} + \tfrac{2}{4}$$

mit einander machten, so hätten wir mit Brüchen die etwas umständlichere Rechnung

$$\frac{\frac{9}{5}\ \frac{3}{5}}{\frac{5}{4}\ \frac{2}{4}} \ldots \cos = \tfrac{45}{20} + \tfrac{6}{20} + 1 : \sqrt{\tfrac{81}{25} + \tfrac{9}{25} + 1}\ \sqrt{\tfrac{25}{16} + \tfrac{4}{16} + 1}$$

$$= 71 : \sqrt{115\,.\,45}.$$

Mit ganzen Zahlen 935 und 524 kämen wir etwas schneller zum Ziele, nemlich

$$\frac{935}{524} \ldots \cos = 45 + 6 + 20 : \sqrt{81 + 9 + 25}\ \sqrt{25 + 4 + 16} = 71 : \sqrt{115\,.\,45}.$$

Der Grund ist leicht einzusehen. Man bekommt in den Rechnungen bald eine solche Uebung, daß man beides, Brüche oder ganze Zahlen, mit gleicher Leichtigkeit bemeistert. Das Rechnen in der Ebene und die vollständige Uebersicht in den Zonen hat eben auch seine Vortheile.

Oktaederkanten haben ihren Fußpunkt in

$$a \ldots 1 + 0 \text{ und } b \ldots 0 + 1, \text{ folglich}$$

$$\frac{1 + 0}{0 + 1} \ldots \cos = 0 + 0 + 1 : \sqrt{1 + 0 + 1}\ \sqrt{0 + 1 + 1} = \tfrac{1}{2} \ldots 60^0.$$

Granatoederkanten stehen in zwei anliegenden 1sten Kantenzonen, folglich

$$\frac{1 + 1}{1 - 1} \ldots \cos = 1 - 1 + 1 : \sqrt{1 + 1 + 1}\ \sqrt{1 + 1 + 1} = \tfrac{1}{3} \ldots 70.31.44.$$

Würfelkanten gehen den Axen parallel, daher

$$\frac{\infty + 0}{0 + \infty} \ldots \cos = 0\,.\,\infty + 0\,.\,\infty + 1 : \sqrt{\infty^2 + 0^2 + 1}\ \sqrt{\infty^2 + 0^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{\infty^2} = 0 \ldots 90^0.$$

Die Rechnung ist Spiel; nur die Anschauung macht Schwierigkeit: wir haben immer **eine** Fläche $123 = \frac{a}{1} : \frac{b}{2} : \frac{c}{3} = c : \frac{3}{2}b : 3a$ zu fixiren: wird diese **Pyramidenoktaeder** $c : b : 2a$, so ist ihr Kantenzonenpunkt $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, die Zonenaxe der von c aus nach diesem Kantenzonenpunkte strahlenden Pyramidenkante hat daher

$$c;\ \tfrac{2}{3}a + \tfrac{2}{3}b = 2a + 2b + 3c;$$

folglich die vom Axenpunkte b ausstrahlende Pyramidenkante

$$c;\ -a + \tfrac{3}{2}b = -2a + 3b + 2c,$$

und die von a ausstrahlende $c;\ \frac{3}{2}a - b = 3 - 2 + 2$, wozu es nicht einmal der Projection bedarf. Suchen wir nun auch gleich die Kanten des zugehörigen Deltoeder, so geht die von c strahlende gebrochene Tetraederkante $c;\ 2a' + 2b$, denn ihr Fußpunkt wird durch die der

Sectionslinien $a' : 2b'$ bestimmt; die von b strahlende

$$c;\ a + \tfrac{1}{2}b = 2a + b + 2c,$$

denn ihr Fußpunkt wird durch $\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}b'$ bestimmt. Alle diese Punkte liegen in der fixirten Sectionslinie $b : 2a$, und dürfen nur abgelesen werden. Wie die Projection zeigt, so handelt es sich dabei um sechs Flächen:

$$1)\ c : b : 2a\ ;\ 2)\ c : \bar{a} : 2b\ ;\ 3)\ c : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}b;$$
$$4)\ c : b : 2a'\ ;\ 5)\ c : a' : 2b'\ ;\ 6)\ c : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}b',$$

wovon die ersten drei in einem Octanten, die übrigen drei in je einem der andern Octanten liegen. Alles das kann man ohne Zeichen vom Körper ablesen, und wäre ein Anfänger nicht im Stande, den Fußpunkt der Zonenaxe in der Sectionslinie $b : 2a$ gleich zu finden, so darf er nur schnell die Zonenpunktformel pag. 188 anwenden, z. B. für die gebrochene Tetraederkante D durch Fläche $c : a' : 2b'$ erzeugt

$$\frac{\tfrac{1}{2}}{-1}\ \frac{1}{-\tfrac{1}{2}}\ \text{gibt}\ -\tfrac{3}{2}a + \tfrac{3}{2}b + \tfrac{3}{4}c = -2a + 2b,$$

und der Punkt liegt klar da. Wir haben also im gleichseitigen Dreiecke des Pyramidenoktaeders $2a : b$ die Winkel:

Oktaedereckenwinkel $\frac{223}{011}$ .... $\cos = 2 + 3 : \sqrt{4+4+9}\ \sqrt{1+1}$

$= \sqrt{\tfrac{25}{34}} \ldots 30 . 57 . 50.$

Würfeleckenwinkel $\frac{223}{\overline{2}32}$ ... $\cos = -4 + 6 + 6 : \sqrt{17}\ \sqrt{17}$

$= \tfrac{8}{17} \ldots\ 118 . 4 . 20.$

Deltoederwinkel in der gebrochenen

Tetraederkante $\frac{223}{\overline{2}21}$ ... $\cos = -4 + 4 + 3 : \sqrt{17}\ \sqrt{9}$

$= \sqrt{\tfrac{1}{17}} \ldots 75 . 57 . 50.$

Der Winkel in der Tetraederecke $\frac{\overline{2}21}{212}$ gibt $\cos = -4 + 2 + 2 = 0$, d. h. 90°.

Die Summe im Dreieck muß 2 R, im Deltoeder 4 R geben. Wenn die gegenüberliegenden Zonenaxen Diagonalen von Flächen sind, so kann man auch bequem deren Kantenwinkel finden. Es bilden z. B. die Zonenaxen $\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}$ vorn mit $-\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}$ hinten

$$\frac{223}{\overline{2}\overline{2}3} \ldots \cos = -4 - 4 + 9 : 4 + 4 + 9 = \tfrac{1}{17},$$

das gibt den Winkel, welchen eine Leucitoidfläche $\tfrac{4}{3}a : \tfrac{4}{3}b$ mit $\tfrac{4}{3}a' : \tfrac{4}{3}b'$ hinten machen würde.

Leucitoeder $c : 2a : 2b = 112$ hat in der

4gl. Ecke $\frac{oa+2b}{2a+ob}$ .. $\cos = 0 + 0 + 1 : \sqrt{4+1}\ \sqrt{4+1} = \tfrac{1}{5} = 0{,}2$..78.27.47

3gl. Ecke $\frac{3\bar{1}1}{\bar{1}31} \ldots \cos = -3-3+1 : 3^2+1+1 = -\frac{5}{11} \ldots 117.2.8$

2gl. Ecke $\frac{021}{3\bar{1}1} \ldots \cos = -2+1 : \sqrt{5}\ \sqrt{11} = -\sqrt{\frac{1}{55}} \ldots 82.15.2.$

Im zugehörigen **Pyramidentetraeder** haben die Seiten in den Tetraederecken

$\frac{3\bar{1}1}{\bar{\infty}\infty 1} \ldots \cos = -3\infty - \infty + 1 : \sqrt{11}\ \sqrt{2\infty^2} = -\sqrt{\frac{8}{11}} \ldots 31:28.56.$

Das negative Vorzeichen deutet auf das Supplement, welches durch die Verschiebung der Axe bei der Projection statt des wahren Winkels zum Vorschein kommt.

Pyramidenwürfel c : 2b : ∞a = 012 hat in der

4gl. Ecke $\frac{221}{2\bar{2}1} \ldots \cos = 1 : 4+4+1 = \frac{1}{9} = 0{,}1111 \ldots 83.37.14.$

3gl. Ecke $\frac{221}{\infty 01} \ldots \cos = 2\infty : \sqrt{4+4+1}\ \sqrt{\infty^2} = \frac{2}{3} \ldots 0{,}6666 \ldots 48.11.24.$

Im zugehörigen **Pyritoeder** haben die paarigen Seitenwinkel an der

Dachkante $\frac{\infty 0}{\frac{1}{2} . 2} \ldots \cos = \frac{1}{2}\infty : \sqrt{\infty^2}\ \sqrt{\frac{1}{4}+4+1}$

$= \sqrt{\frac{1}{21}} \ldots 102 . 36 . 16.$

3gl. Ecke $\frac{142}{\bar{4}21} \ldots \cos = -4+8+2 : 1+4^2+2^2$

$= \frac{2}{7} \ldots 106 . 36 . 3.$

unpaariger W. $\frac{421}{\bar{4}21} \ldots \cos = -16+4+1 : 4^2+2^2+1$

$= -\frac{11}{21} \ldots 121 . 35 . 18.$

Pyramidengranatoeder $\mu\nu\pi = 123 = \frac{a}{1} : \frac{b}{2} : \frac{c}{3} = c : \frac{3}{2}b : 3a$; Sectionslinie $\frac{3}{2}b : 3a$, in welcher die Fußpunkte aller Zonenaxen liegen. Wer die Punkte nicht unmittelbar abzulesen versteht, kann sich natürlich auch der Kugelbezeichnung pag. 226 bedienen, und damit die Fußpunkte ausrechnen. Aber Sehen ist leichter, als Rechnen. In der **holoedrischen**

4gl. Ecke A/C $\frac{111}{032} \ldots \cos = 3+2 : \sqrt{3}\ \sqrt{3^2+2^2}$

$= \sqrt{\frac{25}{39}} \ldots 36 . 48 . 31.$

3gl. Ecke A/B $\frac{111}{5\bar{1}1} \ldots \cos = 5-1+1 : \sqrt{3}\ \sqrt{5^2+1+1}$

$= \sqrt{\frac{25}{81}} \ldots 56 . 15 . 4.$

Denn $132 = a : \frac{b}{3} : \frac{c}{2} = c : \frac{2}{3}b : 2a$ ist die Sectionslinie $\frac{2}{3}b : 2a$ der mittlern Octantenfläche, welche in 5a — b schneidet.

2gl. Ecke B/C $\frac{5\bar{1}1}{032}$ ... $\cos = -3 + 2 : \sqrt{9+4}\ \sqrt{25+1+1}$

$= -\sqrt{\tfrac{1}{351}}$ ... 86 . 56 . 25,

negativ, weil in der Projection das Supplement auftritt. In der

Tetraedrie bleibt die dreigliedrige Ecke des Pyramidengranatoeders, dagegen kommen zwei neue Winkel hinzu, in der

Tetraederecke $\frac{5-1}{-3+3}$ ... $\cos = -15-3+1 : \sqrt{25+1+1}\sqrt{9+9+1}$

$= -\sqrt{\tfrac{289}{513}}$ ... 41 . 21 . 37.

2gl. Ecke $\frac{1+1}{-3+3}$ ... $\cos = -3+3+1 : \sqrt{3}\ \sqrt{3^2+3^2+1}$

$= \sqrt{\tfrac{1}{57}}$ ... 82 . 23 . 19.

Es kommt hier blos die Zonenaxe $3a' + 3b$ hinzu, welche sich durch die Ebene $\bar{2}\bar{1}3 = \frac{a'}{2} : b' : \frac{c}{3} = \frac{3}{2}a' : 3b' : c$, d. h. durch die Sectionslinie $3b' : \frac{3}{2}a'$ ergibt, was man eben immer nur ablesen darf. Die

Pyritoedrie gibt vier neue Winkel: von den Zonenaxen bleibt $C = \frac{\bar{1}23}{123} = \frac{3}{2}b + 0a$. Die gebrochene Würfelkante $E = \frac{123}{\underline{1}23} = 3a + 0b$ wird durch $1\bar{2}3 = a : \frac{b'}{2} : \frac{c}{3} = 3a : \frac{3}{2}b$ bestimmt. Es bleiben nur noch die beiden Rhomboederkanten

$F = \frac{123}{312} = \frac{a}{5} + \frac{7b}{5} = a + 7b : 5c$

$= (2 . 2 - 1 . 3)\,a + (3 . 3 - 1 . 2)\,b + (2 . 3 - 1 . 1)\,c$ und

$F = \frac{123}{231} = 7a' + 5b = (1 . 2 - 3 . 3)\,a + (2 . 3 - 1 . 1)\,b + (2 . 2 - 1 . 3)\,c.$

Es muß bei der Rechnung sorgfältig auf das Vorzeichen gesehen werden, wodurch leicht Irrungen entstehen könnten, die sich jedoch durch einen Blick auf die allgemeine Projectionsfigur sofort heben. Darnach ist in der

C/E 2gl. Ecke $\frac{032}{301}$ ... $\cos = 2 : \sqrt{13 . 10} = \sqrt{\tfrac{2}{65}}$ .... 79 . 53 . 50.

C/F 2+1gl. scharf $\frac{032}{\underline{7}51}$ ... $\cos = 17 : \sqrt{13}\ \sqrt{49+25+1}$

$= \sqrt{\tfrac{289}{975}}$ .... 57 . 0 . 50.

E/F 2+1gl. stumpf $\frac{301}{175}$ ... $\cos = 8 : \sqrt{10}\ \sqrt{75}$

$= \sqrt{\tfrac{64}{750}}$ ... 106 . 59 . 6.

F/F 3gl. Ecke $\frac{175}{\underline{7}51}$ ... $\cos = -7+35+5 : 75 = \tfrac{33}{75}$ ... 116 . 6 . 14.

$360^0 = 4\,R.$

Das **Gyroeder** 123 hat in seinen fünf ebenen Winkeln nur einen in der Rhomboederecke 116 . 6 . 14 mit dem gebrochenen Pyritoeder gemein, denn die Zonenaxen F sind $\frac{123}{312} = 175$ und $\frac{123}{231} = \bar{7}51$. Die Dachkante G fällt mit der des Granatoeders $1 + 1 = \frac{123}{\underline{1}32}$, d. h. mit Schnitt der Sectionslinie $3a : \frac{3}{2}b$ und $2a' : \frac{2}{3}b$ zusammen. Es bleiben noch die von Axe c strahlenden Kanten H

$$\frac{123}{2\underline{1}3} = \tfrac{9}{5}a + \tfrac{3}{5}b \text{ und } \frac{123}{\underline{2}13} = \tfrac{3}{5}a' + \tfrac{9}{5}b,$$

welche einem Zwischenoktaeder angehören, und darnach leicht auf der Projectionsebene gefunden werden. Wir haben daher 116 . 6 . 14

$$G/H \; \frac{111}{\underline{3}95} = -3+9+5 : \sqrt{3}\;\sqrt{9+81+25} = 11 : \sqrt{3 . 115}$$
$$= \sqrt{\tfrac{121}{345}} \;\ldots\; 126 . 18 . 51$$

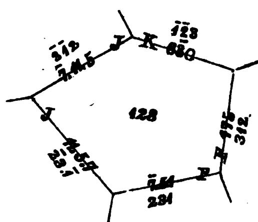
$$G/F \; \frac{111}{\underline{7}51} = -7+5+1 : \sqrt{3}\;\sqrt{49+25+1} = -1 : \sqrt{3 . 75}$$
$$= -\sqrt{\tfrac{1}{225}} \;\ldots\; 93 . 49 . 21$$

$$F/H \; \frac{175}{935} = 9+21+25 : \sqrt{75}\;\sqrt{81+9+25} = 55 : \sqrt{5 . 15}\;\sqrt{5 . 23}$$
$$= \sqrt{\tfrac{121}{345}} \;\ldots\; 126 . 18 . 51$$

$$H/H \; \frac{935}{\underline{3}95} = -27+27+25 : 81+9+25 = 25 : 115 = \tfrac{5}{23} \;\ldots\; 77 . 26 . 40$$

$$\overline{540^0 = 6\,R.}$$

Das **Tetartoeder** 123 hat ebenfalls noch die Rhomboederkanten $F = 175 = \frac{123}{312}$ und $\bar{7}51 = \frac{123}{231}$. Dagegen treten in der Tetraederecke zwei neue Zonenaxen gleichwerthiger Kanten J auf:



$$\frac{123}{\underline{3}\,\underline{1}2} = -7 + 11 + 5 \text{ durch Sectionslinie}$$
$$\tfrac{2}{3}a' : 2b' \text{ und}$$
$$\frac{123}{\underline{2}3\underline{1}} = 11 + 5 + 7 \text{ durch Sectionslinie } \frac{a}{2} : \frac{b'}{3}$$

bestimmt. Dazu kommt noch die Dachkante K

$$\frac{123}{\underline{1}\,\underline{2}3} = 3\infty a - \tfrac{3}{2}\infty b + c = 6\bar{3}0, \text{ bestimmt durch Sectionslinie } 3a' : \tfrac{3}{2}b'.$$

Darnach ergeben sich:

K/J $\frac{6\ \bar{3}\ 0}{\bar{7}.11.5} \ldots \cos = -42 - 33 : \sqrt{36+9}\ \sqrt{49+121+25}$

$= -75 : \sqrt{45.195} = -\sqrt{\tfrac{25}{39}} \ldots 143.11.29$

K/F $\frac{6\bar{3}0}{175} \ldots\ldots \cos = 6 - 21 : \sqrt{45}\ \sqrt{1+49+25}$

$= -15 : \sqrt{45.75} = -\sqrt{\tfrac{1}{15}} \ldots 75.\ 2.12$

F/F $\frac{175}{\bar{7}51} \ldots\ldots \cos = -7+35+5 : \sqrt{75}\ \sqrt{75} = 33 : 75$

$= \tfrac{11}{25} \ldots 116\ .6.14$

F/J $\frac{7\ \bar{5}\ 1}{11.5.7} \ldots \cos = -77+25+7 : \sqrt{75}\ \sqrt{121+25+49}$

$: -45 : \sqrt{75.195} = -\sqrt{\tfrac{9}{65}} \ldots 111.50.44$

J/J $\frac{11.5\ .7}{\bar{7}.11.5} \ldots \cos = -77+55+35 : \sqrt{195}\ \sqrt{195}$

$= 13 : 195 = \tfrac{1}{15} \ldots \underline{93.49.21}$

$540^0 = 6\,R.$

Rechnung mit den Tangentenformeln pag. 213.

Kante $\mp ctg = \mu\mu_, + \nu\nu_, + \pi\pi_, : \sqrt{(\nu_,\pi - \nu\pi_,)^2 + (\mu\pi_, - \mu_,\pi)^2 + (\mu\nu_, - \mu_,\nu)^2}$

Seite $\pm ctg = mm_, + nn_, + pp_, : \sqrt{(n_,p - np_,)^2 + (mp_, - m_,p)^2 + (mn_, - m_,n)^2}$, welche sich für $a = b = c = 1$ ergeben, ist am weitläufigsten, obwohl elegant. Suchen wir beispielsweise cos A des Pyramidengranatoeders

$\mu\nu\pi = 123 = \frac{a}{1} : \frac{b}{2} : \frac{c}{3} = 3a : \tfrac{3}{2}b : c$ und

$\mu_,\nu_,\pi_, = 213 = \frac{a}{2} : \frac{b}{1} : \frac{c}{3} = \tfrac{3}{2}a : 3b : c,$

$\frac{\mu\,\nu\,\pi}{\mu_,\nu_,\pi_,} = \frac{123}{213} \ldots - ctg = 1.2 + 2.1 + 3.3$

$: \sqrt{(1.3 - 2.3)^2 + (1.3 - 2.3)^2 + (1.1 - 2.2)^2}$

$= 13 : \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{\tfrac{169}{27}} \ldots 158.12.48.$

Oktaeder $\frac{111}{\bar{1}11} \ldots - ctg = 1 - 1 + 1 : \sqrt{(-1-1)^2 + 0 + (-1-1)^2}$

$= \sqrt{\tfrac{1}{8}} \ldots 109.28.16.$

Granatoeder $\frac{101}{011} \ldots - ctg = 1 : \sqrt{1.1 - 0)^2 + (1.1 - 0)^2 + (1.1 - 0)^2}$

$= \sqrt{\tfrac{1}{3}} \ldots 120^0.$

Nach der Formel $\mp ctg = 1 + \mu\mu_, + \nu\nu_, : \sqrt{(\nu_, - \nu)^2 + (\mu - \mu_,)^2 + (\mu\nu_, - \mu_,\nu)^2}$ können wir zwar die einfachen Körper, z. B. das Oktaeder $\frac{11}{\bar{1}1}$ schneller

hinschreiben, aber es bleibt immerhin etwas umständlicher. Dasselbe gilt nicht immer bei der kürzern Formel von den

Seiten $\pm$ ctg $= 1 + mm, + nn, : \sqrt{(m - m,)^2 + (n, - n)^2 + (mn, - m,n)^2}$.
Denn suchten wir den Winkel des Dreiecks vom Pyramidengranatoeder $123 = \frac{1}{3}a : \frac{2}{3}b : c$ in den drei Ecken pag. 226, so sind die Fußpunkte von

$$A/C\ \frac{m\,n}{m,n,} = \frac{11}{0\frac{5}{2}} \ldots + \text{ctg} = 1 + 0 + \tfrac{5}{2} : \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{4}}$$
$$= 5 : \sqrt{14} = \sqrt{\tfrac{25}{14}} \ldots 36 \,.\, 48 \,.\, 31.$$

$$A/B \ldots\ldots \frac{11}{5\bar{1}} \ldots + \text{ctg} = 1 + 5 - 1 : \sqrt{16 + 4 + 36}$$
$$= 5 : \sqrt{56} = \sqrt{\tfrac{25}{56}} \ldots 56 \,.\, 15 \,.\ 4.$$

$$B/C \ldots\ldots \frac{5\bar{1}}{0\frac{5}{2}} \ldots + \text{ctg} = 1 + 0 - \tfrac{5}{2} : \sqrt{25 + \tfrac{25}{4} + \tfrac{15}{4}^2}$$
$$= -\tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{2}\sqrt{100 + 25 + 225} = -\sqrt{\tfrac{1}{350}} \ldots 86 \,.\, 56 \,.\, 25.$$

Das Hinschreiben macht auch hier keine Schwierigkeit.

Die **Weiß'sche Tangentenformel** pag. 213 lautet im regulären System ebenfalls einfach:

$$\text{Kante tg} = \sqrt{1 + m^2 + n^2} : n\mu - m\nu = \sin : \cos.$$
$$\text{Seite ctg} = \sqrt{1 + \mu^2 + \nu^2} : \nu m - \mu n = \cos : \sin.$$

Dabei haben wir noch den Vortheil, daß in den **Kanten** der

$$\sin = \sqrt{1 + m^2 + n^2}$$

von μ und ν unabhängig bleibt. Wollen wir daher z. B. die Winkel der ersten Kantenzone $1 + 1$ im Fußpunkte der

Granatoederkante ausrechnen, so wird für alle

$$\sin = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3} \text{ und } \cos = 1 \,.\, \mu - 1 \,.\, \nu = \mu - \nu \text{ oder}$$
$$\text{tg} = \sqrt{3} : (\mu - \nu).$$

Wir haben es daher nur noch mit zwei griechischen Buchstaben zu thun. Gibt

Granatoeder $1 - 0 = 1$, d. h. $\sin : \cos = \sqrt{3} : 1 = \sqrt{3} \ldots 60^0$.
48fl. äußere $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ .... $\sqrt{3} : \frac{1}{3} = \sqrt{27} \,..\, 79 \,.\ 6 \,.\, 24.$
48fl. mittlere $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$ .... $\sqrt{3} : 2 = \sqrt{\frac{3}{4}} \ldots 40 \,.\, 53 \,.\, 36.$
48fl. innere $2 + 3 = 5$ .... $\sqrt{3} : 5 = \sqrt{\frac{3}{25}} \,..\, 19 \,.\ 6 \,.\, 24.$
Leucitoeder $2 + 1 = 3$ .... $\sqrt{3} : 3 = \sqrt{\frac{1}{3}} \ldots 30.$
$2(79.6.24) = 158^0\ 12'\ 48'' = A$; $79.6.24 - 40.53.36 = 38^0\ 12'\ 48''$
$= \text{Supplemw. H.}$

Kantenzonen haben im Allgemeinen $m = n$, gibt

$$\text{tg} = \sqrt{1 + 2m^2} : m(\mu - \nu) = \sqrt{\frac{1}{m^2} + 2} : (\mu - \nu) \text{ Kante.}$$

Axenpunkte haben

in a für n = 0 oder in b für m = 0

$\mathrm{tg} = \sqrt{1 + m^2} : m\nu = \sqrt{\frac{1}{m^2} + 1} : \nu$ $\mathrm{tg} = \sqrt{1 + n^2} : n\mu = \sqrt{\frac{1}{n^2} + 1} : \mu$.

Daraus geht sofort für die

Oktaederkantenzone m = 1 die $\mathrm{tg} = \sqrt{2} : \nu$ und für n = 1 $\mathrm{tg} = \sqrt{2} : \mu$ hervor. Wenn man bei den Kantenzonen es mit $\sin = \mu - \nu$, so hat man es bei den Axenpunkten blos mit einem einfachen Buchstaben zu thun. Es ist also kaum mehr als ein Ablesen der Zahlen.

Für die Neigung einer Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ gegen die Hauptaxe c, d. h. für den Seitenkantenwinkel ist

$$\mathrm{tg} = 1 : \sqrt{\mu^2 + \nu^2} \text{ pag. 218.}$$

Leucitoeder cos = 2, daher $\mathrm{tg} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; Pyramidenoktaeder $\cos = \frac{1}{2}$, daher $\mathrm{tg} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ꝛc.

Symmetrische Diagonalzone $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ gibt $m = n = \frac{1}{2}$, folglich $\sin = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ und $\cos = \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu = \frac{1}{2}(\mu - \nu)$, d. h.

$$\mathrm{tg} = \sqrt{6} : (\mu - \nu),$$

so daß alle Winkel dieser flächenreichen Zone durch Subtraction zweier Zahlen gefunden sind. Greifen wir eine der

unsymmetrischen Diagonalzonen 2a + b heraus, so ist m = 2 und n = 1, folglich $\sin = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$ und $\cos = \mu - 2\nu$, d. h.

$$\mathrm{tg} = \sqrt{6} : (\mu - 2\nu).$$

Hier wird nun der Winkel durch die Mittelpunktsebene nicht halbirt, ich muß daher für den einzelnen Winkel zwei Rechnungen ausführen, was die Sache etwas unbequem macht. Suche ich z. B. den Winkel, welchen die Pyramidengranatoederflächen

$\frac{a}{2} : \frac{b'}{3}$ und $\frac{3}{2}a : 3b'$ mit einander machen, so gibt

$\frac{a}{2} : \frac{b'}{3} \ldots \mu = 2,\ \nu = -3$ d. h. $\cos_1 = 2 + 6 = 8 \ldots \mathrm{tg}_1 = \sqrt{\frac{3}{32}} \ldots$ 17. 1.26.

$\frac{3}{2}a : 3b' \ldots \mu = \frac{2}{3},\ \nu = -\frac{1}{3}$ d. h. $\cos_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \ldots \mathrm{tg}_2 = \sqrt{\frac{27}{8}} \ldots$ 61.26.21.

135.35.5 .... 44.24.55.

Es ist der Winkel, welchen die gegenüberliegenden Dihexaederflächen 123/321 mit einander machen, und der der Dachkante G des Gyroeders 124/$\overline{1}$42 gleich ist.

Für die **symmetrischen Zonenpunkte**, womit man es meist zu thun hat, ist auch die Weiß'sche Rechnung elegant und einfach. Denn die Formel nimmt für die Kantenzonen n = m die kurze Form an:

$$\mathrm{tg} = \sqrt{1 + 2m^2} : m(\mu - \nu), \text{ worin } m = \mu \pm \nu,$$

und für die Axenzonen n = 0

$$tg = \sqrt{1 + m^2} : m\nu, \text{ worin } m = \mu.$$

Alles das gibt die Projection unmittelbar an die Hand.

Die Formel der Seiten

$$\cos : \sin = ctg = \sqrt{1+\mu^2+\nu^2} : m\nu - n\mu$$

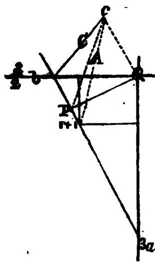
erleidet dieselben Mängel und Vortheile. Hier ist umgekehrt wie bei den Kanten cos unabhängig von den Zonenpunkten m und n. Suche ich die Winkel auf der Sectionslinie der Oktaederfläche 1 : 1, so ist $\cos = \sqrt{3}$ und $\sin = m - n$.

Für die Oktaederfläche selbst ist n=0, m=1, folglich $ctg=\sqrt{3}=30°$. Das Granatoeder b' : ∞a schneidet in 2a—b, folglich m=2, n=—1, gibt $ctg = \sqrt{\frac{1}{3}}$ 2c. Ich darf also alle möglichen Punkte nur von der Sectionslinie ablesen. Noch einfacher werden die Linien $\mu a : \infty b$, weil dann $\nu = 0$ wird, und

$$ctg = \sqrt{1+\mu^2} : n\mu = \frac{1}{\mu} \sqrt{1+\mu^2} : n.$$

In diesen beiden Fällen werden die Winkel durch die Mittelpunktsebene halbirt, ein Perpendikel von c oder von Q auf die Sectionslinie halbirt dieselbe. Bei den andern Linien ist das nicht der Fall, ich muß daher auch hier wieder zwei Winkel rechnen und addiren oder subtrahiren.

Beispiele. Suchten wir z. B. den ebenen Winkel A/C in der viergliedrigen Ecke des Pyramidengranatoeders 3a : $\frac{3}{2}$b, so liegt derselbe zwischen den Fußpunkten 1 + 1 und 0 + $\frac{3}{2}$. Unsere Formel gibt aber den Winkel an, welchen die Zonenaxen A und C mit der Linie cP der Mittelpunktsebene cPQ in der Sectionslinienebene 3a : $\frac{3}{2}$b : c machen. Wir müssen die zwei Theile PcA und PcC besonders rechnen und addiren. Da $\mu = \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{2}{3}$, so ist



$$ctg = \sqrt{1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9}} : \tfrac{2}{3}m - \tfrac{1}{3}n = \sqrt{14} : 2m - n$$

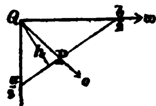
m=n=1 gibt $ctg = \sqrt{14} : 1$ . . . . 14.57.47$\frac{1}{2}$.

m=0, n=$\frac{3}{2}$ gibt $ctg = \sqrt{14} : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{14} = \sqrt{\frac{56}{9}}$ 21.50.43$\frac{1}{2}$.

36.48.31.

Wählen wir das Pyramidengranatoeder $\frac{a}{3} : \frac{b}{2}$ vorn im rechten Quadranten, und suchen den Winkel, welchen der Oktaederkantenstrahl o und Würfelkantenstrahl ω darauf erzeugen, so ist für das reguläre System a=b=1, und für die Sectionslinie μ=3 und ν=2, das gibt

$$ctg = \sqrt{1 + 4 + 9} : 2m - 3n,$$



worin nur noch m und n zu bestimmen sind. Der Oktaederstrahl erzeugt den Zonenpunkt $P = \frac{1}{2 + 3} = \frac{1}{5}$; da er eine Kantenzone bildet, so ist m = n = $\frac{1}{5}$, also

$$ctg = \sqrt{14} : -\tfrac{1}{5} = -5\sqrt{14} \ldots . \; 3^0\, 3'.$$

Der Würfelstrahl hat im Punkte $\frac{b}{2}$ für $n = \frac{1}{2}$, $m = 0$

$$ctg = \sqrt{14} : -\tfrac{5}{2} = -\tfrac{2}{5}\sqrt{14} \ldots . \; 21^0\, 50'.$$

Da beide Ausdrücke negativ sind, so fallen sie auf die gleiche Seite des Perpendikels h, ich muß sie daher von einander abziehen, um die gesuchte Seite $18^0\, 47' = 21^0\, 50' - 3^0\, 3'$ zwischen P und $\frac{b}{2}$ zu bekommen.

Wenden wir zur Controle die Cosinusformel (1) pag. 221 an, so ist wie vorhin
$m = n = \frac{1}{5}$ und $m_, = 0$, $n_, = \frac{1}{2}$, gibt

$$\cos = 1 + \frac{1}{10} : \sqrt{1 + \frac{1}{25} + \frac{1}{25}}\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{11}{10} : \sqrt{\frac{27}{25} \cdot \frac{5}{4}}$$
$$= \frac{11}{10}\sqrt{\frac{20}{27}} = \sqrt{\frac{11^2}{135}} \ldots . \; 18^0\, 47'.$$

In diesem Falle ist die Cosinusformel bequemer. Wollte ich dagegen alle Schnitte auf der ganzen Linie berechnen, so wird die Tangentenformel wieder in Vortheil kommen, weil ich es da immer nur mit den zwei Unbekannten m und n zu thun habe: so hat der Diagonalzonenpunkt des Oktaeders, welchen $a : b$ mit $a' : \infty b$ macht, $m = -1$, $n = 2$, gibt $-2 - 6 = -8$, $ctg = -\frac{1}{8}\sqrt{14}$, liegt also auch rechts vom Perpendikel. Die Kantenzone des Granatoeders $a : \infty b$ mit $b' : \infty a$ hat dagegen $m = 1$, $n = -1$, gibt $2 + 3 = 5$, $ctg = \frac{1}{5}\sqrt{14}$, liegt wegen des positiven Vorzeichens auf der andern Seite des Perpendikels.

Hätte ich die Sectionslinie des Granatoeders $a : \infty b = a : \frac{b}{0}$, so wäre $\mu = 1$, $\nu = 0$, also $ctg = \sqrt{2} : m$, ich könnte alles von der Linie ablesen. Bei der Cosinusformel würde zwar auch $m = 1$ und $n = 0$, aber dann bleiben immer noch $\cos = (1 + m_,) : \sqrt{2}\ \sqrt{1 + m_,^2 + n_,^2}$, die dann doch nicht so leicht zu übersehen sind, als bei der ctg der einfache Buchstabe m. Noch weniger ist das bei der Sectionslinie des Oktaeders der Fall, wo das Perpendikel auf die Linie $a : b$ die Seite halbirt, und für $\mu = \nu = 1$ die $ctg = \sqrt{3} : (m - n)$ nur von m und n abhängig bleibt. Wollte man direct ablesen, so wäre die Zonenaxe von c nach $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ gleich $\sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \cos$; die Abschnitte auf dem sin rationale Multipla von $\sqrt{2}$. Für die halben Winkel der Oktaederseite ist $\sin = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, das dividirt sich gegen den $\cos = \sqrt{\frac{3}{2}}$ weg, also bleibt $\sqrt{3}$. Auch in solchen Fällen ist es bequemer, nicht abzulesen, sondern die Formel anzuwenden.

Für halbirte Winkel, namentlich für gegenüberliegende Kanten in den Axen- und Diagonalzonenebenen nehmen die Cosinusformeln eine sehr bequeme Form an. Denn für Punkte in der

Kantenzone wird vorn n = m und hinten $n_, = m_, = -m$, es kommt sofort

$$\cos = \frac{1 - 2m^2}{1 + 2m^2}.$$

Für einander gegenüberliegende Granatoederkanten ist m = 1, folglich $\cos = -\frac{1}{3} \ldots 109^0\ 28'$. In der

Axenebene wird vorn n = 0, hinten $m_, = m$ und $n_, = 0$, es kommt sofort

$$\cos = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

Für einander gegenüberliegende Oktaederkanten ist m = 1, folglich cos = 0, d. h. die Oktaederkanten schneiden sich unter rechtem Winkel. Man sieht leicht, wie diese beiden Sätze auch für Kantenwinkel mit Vortheil verwerthet werden können.

Neigung gegen die Axen. Es ist für die Rechnung im Gedanken practisch, sich dieser ältesten Weiß'schen Methode zu bedienen. Die Winkel im Hauptschnitte des Oktaeders sind damit außerordentlich schnell und leicht gefunden. Die Neigung einer Fläche a : b : c gegen die Hauptaxe c = cos hat im $\sin = s = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ pag. 90; eine Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi}$ hat daher

$$\cos = \frac{c}{\pi} \text{ und } \sin = \frac{a}{\mu} \cdot \frac{b}{\nu} : \sqrt{\frac{a^2}{\mu^2} + \frac{b^2}{\nu^2}} = \frac{ab}{\sqrt{\nu^2 a^2 + \mu^2 b^2}}; \text{ also für } c = 1$$

$$\text{tg} = \pi ab : \sqrt{\nu^2 a^2 + \mu^2 b^2}. \text{ Gibt für } a = b = c = 1$$

$$\text{tg} = \pi : \sqrt{\mu^2 + \nu^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{\mu^2 + \nu^2}} \ldots \sqrt{\frac{\nu^2}{\mu^2 + \pi^2}} \ldots \sqrt{\frac{\mu^2}{\nu^2 + \pi^2}}.$$

Dann gibt ctg die Neigung der Fläche gegen die Basis, also den halben Winkel der Kanten des Basalschnittes. Wollen wir die besondern Formeln, so ist

Oktaederwinkel

$$\text{tg} = \sqrt{\frac{1}{1 + 1}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \ldots 35^0\ 16'.$$

Leucitoeder $a : b : \frac{1}{2}c$

$$\text{ctg} = \sqrt{\frac{2^2}{1 + 1}} = \sqrt{2} \ldots 35^0\ 16' \text{ Neigung zur Basis;}$$

$$\text{ctg} = \sqrt{\frac{1}{1 + 2^2}} = \sqrt{\tfrac{1}{5}} \ldots 65^0\ 54' \text{ gebrochene Oktaederkante.}$$

Pyramidenoktaeder $a : b : 2c = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b : c$

$$\mathrm{ctg} = \sqrt{\frac{1}{2^2 + 2^2}} = \sqrt{\tfrac{1}{8}} \ldots 70^0\ 32'.$$

Pyramidengranatoeder $a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c$

$\mathrm{ctg} = \sqrt{\frac{1}{2^2 + 3^2}} = \sqrt{\frac{1}{13}} \ldots 74^0\ 30'$ Neigung gegen den Hauptschnitt bc.

Mit zu Hilfenahme des Kantenzonengesetzes würde man auch die andern Kanten leicht heraus finden, doch hat das weiter keinen praktischen Werth.

Die **Indices** unableitbarer Flächen zu erhalten, wenden wir die Sätze pag. 218 an.

Wäre die **Oktaederkante** $a : c$ durch ein Flächenpaar mit dem Winkel $141^0\ 3'\ 27''$ zugeschärft, so haben wir in der Formel für die Axenpunkte pag. 219 $\mu_0 = m = 1$, und $a = b = 1$ zu setzen, so kommt

$$\nu_0 = \frac{b\sqrt{1 + m^2a^2}}{m\ \mathrm{tg}} = \sqrt{2}\ \mathrm{ctg}\ 70 . 31 . 44 = 0{,}5 = \tfrac{1}{2},$$

die Fläche $\frac{a}{\mu_0} : \frac{b}{\nu_0}$ gehört also einem Pyramidenoktaeder $a : 2b$ an.

Wäre die **Granatoederkante** $c ; a + b$ durch ein Flächenpaar mit dem Winkel $158^0\ 12'\ 48''$ zugeschärft, so ist in der Formel für die Kantenzonen pag. 219 $m = 1$ und $a = b = 1$ zu setzen, dann kommt

$$\mu_0 = \frac{a^2\ \mathrm{tg} + ab\sqrt{1 + m^2(a^2 + b^2)}}{m\ (a^2 + b^2)\ \mathrm{tg}} = \frac{\mathrm{tg} + \sqrt{3}}{2\ \mathrm{tg}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\ \mathrm{ctg}\sqrt{3}$$

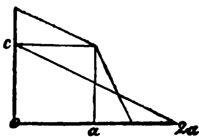
$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ \mathrm{ctg}\ 79^0\ 12'\ 48'' = 0{,}5 + 0{,}166 \ldots = 0{,}666 \ldots = \tfrac{2}{3}$$

$$\nu_0 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ \mathrm{ctg}\ 79^0\ 12'\ 48'' = 0{,}5 - 0{,}166 \ldots = 0{,}333 \ldots = \tfrac{1}{3},$$

wir erhalten daher das gewöhnliche Pyramidengranatoeder

$$c : \frac{a}{\mu_0} : \frac{b}{\nu_0} = c : \tfrac{3}{2}a : 3b = \tfrac{1}{3}c : \tfrac{1}{2}a : b.$$

Wäre die **Würfelkante** durch ein Flächenpaar $c : \frac{a}{\mu_0} : \infty b$ mit dem Winkel $143^0\ 7'\ 48''$ zugeschärft, so ist



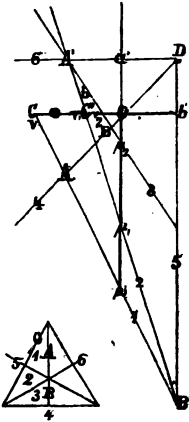
$$\frac{1}{\mu_0} = \mathrm{ctg}\ (71^0 . 33' . 54'' - 45^0),$$

$$\mathrm{l\ ctg}\ 26^0\ 33'\ 54'' = 0{,}30103,\ \mathrm{num.} = 2.$$

Das einzusehen, bedarf es nur eines Aufrisses in der Würfelfläche, wodurch der Abzug von 45^0 sofort klar wird. Denn $\frac{1}{\mu_0}$ ist die Linie von 0 nach 2a, Axe co = 1, und der Winkel bei 2a = 26 . 33 . 54.

Keine Zone bekannt, findet sich öfter bei dem 48flächner, namentlich wenn dieser die Ecken z. B. des Würfels zuschärft. Mit der Entwerfung der Projection wird dem Kundigen auch schon die Lösung klar.

Machen wir in diesem Falle vom System Gebrauch, so dürfen wir nur aus einem Oktanten die drei Flächen Nr. 1 2 3 projiciren, zu gleicher Zeit die drei Granatoederflächen Nr. 4 5 6. Die Durchschnitte mit den Würfelebenen geben die halben Winkel C, die Durchschnitte mit den Granatoederflächen die halben Winkel A und B. Jeder Winkel erscheint zwei Mal. Denn es ist eine allgemeine Eigenschaft der Trigonpolyeder, daß ihre Kanten in die Schnitte der Granatoeder- und Würfelflächen fallen müssen. Es sei



$$A = B = 79 . 6 . 2, \quad C = 74 . 29 . 55,$$

so sind drei Fälle möglich: es kann AC, AB oder BC gegeben sein.

1. Wäre AC in der körperlichen Ecke AoC gegeben, so ist der Winkel bei $o = 45^0$, d. h. $\cos 45^0 = \sin 45^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Wir haben also für die Seite α in der Axe b

$$\cos\alpha = \frac{\cos A + \cos C . \cos 45^0}{\sin B . \sin 45^0} = \frac{\cos A \sqrt{2} + \cos C}{\sin B}.$$

Nennen wir dann im rechtwinklichen sphärischen Dreiecke $\mu\nu o$ die Seite (in Axe a) $\mu co = \gamma$, so ist $\nu = \operatorname{tg}\alpha$ und $\mu = \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg} C . \sin\alpha$.

2. Wäre A'B gegeben, so hat das Dreieck A'BD bei D 60°, denn es entspricht der scharfen Kante, welche zwei anliegende Granatoederflächen mit einander machen. Daher ist

$$\cos\beta = \frac{\cos B + \cos A' \cos 60^0}{\sin A' . \sin 60^0} = \frac{\cos B + \tfrac{1}{2} \cos A'}{\sin A' \sqrt{\tfrac{3}{4}}}$$

Da nun die Seite a'cD am Granatoeder die Hälfte des Tetraederwinkels ist, so ist die Seite zwischen $A'a' = \beta - 35^0\, 16' = \omega$, folglich verhält sich im Dreiecke A'a'c, woran die Linie $a'c = \sqrt{2}$ ist,

$$A'a' : \sin\omega = \sqrt{2} : \cos\omega, \quad A'a' = \operatorname{tag}\omega \sqrt{2}.$$

Im rechtwinklichen sphärischen Dreiecke $A'a'\mu_{,}$ kenne ich Seite ω und Kante A', daher Seite $a'\mu_{,} = \alpha'$ genannt

Linie $a'\mu_{,} = \operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg} A' \sin\omega$. Daraus läßt sich $\mu_{,}\nu_{,}$ sofort finden.

3. Wäre B'C' in der körperlichen Ecke B'b'C' gegeben, so hat dieselbe rechts bei b' einen rechten Winkel, folglich ist

$$\cos\beta = \frac{\cos B'}{\sin C'} = \frac{\cos 79 . 6\tfrac{1}{2} \ldots 9{,}27642}{\sin 74 . 30 \ldots 9{,}98390}$$

$$l \cos\beta = 9{,}29252 \ldots 78 . 41\tfrac{1}{2} = \beta$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \hline 33 . 41\tfrac{1}{2} = \beta - \tfrac{1}{2} R \end{array}$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos C'}{\sin B'} = \frac{\cos 74 . 30 \ldots 9{,}42690}{\sin 79 . 6\tfrac{1}{2} \ldots 9{,}99209}$$

$$l \cos\gamma = 9{,}43481 \ldots 74 . 13 = \gamma$$

$$l\,tg\,33\,.\,41\tfrac{1}{2} = \quad 9{,}82380\ldots \text{num. } 0{,}666\ldots = \nu, = \tfrac{2}{3}$$

$l\sqrt{2}\,tg\,74\,.\,13 = 10{,}69925\ldots$ num. 5, woraus $\mu, = 2$ unmittelbar folgt.

Vergleicht man diese Rechnungsweise mit dem Suchen der Indices pag. 235, so ist unser Weg der kürzere. Denn ist einmal die Figur entworfen, so bedarf es weiter keines Nachdenkens, alles geht nach demselben Schema.

2. Viergliedriges System.

Rechnung mit Cosinusformeln.

Hier ist pag. 206 a = b zu setzen, folglich erhalten wir für $a = \frac{1}{\alpha}$ und $\alpha = \frac{1}{a}$.

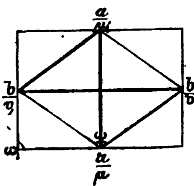
1. Seiten $\pm \cos = \alpha^2 + mm, + nn, : \sqrt{\alpha^2+m^2+n^2}\,\sqrt{\alpha^2+m,^2+n,^2}$.
2. Kanten $\mp \cos = a^2 + \mu\mu, + \nu\nu, : \sqrt{a^2+\mu^2+\nu^2}\,\sqrt{a^2+\mu,^2+\nu,^2}$.

Allgemein.

3. Seiten $\pm \cos = mm, + nn, + pp,\alpha^2 : \sqrt{m^2+n^2+p^2\alpha^2}\,\sqrt{m,^2+n,^2+p^2\alpha^2}$.
4. Kanten $\mp \cos = \mu\mu, + \nu\nu, + \pi\pi, a^2 : \sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2 a^2}\,\sqrt{\mu,^2+\nu,^2+\pi,^2 a^2}$.

Man hat also nur eine Unbekannte a. Diese zu finden, muß irgend ein Winkel ω gemessen werden. Allgemein läßt sich das etwas unbequem lösen, auch führt das zu unpraktischen Resultaten. Doch läßt sich der zu messende Winkel so wählen, daß er entweder in der **Axe**, oder in der diagonalen **Zwischenaxe** liegt. Dabei muß stets erwogen werden, ob der Winkel stumpf oder scharf sei.

In der **Axe** mag der stumpfe Winkel in $\frac{a}{\mu}$ von irgend einem Vierkantner $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ (a = b) gemessen sein, so wäre für die Endkante



$$\mu, = \mu \text{ und } \nu, = -\nu$$

zu setzen. Die Kantenformel (2) ginge über in

$$-\cos\omega = \frac{a^2 + \mu^2 - \nu^2}{a^2 + \mu^2 + \nu^2}$$

$$-\cos\omega\,(\mu^2+\nu^2) - a^2(\cos\omega + 1) = \mu^2 - \nu^2$$

$$a^2 = -\frac{\mu^2 - \nu^2 + (\mu^2+\nu^2)\cos\omega}{1+\cos\omega}.$$

Für $\mu = \nu = 1$, d. h: für das einfache Oktaeder wird die Formel

$$a^2 = -\frac{2\cos\omega}{1+\cos\omega} = -\frac{2\,(\cos\tfrac{1}{2}\omega^2 - \sin\tfrac{1}{2}\omega^2)}{2\cos\tfrac{1}{2}\omega^2} = tg\,\tfrac{1}{2}\omega^2 - 1$$

$$a = \sqrt{tg\,\tfrac{1}{2}\omega^2 - 1}.$$

Im scharfen Winkel $\frac{b}{\nu}$ wird $\nu, = \nu$ und $\mu, = -\mu$, folglich

$$\cos\omega = \frac{a^2 - \mu^2 + \nu^2}{a^2 + \mu^2 + \nu^2}.\quad \text{Gibt für } \mu = \nu = 1$$

$$a^2 = \frac{2\cos\omega}{1 - \cos\omega} = \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\omega^2 - 1.$$

Für die Seitenkanten eines Oktaeders $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ vom Vierkantner haben wir in Formel (2) nur $\mu_{,} = -\mu$ und $\nu_{,} = -\nu$ zu setzen, gibt

$$-\cos\omega = \frac{a^2 - \mu^2 - \nu^2}{a^2 + \mu^2 + \nu^2},$$

d. h. den Winkel zweier in der Endecke sich gegenüberliegender Flächen. Für das Grundoktaeder a : b : c = a : a : c wird dann $\mu = \nu = 1$, und wir erhalten sofort

$$-\cos\omega = \frac{a^2 - 2}{a^2 + 2}$$

$$a^2 = \frac{2 - 2\cos\omega}{1 + \cos\omega} = \frac{2(1 - \cos\omega)}{1 + \cos\omega} = 2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega^2,$$

giltig für die Seitenkante.

Suchte ich in der **Zwischenaxe** den Winkel $\omega_{,}$ vom zugehörigen Oblongoktaeder, so wäre

$$\mu_{,} = \nu = 0,$$

$$-\cos\omega_{,} = a^2 : \sqrt{a^2 + \mu^2}\ \sqrt{a^2 + \nu_{,}^2}.$$

Das gäbe immerhin eine Gleichung zweiten Grades. Setzen wir aber $\mu = \nu_{,}$, d. h. haben wir das wirkliche nächste stumpfere Oktaeder im Auge, so ist

$$-\cos\omega_{,} = \frac{a^2}{a^2 + \mu^2}$$

$$a^2 = -\frac{\mu^2\cos\omega_{,}}{1 + \cos\omega_{,}} = \frac{\mu^2}{2}(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega_{,}^2 - 1),$$

gibt für $\mu = 1$

$$a = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega_{,}^2 - 1}{2}}.$$

Die Seitenkanten des nächsten stumpfern Oktaeders a : c : ∞a geben die einfachste Formel. Denn hier ist

$$\nu = \nu_{,} = 0 \text{ und } \mu_{,} = -\mu, \text{ folglich}$$

$$-\cos\omega = \frac{a^2 - \mu^2}{a^2 + \mu^2},\quad a^2 = \mu^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega^2,$$

d. h. wir haben den Winkel, welchen die in c gegenüberliegenden Axen mit einander machen, wozu die eigentlichen Seitenkanten das Supplement bilden.

Gibt für $\mu = 1$ im Hauptoktaeder

$$a = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega.$$

Das Resultat war vorauszusehen. Der halbe Winkel ($\frac{1}{2}\omega$) bedeutet die Neigung gegen Axe c, also verhält sich

$$a : \sin \tfrac{1}{2}\omega = c : \cos \tfrac{1}{2}\omega,$$

was für $c = 1$ die Formel gibt.

Da die Winkel der einfachen Körper durch die Mittelpunktsebene halbirt werden, so kürzt das die Rechnung bedeutend ab, wenn wir die besondere Formel pag. 210

$$\mp \cos = (\mu\mu_{,}b^2 - \nu\nu_{,}a^2) : \sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}\ \sqrt{\mu_{,}^2b^2 + \nu_{,}^2a^2}$$

zu Grunde legen, die für $b = a$ sofort in die viergliedrige Formel

$$\cos = \mu\mu_{,} - \nu\nu_{,} : \sqrt{a^2 + \mu^2 + \nu^2}\ \sqrt{\mu_{,}^2 + \nu_{,}^2}$$

übergeht, und giltig ist für eine Fläche $c : \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ und eine Säule $\infty c : \frac{a}{\mu_{,}} : \frac{b'}{\nu_{,}}$. Durch das gestrichelte b' kommt das negative Zeichen in den Zähler der Formel. Rechnen wir hiermit am Dioktaeder die halbe Endkante in der Zwischenaxe, so ist $\mu = \nu = 1$, wir erhalten die sehr brauchbaren Formeln:

Zwischenkanten $\cos \tfrac{1}{2}\omega = \mu - \nu : \sqrt{a^2 + \mu^2 + \nu^2}\ \sqrt{2}$,

$$a^2 = \frac{\frac{1}{2}(\mu - \nu)^2 - (\mu^2 + \nu^2)\cos \frac{1}{2}\omega^2}{\cos \frac{1}{2}\omega^2} = \frac{\frac{1}{2}(\mu - \nu)^2}{\cos \frac{1}{2}\omega^2} - (\mu^2 + \nu^2).$$

Für $\mu = \nu = 1$ ist $\cos \tfrac{1}{2}\omega = 0 = \cos 90^0$. Setzen wir dagegen $\mu = 1$ und $\nu = -1$, so haben wir eine Fläche $a : b' : c$ im Sinne, das gibt für das Complement der halben Seitenkante des Oktaeders

$$a^2 = \frac{2 - 2\cos \frac{1}{2}\omega^2}{\cos \frac{1}{2}\omega^2} = 2\ \mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}\omega^2,$$

wie oben. Noch einfacher wird die Formel für die Axenendkante, denn das gibt $\mu_{,} = 0$ und $\nu_{,} = \infty$

Axenendkante $\cos \tfrac{1}{2}\omega = \nu : \sqrt{a^2 + \mu^2 + \nu^2}$ in a

$\cos \tfrac{1}{2}\omega = \mu : \sqrt{a^2 + \mu^2 + \nu^2}$ in b

$$a^2 = \frac{\mu^2 - \cos \frac{1}{2}\omega^2 (\mu^2 + \nu^2)}{\cos \frac{1}{2}\omega^2} = \frac{\mu^2}{\cos \frac{1}{2}\omega^2} - (\mu^2 + \nu^2).$$

Gibt für das Hauptoktaeder $\mu = \nu = 1$

$$a^2 = \mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}\omega^2 - 1.$$

Alles entwickelt sich so leicht und ohne Nachdenken, daß wir das Weitere nicht verfolgen.

Zahlenbeispiel. Beim Russischen Vesuvian maß Herr v. Kokscharow (Materialien zur Mineralogie Rußlands 1853. I pag. 117) am Oktaeder $a : a : c$ die

Endkante $129^0\ 20'\ 30''$ .... $\tfrac{1}{2}\omega = 64 . 40 . 15$

$a = \sqrt{\mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}\omega^2 - 1}$ l tg = 10,3248445

l tg² = 10,6496890 ... num. 4,4636

$a = \sqrt{3{,}4636}$

Seitenkante (Supplement) $105^0\ 33'\ 15''$ .... $\tfrac{1}{2}\omega = 52 . 46 . 37\tfrac{1}{2}$

$a = \sqrt{2\ \mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}\omega^2}$ l tg = 10,1193739

$$l\ tg^2 = 10{,}2387478 \ldots \text{num. } 1{,}7320$$

$$a = \sqrt{3{,}4640}$$

Die Wurzelgröße weicht blos um 0,0004 ab. Die eigentliche Seitenkante 74 . 27 muß natürlich $a = \sqrt{2 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \omega^2}$ geben.

Die Winkelrechnung mit den Formeln geschieht ganz in derselben Weise, wie bei dem regulären System pag. 221, blos daß jetzt statt 1 die Axen a^2 oder $\alpha^2 = \frac{1}{a^2}$ stehen. Wir können also wieder ohne jegliche Vorstellung der Krystallform mit den Flächenzeichen rechnen.

Gesucht wird der Winkel, welchen zwei Vierkantnerflächen

$$a : \tfrac{1}{3}b : \tfrac{1}{2}c \mid a' : \tfrac{1}{3}b : \tfrac{1}{2}c = a : \tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{2}c \mid a' : \tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{2}c$$

mit einander machen. Die Axe b wird nur gebraucht, um das Auge zu fixiren: es ist eben die Kante gemeint, welche von $\frac{1}{2}c$ nach $\frac{1}{3}a$ geht. Hier ist also

$$\mu = 1,\ \nu = 3,\ \pi = 2 \text{ und } \mu_{,} = -1,\ \nu_{,} = 3,\ \pi_{,} = 2$$

in der allgemeinen Kantenformel (4) zu setzen, und wir haben

$$-\cos = -1 + 9 + 4a^2 : \sqrt{1 + 9 + 4a^2}\ \sqrt{1 + 9 + 4a^2}$$

$$= \frac{8 + 4a^2}{10 + 4a^2} = \frac{4 + 2a^2}{5 + 2a^2} = \frac{10{,}928}{11{,}928} \ldots .\ 156^0\ 22'\ 18''.$$

In der kleinern Formel müssen die Flächen auf die Form

$$2a : \tfrac{2}{3}a : c \text{ und } 2a' : \tfrac{2}{3}a : c$$

gebracht werden, dann ist $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{3}{2}$, und $\mu = -\frac{1}{2}$, $\nu_{,} = \frac{3}{2}$, gibt

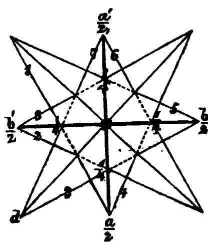
$$-\cos = a^2 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{4} : \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{4}}\ \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{4}}.$$

$$= \frac{a^2 + \frac{8}{4}}{a^2 + \frac{10}{4}} = \frac{4a^2 + 8}{4a^2 + 10} = \frac{2a^2 + 4}{2a^2 + 5}.$$

Wenn wir es mit Flächen ein und desselben Körpers zu thun haben, so heben sich wie beim regulären Systeme pag. 225 die Wurzeln, und die allgemeine Formel geht in

$$-\cos = \frac{\mu\mu_{,} + \nu\nu_{,} + \pi\pi_{,}a^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2 a^2} \ldots .\ \text{(Vierkantner)}$$

über, worin alle übrigen einfachern Körper enthalten sind. Da wir es mit ganzen Zahlen zu thun haben, so macht der Axenbeisatz für die Rechnung keine sonderlichen Weitläufigkeiten.



Bei den Vier und Vierkantnern (Dioctaedern) mit dreierlei Kanten zeichnen sich zunächst drei Hauptfälle aus:

Endkanten der Hauptaxen (1/7) und Zwischenaxen (1/2) und Seitenkanten (1/6), wie nebenstehende Projection des Dioktaeders

$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{4}b : c = \frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c$$

zeigt, welches öfter beim Vesuvian gefunden ist. Die allgemeinen Symbole ergeben sich sogleich. Da nun $\mu = \mu_,$, $\nu = \nu_,$, $\pi = \pi$, wird, denn alle Flächen haben gleiche Axenausdrücke, so kommt:

1) 1/7 Hauptendkante $\dfrac{\mu\nu\pi}{\underline{\mu}\nu\pi} \ldots\ldots - \cos = \dfrac{-\mu^2 + \nu^2 + \pi^2 a^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2 a^2}.$

Beispiel: $\dfrac{241}{\underline{2}41} \ldots\ldots - \cos = \dfrac{-4 + 16 + a^2}{4 + 16 + a^2} = \dfrac{12 + a^2}{20 + a^2}.$

2) 1/2 Zwischenendkante $\dfrac{\mu\nu\pi}{\nu\mu\pi} \ldots\ldots - \cos = \dfrac{2\,\mu\nu + \pi^2 a^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2 a^2}$

$$\frac{241}{421} \ldots\ldots - \cos = \frac{16 + a^2}{20 + a^2}.$$

3) 1/6 Seitenkante $\dfrac{\mu\nu\pi}{\underline{\mu}\underline{\nu}\pi} \ldots\ldots - \cos = \dfrac{-\mu^2 - \nu^2 + \pi^2 a^2}{\mu^2 + \nu^2 + \pi^2 a^2}$

$$\frac{\bar{2}\bar{4}1}{241} \ldots\ldots + \cos = \frac{4 + 16 - a^2}{4 + 16 + a^2} = \frac{20 - a^2}{20 + a^2}.$$

Da jede Fläche jede schneiden muß, so bleiben noch folgende vier Winkel über:

$$1/3 \ldots \frac{241}{4\underline{2}1} \ldots \frac{8 - 8 + a^2}{16 + 4 + a^2} = \frac{a^2}{20 + a^2};$$

$$1/4 \ldots \frac{241}{2\underline{4}1} \ldots \frac{4 - 16 + a^2}{16 + 4 + a^2} = \frac{a^2 - 12}{20 + a^2};$$

$$1/5 \ldots \frac{241}{\underline{4}\underline{2}1} \ldots \frac{-8 - 8 + a^2}{16 + 4 + a^2} = \frac{a^2 - 16}{20 + a^2};$$

$$1/8 \ldots \frac{241}{4\underline{2}1} \ldots \frac{8 - 8 + a^2}{16 + 4 + a^2} = \frac{a^2}{20 + a^2}.$$

Wie bei dem regulären flächenreichsten Körper dreiundzwanzig, so haben wir bei dem viergliedrigen nur noch sieben, wovon zwei

$$1/3 = 1/8 = \frac{a^2}{20 + a^2}$$

werden, weil das Dioktaeder, wie der Name besagt, sich in zwei gleiche Oktaeder von Zwischenstellung zerlegt.

Hauptoktaeder $c : \dfrac{a}{\mu} : \dfrac{a}{\mu}$ geben für die

Endkante: $\mu = \mu_, = \nu$ und $\nu_, = -\mu$:

$$-\cos = \frac{a^2}{2\,\mu^2 + a^2},\ \text{für } \mu = 1,\ -\cos = \frac{a^2}{2 + a^2}.$$

Seitenkante: $\nu = \mu$, $\mu_, = \nu_, = -\mu$:

$$-\cos = \frac{a^2 - 2\mu^2}{a^2 + 2\mu},\ \text{für } \mu = 1,\ -\cos = \frac{a^2 - 2}{a^2 + 2}.$$

Nebenoktaeder $c : \dfrac{a}{\mu} : \infty a$ geben für die

Endkante: $\nu = 0,\ \mu, = 0,\ \nu, = \mu$:

$$-\cos = \frac{a^2}{a^2 + \mu^2},\ \text{für}\ \mu = 1,\ -\cos = \frac{a^2}{a^2 + 1}.$$

Seitenkante: $\nu = \nu, = 0,\ \mu, = -\mu$:

$$-\cos = \frac{a^2 - \mu^2}{a^2 + \mu^2},\ \text{für}\ \mu = 1,\ -\cos = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}.$$

Die Formeln sind äußerst praktisch: die Vesuvianoktaeder haben:

$$-\cos = \frac{a^2}{a^2 + 2} = \frac{3{,}464}{5{,}465} \ldots 129^0\ 20'\ 26''$$
$$-\cos = \frac{a^2 - 2}{a^2 + 2} = \frac{1{,}464}{5{,}464} \ldots 105^0\ 31'\ 30''$$
} Hauptoktaeder.

$$-\cos = \frac{a^2}{a^2 + 1} = \frac{3{,}464}{4{,}464} \ldots 140^0\ 53'\ 40''$$
$$-\cos = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} = \frac{2{,}464}{4{,}464} \ldots 123^0\ 30'\ \ 9''$$
} Nebenoktaeder.

Eben so leicht ist die Berechnung der **Seiten** (ebenen Winkel). Setzen wir dabei

$$\frac{1}{a} = \alpha = \sqrt{0{,}2887},$$

so ist im **Hauptoktaeder** a : a : c für den ebenen Winkel an der Spitze

$$m = 1,\ n = 0\ \text{und}\ m, = 0,\ n, = 1.$$

Gibt nach Formel (1) pag. 256

$$(\text{Spitze})\ \cos = \alpha^2 + 0 + 0 : \sqrt{\alpha^2 + 1 + 0}\ \sqrt{\alpha^2 + 0 + 1} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1}.$$

Für die Winkel an der Basis

$$m = 1,\ n = 0\ \text{und}\ m, = n, = \infty.$$

$$(\text{Basis})\ \cos = \alpha^2 + \infty + 0\infty : \sqrt{\alpha^2 + 1 + 0}\ \sqrt{\alpha^2 + \infty^2 + \infty^2}$$
$$= 1 : \sqrt{2\,(\alpha^2 + 1)} = \sqrt{\frac{1}{2\alpha^2 + 2}}.$$

Für Vesuvian ist

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} = \frac{0{,}2887}{1{,}2887} \ldots 77^0\ 3'\ 16'';$$
$$\sqrt{\frac{1}{2\alpha^2 + 2}} = \sqrt{\frac{1}{2{,}5774}} \ldots 51^0\ 28'\ 22''.$$

Probe $77^0\ 3'\ 16'' + 2\,(51^0\ 28'\ 22'') = 180^0 = 2\,R$.

Nebenoktaeder a : ∞a : c gibt für den Winkel an der Spitze

$$m = n = 1,\ m, = 1,\ n, = -1$$

$$(\text{Spitze})\ \cos = \alpha^2 + 1 - 1 : \sqrt{\alpha^2 + 1 + 1}\ \sqrt{\alpha^2 + 1 + 1} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 2}.$$

Für die Winkel an der Basis

$$m = n = 1\ \text{und}\ m, = 0,\ n, = \infty,$$

$$(\text{Basis}) \cos = \alpha^2 + 0 + \infty : \sqrt{\alpha^2 + 1 + 1}\ \sqrt{\alpha^2 + 0 + \infty^2}$$
$$= 1 : \sqrt{\alpha^2 + 2} = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 + 2}}.$$

Für Vesuvian ist

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 2} = \frac{0{,}2887}{2{,}2887} \ldots 82^0\ 45'\ 12'';$$
$$\sqrt{\frac{1}{\alpha^2 + 2}} = \sqrt{\frac{1}{2{,}2887}} \ldots 48^0\ 37'\ 24''.$$

Probe $82^0\ 45'\ 12'' + 2\ (48^0\ 37'\ 24'') = 180^0 = 2\ R.$

Setzen wir $\alpha = 1$, so kommt für das Hauptoktaeder $\cos = \frac{1}{3}$ und für das Nebenoktaeder $\cos = \frac{1}{2}$, entsprechend den Winkeln des Oktaeders und Granatoeders im regulären System pag. 243. Hätten wir den Winkel des Oktaeders $2a : 2a : c$ zu bestimmen, so dürften wir nur nach dem Leucitoeder pag. 244 schauen, um für den Winkel an der Spitze den $\cos = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4}$ hinzuschreiben, der im regulären Systeme

$$\cos = \frac{1}{1 + 4} = \frac{1}{5}$$

war. Setzen wir den reciproken Werth der Axe $\frac{1}{a^2} = \alpha^2$, so werden beide Formeln für Seiten und Kanten der Form nach ebenfalls völlig gleich, nur daß die griechischen und lateinischen Buchstaben sich mit einander vertauschen:

Seiten $\cos = (\alpha^2 + mm_, + nn_,) : \sqrt{\alpha^2 + m^2 + n^2}\ \sqrt{\alpha^2 + m_,^2 + n_,^2}$.

Kanten $\cos = (a^2 + \mu\mu_, + \nu\nu_,) : \sqrt{a^2 + \mu^2 + \nu^2}\ \sqrt{a^2 + \mu_,^2 + \nu_,^2}$.

Für das Behalten der Formeln ist das erfreulich. Man darf auch hier pag. 221 die Symbole nur über einander setzen

$$\frac{\alpha + m + n}{\alpha + m_, + n_,} \text{ oder } \frac{a + \mu + \nu}{a + \mu_, + \nu_,},$$

und für das erste Glied die Producte der über einander stehenden Buchstaben, für das zweite die Quadrate mit dem Wurzelzeichen hinschreiben. Denn es ist der Zonenpunkt $1 + ma + na = \frac{1}{a} + m + n$ und der Flächenausdruck $1 : \frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} = \frac{1}{a} : \frac{1}{\mu} : \frac{1}{\nu}$.

Rechnung mit den Tangentenformeln.

Hier ist pag. 213 (5) $b = a$ zu setzen, folglich

1) Kanten $\text{tg} = \sqrt{1 + (m^2 + n^2)\, a^2} : n\mu - m\nu$.

2) Seiten $\text{ctg} = \sqrt{1 + (\mu^2 + \nu^2)\, \alpha^2} : \nu m - \mu n$.

Giltig für $ma + na$ und $\frac{a}{\mu} + \frac{a}{\nu}$, $\alpha^2 = \frac{1}{a^2}$.

Die Formeln der Kanten und Seiten verhalten sich nach allen Beziehungen **reciprok**: wie zur tg die ctg, so verhält sich der griechische Buchstabe zum lateinischen, denn m entspricht $\frac{1}{\mu}$, n . . . $\frac{1}{\nu}$, a . . . $\frac{1}{\alpha}$, 1 . . . $\frac{1}{l}$.

Aus Formel (1) ergibt sich sofort allgemein

$$a^2 = \frac{tg^2 (n\mu - m\nu)^2 - 1}{m^2 + n^2}.$$

Um so leichter läßt sich a in den besondern Fällen bestimmen. Solcher sind dreierlei:

Hauptoktaeder, Nebenoktaeder, Dioktaeder (4 + 4kantner).

Hauptoktaeder $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu}$ haben ihre Endkanten in der Axe a, daher ist

$$\nu = \mu,\ m = 0,\ n = \frac{1}{\mu}$$

zu setzen, und wir erhalten sofort

Endkante $\quad tg = \frac{1}{\mu}\sqrt{\mu^2 + a^2} \ldots tg = \sqrt{1 + a^2},\ a = \sqrt{tg^2 - 1}.$

Seitenkante $tg_o = \frac{\mu}{a}\sqrt{2} \qquad \ldots tg^o = \frac{\sqrt{2}}{a},\ a = \frac{\sqrt{2}}{tg_o} = ctg_o \sqrt{2}.$

Im letztern Falle habe ich die wirkliche Kante, und nicht die Neigung zur Axe im Auge. Die Neigung zur Axe c geht aus der allgemeinen Formel (1) hervor, wenn man $\nu = \mu$, $m = \frac{\infty}{\mu}$, $n = -\frac{\infty}{\mu}$ setzt. Es kommt dann

$$tg_{,} = \sqrt{1 + \left(\frac{\infty^2}{\mu^2} + \frac{\infty^2}{\mu^2}\right) a^2} : - \left(\frac{\infty}{\mu} . \mu + \frac{\infty}{\mu} . \mu\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\infty^2} + \frac{2a^2}{\mu^2}} : - (1+1) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2a^2}{\mu^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2\mu^2}}.$$

Gibt für $\mu = 1$ im Oktaeder $tg_{,} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ d. h. die Neigung der Oktaederfläche gegen die Axe c. Durch Umkehrung bekomme ich dann die Neigung $tg_o = \frac{\sqrt{2}}{a}$ gegen die Basis, weil beide sich zu 90° ergänzen.

Nebenoktaeder $\frac{a}{\mu} : \infty a$ haben ihre Endkanten in den Zwischenaxen, daher ist

$$\nu = 0 \text{ und } m = n = \frac{1}{\mu}$$

zu setzen, und wir erhalten sofort

Endkante $\quad tg = \frac{1}{\mu} \sqrt{\mu^2 + 2a^2} \ldots tg = \sqrt{1 + 2a^2}, a = \sqrt{\frac{tg^2 - 1}{.2}}.$

Seitenkante $tgo = \frac{\mu}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots tgo = \frac{1}{a} \quad, a = \frac{1}{tgo} = ctgo.$

Letztere kann man unmittelbar ablesen, denn es ist die Neigung der Diagonale $\frac{a}{\mu} : c$ gegen die Horizontalaxe a. Daher

$$\sin : \cos = 1 : \frac{a}{\mu}, \; tgo = \frac{\mu}{a}.$$

Die Gleichungen für a gehen hervor, wenn wir $\mu = 1$ setzen, und stimmen mit denen überein, welche wir bei den Cosinus-Gleichungen pag. 257 etwas umständlicher fanden. Die Rechnung mit den Seitenkanten gibt das Supplement, was bei der Anwendung stets erwogen werden muß.

Dioktaeder (4 + 4kantner) verbindet beide. Denn seine Endkanten liegen in den Haupt- und Zwischenaxen. Für jene ist n = 0, für diese n = m, folglich

Endkante Hauptaxe $\quad tg = \sqrt{1 + m^2a^2} : m\nu = \frac{1}{\nu} \sqrt{\mu^2 + a^2}.$

Endkante Zwischenaxe $tg_1 = \sqrt{1 + 2m^2a^2} : m\,(\mu - \nu)$
$= \sqrt{(\mu + \nu)^2 + 2a^2} : \mu - \nu.$

Seitenkante $\quad tgo = \frac{1}{a} \sqrt{\mu^2 + \nu^2}.$

Neigung gegen Axe c $ctgo = \frac{1}{a} \sqrt{\mu^2 + \nu^2}.$

Da der Kantenzonenpunkt $m = \frac{1}{\mu + \nu}$ und in der vordern Axe $m = \frac{1}{\mu}$ ist, so konnte m leicht eliminirt werden. Die Seitenkante findet man am leichtesten nach der Weiß'schen Methode pag. 253

$$s = \sin = \frac{a}{\mu} \cdot \frac{a}{\nu} : \sqrt{\frac{a^2}{\mu^2} + \frac{a^2}{\nu^2}} \text{ und } c = \cos = 1$$

für die Neigung gegen die Axe c. Wollen wir die Formel anwenden, so muß der Zonenpunkt $m + n = m\infty - n\infty$ gesetzt werden, und es kommt

$$tgo = \sqrt{1 + (m^2 + n^2)\infty^2 a^2} : -(n\mu\infty + m\nu\infty) = a\sqrt{m^2 + n^2} : n\mu + m\nu.$$

Setzen wir darin $m = \frac{1}{\mu}$ und $n = \frac{1}{\nu}$, so kommt

$$tgo = a\sqrt{\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2}} : \frac{\mu}{\nu} + \frac{\nu}{\mu} = a : \sqrt{\mu^2 + \nu^2},$$

d. h. wir haben die Neigung der Dioktaederfläche gegen die Axe c gefunden. Wird für die Endkante der Zwischenaxe $\mu = \nu$, so ist $tg = \infty$, d. h. der Winkel 90°, das Dioctaeder geht in ein Oktaeder über.

Der Axenwerth a läßt sich aus den drei Formeln sofort ableiten:

$$a^2 = \nu^2\,tg^2 - \mu^2 \ldots tg^2 - 1 \text{ für } \mu = \nu = 1.$$

$$a^2 = \frac{tg,^2 (\mu-\nu)^2 - (\mu+\nu)^2}{2} \ldots \frac{tg,^2 - 1}{2} \text{ für } \mu = 1, \nu = 0.$$

$$a = \frac{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}{tgo} \ldots \frac{\sqrt{2}}{tgo} \text{ für } \mu = \nu = 1.$$

Berechnung der **Seiten** ist wie im regulären System pag. 251, nur muß $\alpha^2 = \frac{1}{a^2}$ mit in Rechnung gebracht werden. Für die Winkel auf den Flächen des Hauptoktaeders a : a : c ist $\mu = \nu = 1$, wir erhalten

$$ctg = \sqrt{1 + (\mu^2 + \nu^2)\alpha^2} : \nu m - \mu n = \sqrt{1 + 2\alpha^2} : m - n.$$

Jetzt hängt die Bestimmung der ebenen Winkel in der Sectionslinie a : a nur noch von den Zeichen mn der darin liegenden Zonenpunkte ab. Wir bekommen den Winkel, welchen die zu den Zonenpunkten gehörigen Zonenaxen mit der Halbirungslinie der Oktaederfläche machen.

Für den halben Winkel an der Spitze des Hauptoktaeders ist m = 1 und n = 0, folglich

$ctg = \sqrt{1 + 2\alpha^2} \ldots$ Vesuvian $\sqrt{1 + 2 . 0{,}2887} = \sqrt{1{,}5774} \ldots 38^0\ 31'\ 38''$. Also der ganze Endspitzenwinkel 77° 3' 16", wie oben pag. 261.

Das nächste stumpfere Oktaeder a : ∞a : c hat $\mu = 1$, $\nu = 0$ und m = n = 1, gibt

$$ctg = \sqrt{1 + \alpha^2} \ldots \sqrt{1{,}2887} \ldots 41^0\ 22'\ 36'' \text{ etc.}$$

Tangentenformeln der ganzen Winkel sind etwas weitläufiger. Setzen wir pag. 211 $b = a = \frac{1}{\alpha}$, so gehen sofort die eleganten Formeln hervor:

$$\text{Seiten} \pm ctg = (\alpha^2 + mm, + nn,) : \sqrt{(m - m,)^2\alpha^2 + (n, - n)^2\alpha^2 + (mn, - m,n)^2},$$

$$\text{Kanten} \mp ctg = (a^2 + \mu\mu, + \nu\nu,) : \sqrt{(\mu - \mu,)^2 a^2 + (\nu, - \nu)^2 a^2 + (\mu\nu, - \mu,\nu)^2}.$$

Sie verhalten sich gegen einander ebenfalls vollständig reciprok; nur ctg bleibt, weil die Perpendikel auf die Flächen-Supplementwinkel einschließen; es ändern daher nur die Vorzeichen.

Beispiel. Für den **ebenen Winkel** an der Spitze des Oktaeders a : a : c wird

$$m = 1,\ n = 0 \text{ und } m, = 0,\ n, = 1$$

$$+ ctg = \alpha^2 : \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + 1} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{2\alpha^2 + 1}} = \frac{0{,}2887}{\sqrt{1{,}5774}} \ldots .\ 77 . 3 . 16$$

Vesuvian pag. 261.

Kante desselben Oktaeders hat

$$\mu = 1,\ \nu = 1 \text{ und } \mu, = 1,\ \nu, = -1$$

$$- ctg = a^2 : \sqrt{4a^2 + 4} = \frac{a^2}{2} : \sqrt{a^2 + 1} \ldots \frac{1{,}732}{\sqrt{4{,}464}}\ 129.20.27 \text{ pag. } 258.$$

Darstellung des Vesuviansystems.

Herr v. Zepharovich (Sitzungsberichte Math. Naturw. Cl. Wien. Acad. 1864 Bd. 49. 1 pag. 10) wies darin folgende 46 verschiedene Flächenzeichen nach:

Geradendfläche 001;

Oktaeder 1.1.20, 1.1.10, 119, 118, 117, 116, 115, 114, 113, 112, 335, 445, 111, 885, 221, 331, 551;

Nebenoktaeder 102, 101, 302, 201, 301;

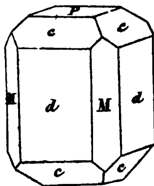
Dioktaeder 747, 212, 423, 211, 421, 737, 833, 319, 315, 629, 313, 312, 311, 61.20.20, 411, 511, 711;

Säulen 110, 530, 740, 210, 310, 100.

Unter den Oktaedern fehlt auffallender Weise das alte Hauy'sche r 441 $= \frac{a}{4} : \frac{a}{4} : c$, welches ich neben dem Phillip'schen p 331 $= \frac{a}{3} : \frac{a}{3} : c$ nach alter Gewöhnung und namentlich wegen seiner Wahrscheinlichkeit nicht gern misse. Denn halten wir uns an die deutlichste Figur (Hauy Traité ed. Weiss tab. 47 fig. 74), so erzeugt r nicht auf s311 sondern auf x 411 ein Parallelogramm, r muß also in die Axenkante x/x $= c : \frac{1}{4}a$ fallen. Freilich widerspricht dem dann die darunter stehende Horizontalprojection, die ich (Handbuch Miner. 1855 pag. 230) in dieser Beziehung „verbessert" copirte. Könnte man das Exemplar sehen, so würde ein Blick den Streit lösen. Merkwürdig ist es, daß sie nach der Behauptung von Zepharovich noch nicht wieder beobachtet wurde.

Um uns nun in die Menge zu finden, nehmen wir die Projection auf die Würfelfläche tab. 2 fig. 1 zur Hand. Denn da die Horizontalaxen aa gleich lang sind, die ungleiche c uns nicht zu Augen kommt, so läßt sich das viergliedrige Bild nur aus dem Flächencomplex erschließen. Es zerlegt sich der

1. **Würfel** 100 $= a : \infty a : \infty a$, welcher im Regulärsystem drei Flächen bezeichnet, jetzt in



Geradendfläche P 001 $= \infty a : \infty a : c$, die einzige **Eins** des Systemes, und

Zweite Quadratsäule M $= 100 = a : \infty a : \infty c$. Die Fläche 100 ist zweideutig, denn sie bedeutet 100 und 010, da a $=$ a d. h. $a : \infty a : \infty c = \infty a : a : \infty c$ sein muß.

2. **Oktaeder** 111 $= a:a:a$ wird c 111 $= a : a : c$, bleibt aber vierdeutig, da es wie im Regulärsystem 4 Quadranten füllt.

3. **Granatoeder** 110 $= a : a : \infty a$ zerlegt sich in

Erste Quadratsäule d 110 $= a : a : \infty c$, die Seitenkanten und

Nebenoktaeder o101 $= a : \infty a : c$, die Endkanten des Oktaeders abstumpfend.

4) **Pyramidenwürfel** 102 = a : ∞a : ½a, zerlegt sich in

Achtseitige Säule f 120 = a : ½a : ∞c, Kante M/d abstumpfend, daher in jeden Quadranten zwei Flächen fallen; ein

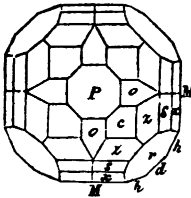
scharfes Nebenoktaeder u 201 = ½a : ∞a : c, unter o Axenkante z/z abstumpfend, und ein

stumpfes Nebenoktaeder v 102 = a : ∞a : ½c = 2a : ∞a : c, Horizontalkante o/P abstumpfend.

Wir haben also eine vollständige Verbindung vom viergliedrigen Hexaid, Oktaeder, Dodecaid und Pyramidenhexaid, die sich von einer regulären Projection in Nichts unterscheidet, außer daß in der Natur dieselbe nicht vier sondern acht Flächengruppen bildet: eine Endfläche, drei Säulen und vier Oktaeder.

Nehmen wir jetzt außer den Sectionslinien noch die Flächenorte hinzu, so kommen zunächst die Punkte des

5) **Leucitoeder** 112, das sich zerlegt, in ein gerade nicht häufiges



Oktaeder m 112 = a : a : ½c = 2a : 2a : c, die Horizontalkante c/P abstumpfend, und eines der wichtigsten

Dioktaeder z 211 = ½a : a : c, das in jedem Quadranten zweimal erscheinen, also eine 4 + 4-kantige Pyramide, den allgemeinsten Körper des Systemes geben muß. Auch das

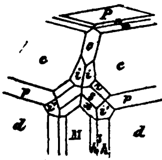
6) **Pyramidenoktaeder** 221 ist noch vollständig vertreten, denn längst bekannt ist in Tyrol und Rußland

Oktaeder ω 221 = ½a : ½a : c schmal unter Fläche c 111 gelegen, und das

Dioktaeder 212 = ½a : a : ½c = a : 2a : c stumpft die Kante o/c ab, und kommt an den schwarzen Krystallen vom Rympfischweng bei Zermatt vor. Zur Vollständigkeit fehlt nur noch das

7) **Pyramidengranatoeder** 123. Sicher ist davon an Vesuv'schen Krystallen das längst gekannte

Dioktaeder i 132 = a : ⅓a : ½c = 2a : ⅔a : c, welches in die Diagonalzone des Hauptoktaeders fällt, wie man aus der Projection des regulären Systemes ersieht (Methode Kryst. 1840 tab. 1). Levy gab auch noch ein weiteres Dioktaeder i'231 = ½a : ⅓a : c an, was jedoch nach nebenstehender Zeichnung wahrscheinlicher ein



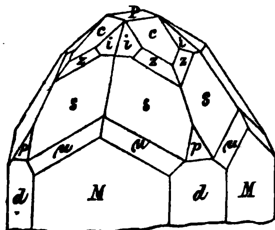
Dioktaeder 241 ist, zum nächst häufigen Trigonpolyeder des regulären Systems gehörig, das auch schon eingesetzt ist. Dann muß es aber in die Kante x/x und d/s fallen. Auch vom dritten Trigonpolyeder 135 durch die Sectionslinie des Leucitoeders pag. 159 eingesetzt, wird wenigstens ein

Dioktaeder σ 135 = a : ⅓a : ⅕c = 5a : ⅗a : c vom Wildkreuzjoch

im Pfitschthal, freilich unsicher angegeben (Zepharovich l. c. pag. 88). Um so wichtiger ist das gleichfalls eingesetzte

Leucitoid 113, welches mit seinen beiden Körpern zu den gewöhnlichsten Flächen gehört, nemlich das

Oktaeder n 113 = a : a : $\frac{1}{3}$c = 3a : 3a : c, und das häufigste und größte



Dioktaeder s 131=a:$\frac{1}{3}$a:c, welches im Saasthale sogar als selbstständige Endigung vorkommt.

Nehmen wir dazu dann noch die weitern vollständigen Leucitoide 114 mit 411, 115 mit 511, 117 mit 711; ferner das vollständige Pyramidenoktaeder 133 mit dem Oktaeder p 331 = $\frac{1}{3}$a : $\frac{1}{3}$a : c und dem Dioktaeder y 133=a : $\frac{1}{3}$a : $\frac{1}{3}$c=3a : a : c, nebst dem Pyramidenwürfel 130, wovon die achtseitige Säule h 130 = a : $\frac{1}{3}$a : ∞c und das scharfe Nebenoktaeder 301 = $\frac{1}{3}$a : ∞a : c bekannt ist, so möchte damit wohl das Wichtigste erwähnt sein.

Kein einziges Trigonpolyeder ist vollständig, obwohl die zunächst bei der Deduction eingesetzten 132, 241, 135 wenigstens durch ein Dioktaeder vertreten sind.

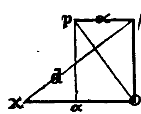
Pyramidenoktaeder sind zwei vollständig: 221 mit 122, und 331 mit 133;

Leucitoide sogar fünf: 112 mit 211, 113 mit 311, 114 mit 411, 115 mit 511 und 117 mit 711.

Pyramidenwürfel ist wenigstens der gewöhnliche häufig da, aus Säule 210 und zwei Oktaedern 201 mit 102 bestehend; zu dem zweiten 310 mit 301 muß das scharfe Oktaeder 103 = $\frac{1}{3}$a : ∞ : c noch gefunden werden.

Granatoeder, Oktaeder und Würfel wird selbstverständlich fast bei keinem viergliedrigen Systeme vermißt.

Specifisch viergliedrig ist die Menge über einander liegender Oktaederflächen, die zum größten Theil über dem Hauptoktaeder stehen, folglich die Kante zwischen Oktaeder- und Endfläche abstumpfen. Sie gehören alle Leucitoiden an, die darunter Pyramidenoktaedern. Von den sechszehn Oktaedern liegen vier (885, 221, 331, 511) darunter, zwölf (445, 335, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 1.1.10, 1.1.20) darüber. Phoronomisch könnte man in dem Ueberwiegen der obern Oktaederflächen eine vorherrschende Wirkung der Hauptaxe c erkennen, die ja das ganze System beherrscht. Denn



wirkte parallel der aufrechten Axe c = 1 eine Kraft μ, und parallel der Seitenaxe a eine Kraft α, so wäre op die Diagonale dieser beiden wirkenden Kräfte μ und α. Eine Linie senkrecht auf diesen Träger pag. 58 würde die Horizontalaxe in

$$x = \frac{\mu^2}{\alpha} = \mu^2 a$$

schneiden. Diese Linie $\mu : \mu^2 a = 1 : \mu a$ stellt aber die Diagonale eines Nebenoktaeders $c : \mu a : \infty a$ vor. Da $\alpha = \frac{1}{a} = \sqrt{0{,}2887}$ ist, so entsteht das stumpfe Oktaeder 102 = $a : \infty a : \frac{1}{2}c = 2a : \infty a : c$ des Pyramidenwürfels, wenn $\mu = 2$ und $\alpha = \sqrt{0{,}2887}$ ist. Was für die Nebenoktaeder gilt, gilt auch für die Oktaeder, und für alle Flächen. Einfache Zahlen sind dabei wünschenswerth, und auch wahrscheinlich, doch weicht selbst die Fläche $20a : 20a : c$ auf der Mussaalp mit 187° 44′ Neigung gegen die Geradendfläche noch über 2° vom gestreckten Winkel ab.

Nebenoktaeder, welche mit den Säulen zum Granatoeder und zu den Pyramidenwürfeln zählen, sind nicht viel vorhanden. Sie stumpfen hauptsächlich die Endkanten vorhandener Oktaeder ab: 101 gehört zu 111, 102 zu 112, 201 zu 221, 301 zu 331. Nur 302 hat bei den Oktaedern keine Unterlage, da muß man dann zum Dioktaeder 312 schreiten. Die Säulen stumpfen die Seitenkanten der Körper ab, 110 gehört sämmtlichen Oktaedern, 100 sämmtlichen Nebenoktaedern an. Die übrigen müssen bei den Dioktaedern untergebracht werden: 210 stumpfen die Seitenkanten aller ab, die mit 21 beginnen, also 211, 212, 423 = $21\frac{3}{2}$, 421 = $21\frac{1}{2}$ liegen damit in einer Zone; die am häufigsten gefundene 310 hat daher die meisten Zonen, nemlich 311, 312, 313, 315, 319, 629 = $31\frac{9}{2}$. Wahrscheinlich gehört dazu auch 61 . 20 . 20 = $\frac{61}{20}$. 1 . 1, weil es der 311 ausnehmend nahe kommt. Von den übrigen findet 740 nur 747 vor, und 530 hat keine, sie würde gleichsam von den gewöhnlichen Trigonpolyedern 531 fordern.

Von den siebzehn Dioktaedern fallen elf in die erste Kantenzone $a : c$, wie man aus dem Zeichen sogleich ersehen kann. Beginnen wir mit dem langaxigsten:

Granatoeder		$= \infty a : a : c$
133	$= a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}c$	$= 3a : a : c$
377	$= \frac{1}{3}a : \frac{1}{7}a : \frac{1}{7}c$	$= \frac{7}{3}a : a : c$
122	$= a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}c$	$= 2a : a : c$
477	$= \frac{1}{4}a : \frac{1}{7}a : \frac{1}{7}c$	$= \frac{7}{4}a : a : c$
Oktaeder		$= a : a : c$
211		$= \frac{1}{2}a : a : c$
833	$= \frac{1}{8}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}e$	$= \frac{3}{8}a : a : c$
311		$= \frac{1}{3}a : a : c$
61.20.20	$= \frac{1}{61}a : \frac{1}{20}a : \frac{1}{20}c$	$= \frac{20}{61}a : a : c$
411		$= \frac{1}{4}a : a : c$
511		$= \frac{1}{5}a : a : c$
711		$= \frac{1}{7}a : a : c$
Würfel		$= 0a : a : c$

Von den übrigen sechs fallen 423, 421, 312 in die Diagonalzone $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ des Hauptoktaeders, und den übrigen drei 319, 315, 629 fehlt es nicht an Zonen, wie der Entwurf unserer

Projection tab. 2 fig. 1 auf die Geradendfläche sogleich zeigt. Zu dem Ende tragen wir auf das Axenkreuz ab die Linien a : a, 2a : 2a, 3a : 3a, 4a : 4a, 5a : 5a ein. Weiter braucht man nicht zu gehen, aber man kann, wenn man den Platz nicht zu sparen hat, die Figur bis 20a : 20a ausdehnen. Tragen wir dann noch die Säulenflächen dd ein, so ist das Netz für die übrigen Flächen vorbereitet. Zunächst lassen wir die Nebenoktaeder $\frac{1}{2}$a : ∞a und 2a : ∞a folgen. Daraus kann man dann sofort nach dem Kantenzonengesetz die Punkte für $\frac{1}{3}$a : ∞a und $\frac{2}{3}$a : ∞a construiren: denn man darf nur von a : $\frac{1}{2}$a ziehen, so kommt auf der Zwischenaxe $\frac{d}{1+2} = \frac{d}{3}$; ebenso von a : 2a .. $\frac{2}{3}$d. Die Säulen f = a : 2a : ∞c und h = a : 3a : ∞c können wir aus den Punkten unmittelbar ablesen. Denn f geht vom Mittelpunkt zum Zonenpunkt a + 2a, und h zum a + 3a. Hätten wir das Netz weiter ausgedehnt, so würde 350 durch 3a + 5a und 470 durch 4a + 7a gezogen werden, allein man kann sich da auch mit $\frac{3}{2}$a + $\frac{5}{2}$a und $\frac{4}{4}$a + $\frac{7}{4}$a behelfen. Jetzt bleiben nur noch die **Dioktaeder**, welche meist in der ersten Kantenzone liegen, d. h. durch den Axenpunkt a gehen. Zur klareren Uebersicht wurde nur der eine vordere links eingezeichnet. Die Strahlen von a nach 3a, 2a, $\frac{a}{2}$ gehen durch schon gegebene Punkte. Dagegen muß a : $\frac{7}{3}$a nach dem Punkte $\frac{a'}{2}$ + $\frac{7}{2}$b gezogen werden. Denn eine Linie durch diese Zonenpunkte gibt nach pag. 196

$$\begin{array}{c} a + 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} \end{array} \qquad \tfrac{7}{2}a : \tfrac{3}{2}b : \tfrac{7}{2}c = a : \tfrac{3}{7}b : c,$$

da wir den Axenschnitt invertiren müssen, so geht die Linie durch $\frac{7}{3}$b = $\frac{7}{3}$a. So einfach die Anwendung der Formel schon ist, so kann man sie doch noch abkürzen. Denn wenn der zweite Zonenpunkt, nach welchem die Sectionslinie geht, im Quadranten a'b liegt, so haben wir allgemein

$$\begin{array}{c} a + 0b \\ -m + n \end{array} \text{ d. h. } (n - 0)a : (1 + m)b + (n . 1 + m . 0)c = a : \frac{m+1}{n}b : c.$$

Der Axenschnitt hat also den Ausdruck $\frac{n}{m+1}$a, da ich invertiren muß. Ist

$$\frac{n}{m+1} = \tfrac{7}{4},$$

und setze ich n = 7, so ist m + 1 = 4 oder m = 3. Eine Linie von a nach 3a' + 7b gezogen, gibt den Schnitt $\frac{7}{4}$b. Setze ich in

$$\frac{n}{m+1} = \tfrac{3}{8},\ n = 3,\ \text{so ist}\ m = 7,$$

folglich der Punkt $7a' + 3b$ der erforderliche, zu welchem von a hingezogen $\frac{3}{8}b$ kommt.

Für $\dfrac{n}{m+1} = \frac{1}{3}$ und $n = 1$, ist $m = 2$, also $2a' + b$,

$\dfrac{n}{m+1} = \frac{1}{4}$ und $n = 1$, ist $m = 3$, also $3a' + b$.

So findet sich für $\frac{1}{5}$ . . . $4a' + b$, für $\frac{1}{7}$ . . . $6a' + b$ ꝛc.

Hätten wir $\dfrac{n}{m+1} = \frac{20}{61}$, so wird für $n = 20$, $m = 60$, ein ferner Punkt

$60a' + 20b$ würde also den Schnitt $\frac{20}{61}b$ geben. Kokscharow erwähnt sogar einer Fläche $\frac{100}{303}b : a : c$, das gäbe für $n = 100$, $m = 302$. Hätte er $\frac{100}{301}$ gewählt, so wäre der Punkt $300a' + 100b$, was uns wahrscheinlicher erscheinen will. Der phoronomische Einfluß der Axe 1 würde sich darin bestimmter aussprechen. Da der Zonenpunkt wie z. B. $7a + 3b'$ für $a : \frac{3}{8}b$ schon etwas weit abliegt, so kann ich leicht einen nähern ermitteln. Ich darf zu dem Ende in den allgemeinen Ausdruck $\dfrac{n}{m+1} = \frac{3}{8}$ nur $n = \frac{3}{2}$ setzen, so bekommen wir

$$\frac{\frac{3}{2}n}{m+1} = \frac{3n}{2m+2},\ \text{d. h.}\ 2m + 2 = 8,\ \text{oder}\ m = 3.$$

Die Fläche geht also auch durch den Punkt $3a' + \frac{3}{2}b$. Ganz auf dieselbe Weise finde ich für $a : \frac{7}{4}b$ statt des Punktes $3a' + 7b$ den nähern $a' + \frac{7}{2}b$ ꝛc.

Die übrigen Dioktaeder dürfen wir nur einzeichnen, namentlich wenn das Netz bis zu $10a : 10a$ ausgedehnt wird.

Wir können nun aber auch in derselben Figur die Punkte als Flächenorte ansehen, wie das im hintern Quadranten geschehen und eingeschrieben ist. Jetzt brauchen wir einen großen Theil der Orte nur hinzusetzen, und wäre die Figur ausgeführt, so würden wenige fehlen. Aber man kann sie eben so leicht construiren. So liegen z. B. die Orte der Dioktaeder aus der ersten Kantenzone in der Sectionslinie $a' : \infty b$. Die meisten 151, 141, 131, 121, 111, 212, 313 sind durch die gewöhnlichsten Linien eingesetzt; nur die seltenern Orte 383, 747, 737 wollen sich auf den ersten Blick nicht recht fügen. Da $383 = 1 + \frac{3}{8}$ ist, so darf ich nur $\frac{1}{3}$ vom Punkte 131 weggehen, um seine Stelle genau anzugeben. Eben so ist $747 = 1 + \frac{4}{7}$ und $737 = 1 + \frac{3}{7}$. Der Schnitt $\frac{1}{7}$ ist im vordern Quadranten eine bekannte Größe, folglich läßt sich die Stelle leicht finden. Aber wir können sie auch wieder mit der Sectionslinienformel pag. 195 suchen. Denn da die Zonenlinie $a' : \infty b$ geht, und die erzeugende Linie den allgemeinen Ausdruck

$\frac{a'}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ hat, so muß die Controlformel pag. 199

$$m\mu + n\nu = 1$$

gelten. Es ist aber in allen Fällen m = 1, folglich

$$\mu + n\nu = 1 \text{ oder } n = \frac{1 - \mu}{\nu}.$$

Suchen wir jetzt den Schnittpunkt $737 = 1 + \frac{3}{7}$, so muß $m + n = 1 + \frac{3}{7}$ sein,

$$\text{d. h. } \frac{1 - \mu}{\nu} = \tfrac{3}{7}.$$

Setzen wir darin $\nu = 7$ oder $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{7}$, so ist $\mu = -2$ oder $\frac{1}{\mu} = -\frac{1}{2}$, die Fläche, welche den Punkt 737 erzeugt, geht also $\frac{1}{2}a : \frac{1}{7}b'$.

Da es nun aber jede beliebige Fläche des Zonenwirtels $a' + \frac{3}{7}b$ sein kann, so dürfen wir für eine der μ und ν jede Zahl von 0 bis ∞ setzen, und finden dazu stets einen rationalen Ausdruck der andern. Geben wir der Gleichung die Form

$$7 - 7\mu = 3\nu,$$

und setzen $\mu = \frac{1}{7}$, so ist $\nu = 2$, d. h. die Fläche $7a' : \frac{1}{2}b'$ erzeugt den Punkt, da

$$1 \,.\, \tfrac{1}{7} + 2 \,.\, \tfrac{3}{7} = 1$$

ist. Von den übrigen sechs Dioktaedern sind die Punkte

$$241,\ 132 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} \text{ und } 243 = \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{3}$$

durch die gewöhnlichsten Sectionslinien gegeben. Die noch übrigen drei

$$139 = \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3},\ 269 = \tfrac{2}{9} + \tfrac{2}{3},\ 135 = \tfrac{1}{5} + \tfrac{3}{5}$$

liegen in der Sectionslinie h $130 = \frac{a}{3} : b : \infty c$, worin ja alle Flächenorte fallen, die mit 13 beginnen. Da $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$ gefundene Größen sind, so lassen die Orte sich sofort mittelst eines rechtwinklichen Brettes bestimmen. Will man es mit Sectionslinien finden, so wird

139 auf h durch $\frac{4}{9}a' : \frac{4}{9}b'$
269 . . . . $\frac{8}{9}a' : \frac{8}{9}b'$
135 . . . . $\frac{4}{5}a' : \frac{4}{5}b'$

eingesetzt. Natürlich kann man dazu wieder allgemeine Formeln entwickeln. Denn die Sectionslinie einer Säule $\frac{a'}{\mu \,.\, \infty} : \frac{b}{\infty}$ wird von der Oktaedersectionslinie $\frac{a}{\mu_{\prime}} : \frac{b}{\mu_{\prime}}$ im Zonenpunkte

$$\frac{a}{\mu_{\prime}(\mu + 1)} + \frac{\mu}{\mu_{\prime}(\mu + 1)} b$$

geschnitten. Wir dürfen nur $-\mu \,.\, \infty : \infty$ und $\mu_{\prime} : \mu_{\prime}$ in der Zonenpunktformel pag. 188 setzen. Für unsern Fall ist in der Säule $\mu = 3$, also geht die allgemeine Formel in die besondere

$$\frac{a}{4\mu,} + \frac{b}{\frac{4}{3}\mu,} \text{ über.}$$

Setzen wir daher

$\mu, = \frac{9}{4}$ d. h. $\frac{a}{\mu,} : \frac{b}{\mu,} = \frac{4}{9}a : \frac{4}{9}b$ kommt Zonenpunkt $\frac{a}{9} + \frac{b}{3} = 139$;

$\mu, = \frac{9}{8}$ . . . . . $= \frac{8}{9}a : \frac{8}{9}b$ . . . . $\frac{2a}{9} + \frac{2b}{3} = 269$;

$\mu, = \frac{5}{4}$ . . . . . $= \frac{4}{5}a : \frac{4}{5}b$ . . . . $\frac{a}{5} + \frac{3b}{5} = 135$.

Die Orte der zahlreichen Oktaeder selbst liegen in der Sectionslinie der Säule d, worauf innerhalb des Oktaederortes 111 alle Flächen, welche mit 11 anfangen, liegen müssen. Da das die Kantenzonenlinie ist, so kommt bei ächten Brüchen die Zahl durch einfache Addition der Nenner; z. B. zwischen $\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{7}$ liegt $8 = 1 + 7$. Die Orte reichen daher zwar nicht so nahe an den Mittelpunkt heran, wie die gleichnamigen Brüche der Sectionslinien, aber immer nahe genug, um in hohen Zahlen für das Projectionsbild keinen wesentlichen Nutzen zu bieten. Die Orte der Säulenflächen liegen im Unendlichen, und wenn man Platz hat, so ist es für den Abschluß des Bildes zweckmäßig, es zu umkreisen, und in die Kreislinien die Flächenorte der Säulen zu stellen. Wir haben damit dann sogleich das Skelet der

Kugelprojection tab. 2 fig. 2 gewonnen. Die Radien der Säulen dürfen wir nur in ganz gleichen Winkeldistanzen, wie in unserer Projection auf die Würfelfläche, eintragen. Denn in allen Systemen, wo $a = b$ ist, bekommt die Sectionslinie, welche auf einen Mittelpunktsstrahl $0; ma + nb$ senkrecht steht, den Ausdruck $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = na : mb$. Ist nun $a = b$, so hat Strahl wie Sectionslinie den gleichen Ausdruck $na + ma = ma : na$. Nehmen wir z. B. im vordern Quadranten Fläche h $310 = 3a + b$, und ziehen eine Linie $a : 3b$, so steht diese senkrecht gegen den Strahl. Der Strahl, welcher mir als Sectionslinie eine Fläche angibt, die in b zum kleinsten Schnitt kommt, gibt mir als Flächenträger die gleichwerthige Fläche, welche aber in a zum kleinsten Schnitt kommt. Es findet also ein Umschlagen statt, was aber auf das Bild keinen Einfluß hat, denn was für a recht ist, ist für b billig. Will man das Skelet nicht auf diese Weise anlegen, so muß man entweder Zonenkreise ziehen, oder die Säulenwinkel berechnen und mit dem Transporteur eintragen.

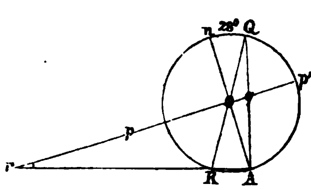
Der Ort des Hauptoktaeders c 111 in die Zwischenaxen d fallend liefert gleichsam den Cardinalpunkt des Bildes. Zu dem Ende tragen wir den halben Seitenkantenwinkel von $37^0\ 14' = dp$ als Centralwinkel ein, so bestimmt eine Linie von p nach dem Augenpunkte P in der Verticale d den Oktaederort 111 in der Horizontale d. Wir

haben nun die Wahl, mit den Zonenkreisen m oder o zu beginnen. Beim regulären System pag. 139 durften wir nur mit dem Radius $\sqrt{2}$ einen Kreis schlagen, um im Durchschnittspunkte der d den Ort der Oktaederfläche zu bestimmen. Bei stumpfern Oktaedern muß der Ort umgekehrt wie bei meiner Linearprojection, innerhalb, bei schärfern außerhalb fallen, so daß wir darin gleich ein Kriterium besitzen, zu beurtheilen, ob das Hauptoktaeder stumpfer oder schärfer als das reguläre sei. Jetzt müssen wir den Radius irgend eines Kreises suchen. Wählen wir z. B. den von m = 2a' : 2b', so dürfen wir nur von 111 nach 110 die punktirte Linie ziehen, in deren Mitte ein Perpendikel errichten, so ist ihr Durchschnitt m mit der verticalen d der gesuchte Mittelpunkt des Sectionskreises m. Er würde verglichen mit dem regulären System dem Leucitoeder entsprechen. Ist ein solcher Cardinalpunkt durch Construction festgestellt, so entwickelt sich alles weitere wie beim Regulärsystem. Das nächste schärfere Oktaeder o = a : c : ∞b entspricht dem Granatoeder, und damit ist in o die Einheit der Axe gefunden. Daher hat obiges m = 2a' : 2b' in der Zwischenaxe $\frac{1}{2}$a + $\frac{1}{2}$b seinen Mittelpunkt; der von c = a' : b' in a + b; der von s = 6a' : 6b' in $\frac{1}{6}$a + $\frac{1}{6}$a, welches der Kantenzonenpunkt ist von einer Sectionslinie, die von $\frac{a}{2} : \frac{b}{4}$ läuft. Alles das geht ohne Rechnung, wenn man mit der Kreisfigur eine Linearprojection in Verbindung setzt, und auf diese Weise einen Quadranten fertig macht, dann die Linearprojection wieder löscht, und die gefundenen Mittelpunkte nur in die andern Quadranten überträgt.

Schon eine leichte Rechnung ergibt, daß für den halben Seitenkantenwinkel von 37° 14' die Entfernung der m vom Mittelpunkte Q, Qm = 1,316, beträgt, folglich ist Qo = Qm. $\sqrt{2}$ = 1,86 = Axe a für c = R = 1.

Dieser überraschende Zusammenhang mit der Axenlänge ließ sich übrigens schon aus dem regulären Systeme in viergliedriger Stellung erschließen: dort betrug die Mittelpunktsentfernung des Granatoeders 1, weil a = c = 1 war. Wir können also jetzt, wenn wir den Radius des Projectionskreises = 1 setzen, den Mittelpunkt des gesuchten Dodecaeders vom Maßstabe a = 1,86 unmittelbar abnehmen. Darin liegt der Schlüssel für die Entwerfung aller folgenden Systeme.

Der Beweis ist leicht: wir greifen blos auf unsern schiefen Kegel pag. 137 wieder zurück, verlegen z. B. den Aufriß in die Axe aca', und suchen den Ort q von der Endkante a : c, welche für a = 1,86 gegen c 61° 44' geneigt ist. Wir haben daher 90°—61° 44' = 28° 16' an die Polare nA anzulegen, so ist q der gesuchte Ort, qr der Durchmesser des gesuchten Kreises, weil immer die drei Winkel Q, A und r



$= 14^0\ 8'$, die Hälfte des angelegten Winkels sind. Es ist aber

oq = tg 14.8 = 9,4010578 ... num. 0,2518
or = ctg 14.8 = 10,5989422 ... num. 3,9714

Folglich der Durchmesser qr = 4,2232,
Halbmesser pq = 2,1116,

woraus der Abstand vom Mittelpunkt op = pq — oq = 1,8598 = a folgt; was zu beweisen war.

Jetzt muß man sich nur noch des Gegensatzes pag. 140 erinnern, welcher zwischen den Axen a in der untern, und den Axen α in der obern Projectionsebene besteht. Ich habe zwar in der großen Linearfigur im hintern Quadranten die Orte, im vordern die Sectionslinien eingetragen, aber streng genommen geht das eigentlich nicht, denn die Orte beziehen sich auf die Axen α, die Sectionslinien auf die Axen a. Allein in der Projection auf die Ebene tritt das nicht hervor, denn in beiden Fällen sind die Seitenaxen einander gleich, haben aber ein verschiedenes Verhältniß zu Axe c, die in den Projectionsfiguren nicht sichtbar wird. Ich kann daher im Gedanken die eine Projection an die Stelle der andern setzen. Es ist das auch wieder ein Vorzug vor der Kugelprojection, worin das Verhältniß von a und α zu c sich auch in der Darstellung geltend macht. Die kleine Fig. 3 tab. 2 legt das dar: für den Radius = 1 ist am Vesuvian Qa = a = 1,86, und Qα = α $= \frac{1}{a} = 0,538$. Ich setzte den Radius = 20 mm, dann ist

$$a = 20 . 1,86 = 37,2 \text{ mm und } \alpha = 20 . 0,538 = 10,8 \text{ mm}.$$

Trage ich nun auf der verticalen Axe a oben und α unten ab, und beschreibe mit Zugrundelegung von a die Kreise unterhalb des Doppelstrichs, so bestimmen mir die Kreise o = α : c : ∞b, und v = 2α : c : ∞b die richtigen Flächenorte 111 = a : a : c, 211 = ½a : a : c, 221 = a : a : 2c ꝛc. Man kann diese Kreise, welche einer Axe parallel gehen, Coordinatenkreise heißen. Dagegen erhalte ich mit Zugrundelegung von α oberhalb des Doppelstrichs die wirklichen Sectionskreise o = a : ∞a : c und v = ½a : ∞a : c, c = a : a : c. Man bemerkt, daß o und v unten und oben gegen einander umschlagen, wie das früher wiederholt auseinandergesetzt ist. Das Liniennetz ist bei beiden zwar dasselbe, aber beide verhalten sich gegen einander reciprok: zwischen den Flächenträgern unten liegen die Supplemente der Kantenwinkel, welchen oben die gleichnamigen Sectionslinien einschließen; die Zonenaxen oben dagegen schließen die Seitenwinkel ein, welche das Supplement zu den Kanten der gleichnamigen Coordinatenkreise unten bilden. Das heißt, wenn ich z. B. den Winkel an der Spitze des Oktaeders auf dem Sectionskreise v oben suche, so ist der das Supplement von der Endkante des Oktaeders, welche die Coordinatenkreise v/v unten einschließen. Es ist also eine Invertirung im

Hauy'schen Sinne, wie früher schon wiederholt angedeutet wurde: eine der interessantesten und von den Rechnern fast ganz übersehene Beziehung, in welcher die beiden Projectionen zu einander stehen.

Da es sich bei der Kugelprojection vorzugsweise um die Orte handelt, so geht man nicht von den griechischen, sondern den lateinischen Axen aus, wie bei dem größern Kreise fig. 2 geschehen. Wollen wir darin die Kantenzone a, so haben wir den Coordinatenkreis $a : c : \infty a$ zu ziehen, worin alle liegen müssen, da die Flächen das allgemeine Zeichen 1m1 haben müssen, worin m jede ganze Zahl und jeden Bruch bedeutet. Ein zweiter Coordinatenkreis bestimmt dann die mittlere Zahl m, indem ich die Axenpunkte $\frac{a}{m}$ zum Mittelpunkte nehme.

Berechnung der Indices. Lassen die Flächen sich nach Zonen nicht entwickeln, so muß man Messungen zu Hilfe nehmen. So ist Vesuvian $s = a : c : \frac{1}{3}a$ zuweilen sehr groß, und doch kennt man nur eine Zone, die erste Kantenzone von Fläche c/c.

Kante s/c $= 150^0\ 29\frac{1}{2}'$, ... $29^0\ 30\frac{1}{2}' = 180 - 150 . 29$

Endkante c/c $= 129^0\ 21$ . . . . . $64^0\ 40\frac{1}{2}' = \frac{1}{2}\ (129 . 21)$

Folglich Fläche s gegen Axenebene $35^0\ 10'$.

Fläche $s = a : c : \frac{1}{\nu} a$, folglich $m = 1$, $n = 0$; $\mu = 1$ gesetzt, kommt

$$tg = \sqrt{1 + (m^2 + n^2)a^2} : n\mu - m\nu = \sqrt{1 + a^2} : \nu,\ \nu = \sqrt{\frac{1 + a^2}{tg^2}}$$

$$\begin{aligned} 1 + a^2 = 4{,}464 \ldots . \lg &= 0{,}6497242 \\ 1\,tg^2\ 35 . 10 &= 9{,}6958254 \\ &\overline{10{,}9538988} \\ ^2)\ & 10{,}4769404 \ldots \text{num. } 3 = \nu. \end{aligned}$$

Oft kann man $s/P = 120 . 29$ messen, gibt halben Winkel in der Basis $59^0\ 31'$. Die Neigung der Fläche $s = a : c : \frac{1}{\nu} a$ gegen die Basis ist

$$\sin : \cos = 1 : \left(a . \frac{a}{\nu} : \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{\nu^2}}\right) = 1 : \frac{a}{\sqrt{\nu^2 + 1}}$$

$$tg = \sqrt{\frac{\nu^2 + 1}{a^2}},\ \nu = \sqrt{a^2\,tg^2 - 1}.$$

$$\begin{aligned} 1\,a^2 &= 0{,}5395779 \\ 1\,tg^2\ 59 . 31 &= 0{,}4602808 \\ &\overline{0{,}9998587} \ldots \text{num. } 10, \text{ also } \nu = \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Würden wir die Cosinusformel pag. 257 anwenden, so müßten wir für die Endkante $= \alpha$ von s die Buchstaben $\mu = \mu_{,} = 1$ und $\nu_{,} = -\nu$ setzen, es käme

$$-\cos = \frac{a^2 + 1 - \nu^2}{a^2 + 1 + \nu^2} \text{ oder } \nu^2 = (a^2 + 1)\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = (a^2+1)\,\mathrm{ctg}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

also die gleiche Formel, aber auf umständlicherem Wege.

Mit der Tangentenformel läßt sich die Sache leicht auch allgemein lösen. Denn setzen wir die Wurzelgröße = z, so ist

$$\mathrm{tg} = \frac{z}{n\mu - m\nu},\ n\mu\mathrm{tg} - m\nu\mathrm{tg} = z, \text{ folglich}$$

$$\mu = \frac{z + m\nu\mathrm{tg}}{n\,\mathrm{tg}} \text{ und } \nu = \frac{n\mu\mathrm{tg} - z}{m\mathrm{tg}}.$$

Nach der Controlformel $m\mu + n\nu = 1$ ist

$$\mu = \frac{1 - n\nu}{m} \text{ und } \nu = \frac{1 - m\mu}{n}.$$

Daraus folgt

$$\mu = \frac{m\,\mathrm{tg} + n\sqrt{1 + (m^2+n^2)a^2}}{(m^2 + n^2)\,\mathrm{tg}} \text{ und } \nu = \frac{n\,\mathrm{tg} - m\sqrt{1+(m^2+n^2)a^2}}{(m^2 + n^2)\,\mathrm{tg}}.$$

In dieser Formel steckt obiger besondere Fall, denn wir dürfen nur

$$m = 1 \text{ und } n = 0$$

setzen, so kommt

$$\mu = 1 \text{ und } \nu = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{\mathrm{tg}},$$

wie oben. Setzen wir $a = 1$, so gelten die Formeln für das reguläre System. Kennen wir daher irgend einen Zonenpunkt $m + n$, worin die zu suchende Fläche fällt, so dürfen wir in dieser blos den Winkel gegen die zugehörige Mittelpunktsebene (Säulenfläche) messen, um sie sofort zu finden.

Miller (Treat. Cryst. pag. 54) nimmt beim Tungstein $e = a : c : \infty a$ als Grundform $p = 111$, dann ist Axe $a = \sqrt{2}.\sqrt{0{,}424} = \sqrt{0{,}848}$. Eine Fläche g liegt in der Diagonalzone $\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right)$ von p, und macht $p/g = 22^\circ\,31'$. Folglich ist der Winkel von g gegen die Kantenzonenebene $90 - 22.31 = 67.29$. Wir haben in der allgemeinen Formel zu setzen $m = n = \frac{1}{2}$, und erhalten sogleich

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{tg} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4})a^2}}{(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})\,\mathrm{tg}} = 1 + \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}a^2}{\mathrm{tg}^2}}$$

$$\text{und } \nu = 1 - \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}a^2}{\mathrm{tg}^2}}$$

$$
\begin{aligned}
l\,(1 + \tfrac{1}{2}a^2) = l\,1{,}424 &= 0{,}1535100 \\
l\,\mathrm{tg}^2\,67.29 &= \underline{0{,}7648370} \\
&\ 9{,}3886730 \\
\sqrt{\ } &= 9{,}6943365 \ldots \text{num. } 0{,}4947 = \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Daher $\mu = \frac{3}{2}$ und $\nu = \frac{1}{2}$, gibt $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : c = \frac{2}{3}a : 2a : c = \frac{1}{3}a : a : \frac{1}{2}c = 312.$

Fläche a macht in der gleichen Zone mit p 68° 6', also haben wir

$$tg^2 \frac{21 . 54 = 9,2084466}{0,9450634}$$

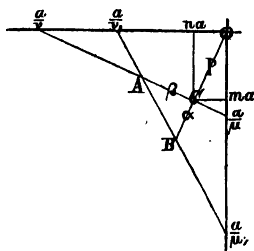
$$\sqrt{} = 0,4725317 \ldots \text{num. } 2,968 = 3.$$

Daher $\mu = 4$ und $\nu = \bar{2}$, also Fläche $4\bar{2}1$. Sie entspricht unserer $s = a : c : \frac{1}{3}a$ (Hdb. Mineral. pag. 500), welche die Kantenzonenlinien in

$$\frac{a}{3+1} : \frac{a}{3-1} = \frac{a}{4} : \frac{a}{2}$$

schneidet. Setzen wir darin Axe a = 1, so haben wir das reguläre System im Auge.

Man kann den Satz noch allgemeiner fassen, und den gemessenen Winkel außerhalb des Zonenpunktes verlegen, dann wird aber die Rechnung umständlicher: Gemessen sei der Winkel A, welchen die beiden beliebigen Ebenen



$$c : \frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} \text{ und } c : \frac{a}{\mu_,} : \frac{a}{\nu_,}$$

mit einander machen. Sectionslinie $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu}$ geht durch den bekannten Zonenpunkt C = ma + na. Da die Linie BO $= \frac{a}{m . \infty} : \frac{a'}{n . \infty}$ geht, so ist ihr Durchschnittspunkt mit $\frac{a}{\mu_,} : \frac{b}{\nu_,}$ nach pag. 188

$$B = \frac{ma}{m\mu_, + n\nu_,} + \frac{na}{m\mu_, + n\nu_,}.$$

Denn für m=n wird es Kantenzonengesetz. Mittelst der Cosinusformel für die Seiten pag. 256 bestimmen wir die Distanzen der Punkte vom Mittelpunkte, wenn wir $m_, = n_, = 0$ setzen, dann kommt sofort für die Poldistanz C

$$\cos = \frac{1}{a^2} + 0 + 0 : \sqrt{\frac{1}{a^2} + m^2 + n^2}\sqrt{\alpha^2 + 0 + 0}$$

$$= \frac{1}{a} : \sqrt{\frac{1}{a^2} + m^2 + n^2}.$$

Für die Poldistanz von B können wir gleich den Ausdruck der Sectionslinie mit einverweben, dann kommt

$$\cos = \frac{1}{a} : \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{m^2 + n^2}{(m\mu_, + n\nu_,)}}.$$

Auf diese Weise gelangen wir durch Subtraction der beiden Poldistanzen zur Seite α. Um im Dreiecke ABC den Winkel C zu finden, muß ich

$$\sin \beta = \frac{\sin B . \sin \alpha}{\sin A}$$

suchen. Setzt man dann

$$\operatorname{tg} B \cdot \cos \alpha = \operatorname{tg} u \text{ und } \frac{\cos A \cdot \cos u}{\cos B} = \cos v,$$

so ist $C = u \pm v$. Im Dreiecke $C \frac{a}{\mu} 0$ kenne ich Kante C und O nebst der zwischenliegenden Seite p, woraus sich $\frac{a}{\mu}$ nach pag. 87 finden läßt. Da nun ferner $m\mu + n\nu = 1$ sein muß, so ist mit μ auch ν bekanut.

Zum Schluß noch etwas über die Benennungen der Viergliedrigen Körper. Wir haben

1) eine **Einzelfläche** $c : \infty a : \infty a$, die stets horizontal (basal) gestellt wird, und daher Geradendfläche heißt. Naumann nannte sie Pinakoid, von *πίναξ* das Brett. Nach alter Benennungsweise würde es ein Monedron, ein Einseit sein, oder wenn man die Parallele mitzählte, ein Dihedron.

2) zwei **Quadratsäulen**, Säule und Gegensäule, die sich nur durch die Stellung von einander unterscheiden $a : a : \infty c$ und $a : \infty a : \infty c$. Die Zwischensäulen $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : \infty c\right)$ sind Hälftflächner von der

3) **Biquadratsäule** $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : \infty c$. Wenn man die Quadratischen Säulen tetragonal nennt, so sind diese ditetragonal. Weiß nannte sie etwas weitläufig 4+4kantige, Werner achtseitige Säulen, da alle Flächen physikalisch gleich sind.

4) **Oktaeder** $a : a : mc$ und Nebenoktaeder $a : \infty a : mc$, jene der Mohsischen Hauptreihe, diese der Nebenreihe angehörig, auch tetragonale Pyramiden genannt. Die Zwischenoktaeder $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : c\right)$ sind nur cycloedrische Hälftflächner der

5) **Dioktaeder** $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : c$ oder 4 + 4 Kantner. Sie bestehen aus einem Oktaeder und Gegenoktaeder, aber beide von Zwischenstellung. Der Name wurde schon im vorigen Jahrhundert von Hill eingeführt. Man kann es auch als ein gebrochenes Oktaeder passend bezeichnen. Ditetragonale Pyramide, mit acht gleichen ungleichseitigen Dreiecken. Der allgemeinste Körper des Systems. Die hemiedrischen Formen: Tetraeder, Scalenoeder, Gyroeder, Cycloeder müssen im Zusammenhange mit denen anderer Systeme betrachtet werden.

3. Dreigliedriges System.

Rechnung mit Cosinusformeln.

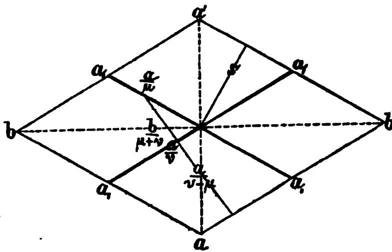
1. Seiten

$$\pm \cos = \frac{1}{a^2} + mm, + 3nn, : \sqrt{\frac{1}{a^2} + m^2 + 3n^2}\ \sqrt{\frac{1}{a^2} + m,^2 + 3n,^2}.$$

2. Kanten

$$\mp \cos = a^2 + \mu\mu, + \tfrac{1}{3}\nu\nu, : \sqrt{a^2 + \mu^2 + \tfrac{1}{3}\nu^2}\ \sqrt{a^2 + \mu,^2 + \tfrac{1}{3}\nu,^2}.$$

Hier ist pag. 206 $b = a\sqrt{3}$ zu setzen. Dies einzusehen, verzeichnen wir uns ein Axenkreuz a,a,, welches sich unter 120° schneidet, verwandeln dasselbe durch Umschreibung des Parallelogramms aba'b' in Kantenzonen, so hat eine beliebige Fläche $\frac{a,}{\mu} : \frac{a,}{\nu}$ in der zwischenliegenden Axe b das Zeichen $\frac{b}{\mu + \nu}$, in der außerhalbliegenden a das Zeichen $\frac{a}{\nu - \mu}$



pag. 191. Die drei gleichen Axen a schneiden sich unter 60°, und zwischen jede je zwei kann ich eine Zwischenaxe b ziehen, die sich in Beziehung auf die Schnitte von a ganz gleich verhält: es liegt also zwischen $\frac{a}{\nu}$ und $\frac{a}{\nu - \mu}$ der Schnitt $\frac{b}{\nu - \mu + \nu} = \frac{b}{2\nu - \mu}$, und zwischen $\frac{a}{\nu - \mu}$ und $\frac{a}{\mu}$ der Schnitt $\frac{b}{\nu - \mu - \mu} = \frac{b}{\nu - 2\mu}$, denn ich muß das eine oder andere mit umgekehrten Vorzeichen herüberschlagen. Der vollständige Ausdruck einer Sectionslinie wird also:

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu + \nu} : \frac{a}{\nu} : \frac{b}{2\nu - \mu} : \frac{a}{\nu - \mu} : \frac{b}{\nu - 2\mu}.$$

Weiß pag. 34 hat dieses Zeichen wenn auch in etwas anderer Form zuerst aufgestellt, und damit gerechnet. Sein Beweis war freilich viel umständlicher, als der unsrige, welcher sich fast durch unmittelbare Anschauung ergibt. Addire ich die Nenner zweier anstoßenden b, so kommt $\frac{a}{(\mu + \nu) + (2\nu - \mu)} = \frac{a}{3\nu}$ statt $\frac{a}{\nu}$, und $\frac{a}{3\nu - 3\mu}$ statt $\frac{a}{\nu - \mu}$.

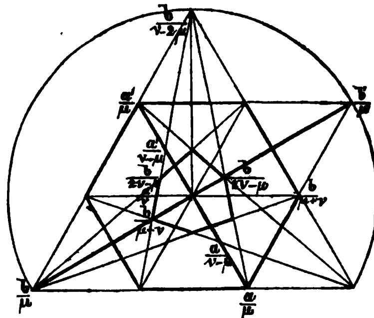
Das Zwischenkantenzonengesetz pag. 199 kommt, wenn ich $\frac{b}{\mu + \nu}$ mit dem zweitfolgenden a d. i. $\frac{a}{\nu - \mu}$ verbinde, dann ist

$$\frac{2a}{(\mu + \nu) + (\nu - \mu)} = \frac{2a}{2\nu} = \frac{a}{\nu}.$$

Da nun im regulären Sechseck die Seiten den halben Diagonalen a gleich sind, so ist das Perpendikel s vom Mittelpunkt auf die Seite gefällt $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, folglich $b = 2s = a\sqrt{3}$.

Während wir also aus unseren vollständigen Zeichen jeden Augenblick die Schnitte der drei Seitenaxen ablesen können, wovon nur zwei bekannt zu sein brauchen, so ist es für die Winkelrechnung bequem, ein für allemal die zwei rechtwinklichen Axen des Parallelogramms bei den Rechnungen festzuhalten. Wegen der Dreigliedrigkeit des Systemes muß man natürlich drei Mal solche rechtwinklichen Axen wählen können. Die Formeln für Seiten und Kanten sind in allen Beziehungen wieder reciprok, ganz wie beim viergliedrigen Systeme pag. 256, sobald wir $\frac{1}{a} = \alpha$ setzen.

Um hiermit zu rechnen, bedarf es nur der Projection des Rhomboeders, Diheraeders und Dreikantners. Dann erkennen wir drei Axen b, welche je auf eine der drei Axen a senkrecht stehen. Wird ein Paar davon durch dickere Linien fixit, so kommt für



Rhomboeder im Allgemeinen das Zeichen $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu}$, und ihre

Endkante liegt in $\frac{b}{\mu}$, das gibt für die Berechnung des Winkels zwischen den

$$\text{Ebenen } c : \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu} \text{ und } c : \frac{a'}{\mu} : \frac{b}{\mu}$$

$$\nu_, = \nu = \mu \text{ und } \mu_, = -\mu, \text{ folglich}$$

$$\cos\omega = a^2 - \mu^2 + \frac{\mu^2}{3} : \sqrt{a^2 + \mu^2 + \frac{\mu^2}{3}}\sqrt{a^2 + \mu^2 + \frac{\mu^2}{3}}$$

$$= a^2 - \tfrac{2}{3}\mu^2 : a^2 + \tfrac{4}{3}\mu^2 = \frac{3a^2 - 2\mu^2}{3a^2 + 4\mu^2}.$$

Gibt für das Hauptrhomboeder $\mu = 1$

$$\cos\omega = \frac{3a^2 - 2}{3a^2 + 4} = \frac{a^2 - 0{,}666\ldots}{a^2 + 1{,}333\ldots}.$$

Daraus folgt für die Berechnung der Seitenaxe

$$a = \mu\sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\omega} - 1{,}333\ldots}$$

Hätten wir gleich den halben Rhomboederkantenwinkel gesucht, welchen die Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu}$ gegen die Axenebene bc macht, so setzten wir in der Kantenformel

$$\nu = \mu;\ \mu_, = \infty,\ \nu_, = 0,\ \text{also}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega = a^2 + \mu.\infty + 0 : \sqrt{a^2 + \mu^2 + \frac{\mu^2}{3}}\ \sqrt{a^2 + \infty^2 + 0}$$

$$= \frac{\mu\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4\mu^2}},$$

woraus

$$a = \mu\sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\omega} - \tfrac{4}{3}} = \mu\sqrt{\frac{3(1 - \cos^2\frac{1}{2}\omega) - \cos^2\frac{1}{2}\omega}{3\cos^2\frac{1}{2}\omega}} = \mu\sqrt{tg^2\tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{3}}$$

sofort hervorgeht. Wie beim Viergliedrigen pag. 258, so läßt sich auch hier die kürzere Formel aus der zweigliedrigen pag. 210 entwickeln, wenn wir $b = a\sqrt{3}$ setzen. Es kommt

$$3.\ \cos = \mu\mu_, - \frac{\nu\nu_,}{3} : \sqrt{a^2 + \mu^2 + \frac{\nu^2}{3}}\sqrt{\mu_,^2 + \frac{\nu_,^2}{3}},$$

giltig für eine Fläche $c : \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ und eine Säule $\infty c : \frac{a}{\mu_,} : \frac{b'}{\nu_,}$, die sich von der viergliedrigen nur durch $\frac{1}{3}$ neben ν und $\nu_,$ unterscheidet. Durch b′ kommt auch hier das negative Vorzeichen in den Zähler. Suchen wir nach dieser Formel den halben Endkantenwinkel von $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu}$, so ist wieder wie vorhin

$$\nu = \mu;\ \mu_, = \infty,\ \nu_, = 0,$$

$$\cos = \mu.\infty + 0 : \sqrt{a^2 + \mu^2 + \frac{\mu^2}{3}}\sqrt{\infty^2 + 0} = \mu\sqrt{3} : \sqrt{3a^2 + 4\mu^2}.$$

Um die Werthe von ∞ und 0 einzusehen, darf man nur die Mittelpunktsebene

$$0a : \infty b = \frac{a}{\infty} : \frac{b}{0} = \frac{a}{\mu_,} : \frac{b}{\nu_,}$$

setzen. Die

Dihexaeder $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu}$ haben dasselbe Zeichen, wie die Rhomboeder, aber ihre Endkanten liegen nicht in $\frac{b}{\mu}$, sondern in $\frac{a}{\mu}$, daher muß für

die ganze Endkante ω

$$\mu, = \nu = \mu \text{ und } \nu, = -\mu$$

gesetzt werden, folglich

$$-\cos\omega = a^2 + \mu^2 - \frac{\mu^2}{3} : \sqrt{a^2 + \mu^2 + \frac{\mu^2}{3}}\sqrt{a^2 + \mu^2 + \frac{\mu^2}{3}}$$

$$-\cos = \frac{3a^2 + 2\mu^2}{3a^2 + 4\mu^2} \text{ (Endkante).}$$

Der Winkel ist hier immer größer als ein rechter, folglich cos negativ. Für die Seitenkanten kommen die beiden Flächen

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu} \text{ und } \frac{a'}{\mu} : \frac{b'}{\mu}$$

in Betracht, welche einander gegenüber liegen, folglich den Supplementwinkel geben. Wir haben daher in der allgemeinen Formel (1)

$$\mu = \nu;\ \mu, = \nu, = -\mu$$

zu setzen, und bekommen sofort

$$\mp\cos = a^2 - \mu^2 - \frac{\mu^2}{3} : \sqrt{a^2 + \mu^2 + \frac{\mu^2}{3}}\sqrt{a^2 + \mu^2 + \frac{\mu^2}{3}}$$

$$-\cos = \frac{3a^2 - 4\mu^2}{3a^2 + 4\mu^2} \text{ (Seitenkante).}$$

Woraus sich $a^2 = \frac{4}{3}\mu^2 \frac{1 + \cos\omega}{1 - \cos\omega} = \frac{4}{3}\mu^2 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\omega$ ergibt.

Suchen wir die halben Kantenwinkel, so ist für die **halbe Endkante** in Formel (3)

$$\nu = \mu;\ \mu, = 0,\ \nu, = \infty$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega = -\frac{\mu\infty}{3} : \sqrt{a^2 + \mu^2 + \frac{\mu^2}{3}}\sqrt{0 + \frac{\infty^2}{3}} = \mu : \sqrt{3a^2 + 4\mu^2}.$$

$$a = \mu\sqrt{\frac{1}{3\cos\frac{1}{2}\omega^2} - \frac{4}{3}} = \mu\sqrt{\frac{1 - \cos\frac{1}{2}\omega^2 - 3\cos\frac{1}{2}\omega^2}{3\cos\frac{1}{2}\omega^2}}$$

$$a = \mu\sqrt{\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega^2 - 1} \text{ (Endkante).}$$

Für die **halbe Seitenkante** bleibt $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu}$, aber die Mittelpunktsebene wird

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu} : \infty c = \frac{a}{\mu.\infty} : \frac{b}{\mu.\infty} : c = \frac{a}{\mu,} : \frac{b'}{\nu,} : \infty c,$$

folglich ist in (3) zu setzen

$$\nu = \mu;\ \mu, = \pm\mu\infty,\ \nu, = \mp\mu\infty$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega = \mu^2\infty + \frac{\mu^2\infty}{3} : \sqrt{a^2 + \mu^2 + \frac{\mu^2}{3}}\sqrt{\mu^2.\infty + \frac{\mu^2.\infty}{3}}$$

$$= \tfrac{4}{3}\mu^2 : \sqrt{a^2 + \tfrac{4}{3}\mu^2}\ \sqrt{\tfrac{4}{3}\mu^2}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega = 2\mu : \sqrt{3a^2 + 4\mu^2} \text{ (Supplement der halben Seitenkante).}$$

Daraus berechnet sich die Seitenaxe

$$3a^2 \cos \tfrac{1}{2}\omega^2 + 4\mu^2 . \cos \tfrac{1}{2}\omega^2 = 4\mu^2$$
$$3a^2 \cos \tfrac{1}{2}\omega^2 = 4\mu^2 (1 - \cos \tfrac{1}{2}\omega^2) = 4\mu^2 \sin \tfrac{1}{2}\omega^2$$
$$a^2 = \tfrac{4}{3}\mu^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\omega^2$$
$$a = \mu \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\omega \sqrt{1{,}333 \ldots}$$

Mit dem negativen $-\frac{\nu\nu_{,}}{3}$ muß man vorsichtig sein, denn dasselbe kam von der Mittelpunktsebene $\frac{a}{\mu_{,}} : \frac{b'}{\nu_{,}} : \infty c$, welche sich mit einer Ebene $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ vorn im positiven Quadranten schneidet. Wenn nun aber die Mittelpunktsebene $\frac{a}{\mu_{,}} : \frac{b}{\nu_{,}}$ oder $\frac{a'}{\mu_{,}} : \frac{b'}{\nu_{,}}$ geht, dann stimmt sie mit der in der allgemeinen Formel angenommenen nicht überein, es muß also eine der beiden negativ genommen werden, wodurch im Zähler eine Summirung entsteht.

Der **Dreikantner** (Scalenoeder) in der Mitte des Dreiecks pag. 281 hat wie alle das allgemeine Zeichen

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu + \nu} : \frac{a}{\nu} : \frac{b}{2\nu - \mu} : \frac{a}{\nu - \mu} : \frac{b}{\nu - 2\mu}.$$

Seine dreierlei Kanten fallen in die Axe b, sind daher leicht auf folgende Weise gefunden:

1) **stumpfe Endkante** liegt im Punkte $\frac{b}{2\nu - \mu} + 0a$ und ihre Sectionslinien gehen von hier nach $\frac{a}{\mu}$ und $\frac{a'}{\mu}$, folglich:

$$\nu = \nu_{,} = 2\nu - \mu \text{ und } \mu_{,} = -\mu$$

$$-\cos \omega = \frac{a^2 - \mu^2 + \frac{1}{3}(2\nu - \mu)^2}{\sqrt{a^2 + \mu^2 + \frac{1}{3}(2\nu - \mu)^2}\ \sqrt{a^2 + \mu^2 + \frac{1}{3}(2\nu - \mu)^2}}$$
$$= \frac{3a^2 - 2\mu^2 + 4\nu^2 - 4\mu\nu}{3a^2 + 4\mu^2 + 4\nu^2 - 4\mu\nu}.$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega = \frac{\mu\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4\mu^2 + 4\nu^2 - 4\mu\nu}} = \frac{\mu\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4(\mu^2 + \nu^2 - \mu\nu)}}.$$

Denn im letztern Falle wird die zweite Ebene zur Mittelpunktsebene

$$a : \infty b : \infty c = \frac{a}{\infty} : b : c,$$

eigentlich $0a : \infty b : \infty c = \frac{a}{\infty} : \infty b : \infty c = \frac{a}{\infty^2} : b : c$. Wir haben also

$$\nu = 2\nu - \mu \text{ aber } \mu_{,} = \infty,\ \nu_{,} = 1$$

zu setzen, wodurch aus der Formel (2)

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega = \mu\infty : \sqrt{a^2 + \mu^2 + \tfrac{1}{3}(2\nu - \mu)^2}\ \sqrt{\infty^2}$$

sofort hervorgeht, denn wir können alle Glieder, die nicht mit ∞ be-

haftet sind, sogleich weglassen. Setzen wir in diesen Formeln $\mu = \nu$, so kommen die Rhomboeder.

2) **scharfe Endkante** liegt im Punkte $\frac{b}{\mu + \nu} + 0$, und ihre Sectionslinien gehen

$$\frac{a}{\nu - \mu} : \frac{b}{\mu + \nu} \text{ und } \frac{a'}{\nu - \mu} : \frac{b}{\mu + \nu},$$

folglich haben wir zu setzen

$$\mu = \nu - \mu,\ \mu_{,} = \mu - \nu;\ \nu = \nu_{,} = \mu + \nu$$

$$-\cos\omega = a^2 + (\nu - \mu)(\mu - \nu) + \tfrac{1}{3}(\mu + \nu)^2 : a^2 + (\nu - \mu)^2 + \tfrac{1}{3}(\mu + \nu)^2$$

$$= \frac{3a^2 + 6\mu\nu - 3\mu^2 - 3\nu^2 + \mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu}{3a^2 + 3\nu^2 + 3\mu^2 - 6\mu\nu + \mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu}$$

$$-\cos\omega = \frac{3a^2 - 2\mu^2 - 2\nu^2 + 8\mu\nu}{3a^2 + 4\mu^2 + 4\nu^2 - 4\mu\nu}.$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega = \frac{(\nu - \mu)\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4\mu^2 + 4\nu^2 - 4\mu\nu}} = \frac{(\nu - \mu)\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4(\mu^2 + \nu^2 - \mu\nu)}}.$$

Denn für den halben scharfen Winkel handelt es sich um den Schnitt der Fläche

$$\frac{a}{\nu - \mu} : \frac{b}{\mu + \nu} \text{ gegen } a : \infty b : \infty c = \frac{a}{\infty} : b : c,$$

es ist also $\mu = \nu - \mu$, $\nu = \mu + \nu$; $\mu_{,} = \infty$, $\nu_{,} = 1$, so folgt

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega = (\nu - \mu)\infty : \sqrt{a^2 + (\nu - \mu)^2 + \tfrac{1}{3}(\mu + \nu)^2}\ \sqrt{\infty^2}.$$

Setzen wir in diesen Formeln $\nu = 0$, so geht die Linie

$$\frac{a}{\nu - \mu} : \frac{b}{\mu + \nu} \text{ in } \frac{a'}{\mu} : \frac{b}{\mu} \text{ über,}$$

wir gelangen zur Rhomboederformel.

3) **Seitenkante** liegt im Punkte $\frac{b}{\nu - 2\mu} + 0$, und ihre Sectionslinien gehen

$$\frac{a}{\nu} : \frac{b}{\nu - 2\mu} \text{ und } \frac{a'}{\nu} : \frac{b}{\nu - 2\mu},$$

es ist also $\nu = \nu_{,} = \nu - 2\mu$; $\mu = \nu$ und $\mu_{,} = -\nu$ zu setzen, so kommt

$$-\cos = a^2 - \nu^2 + \tfrac{1}{3}(\nu - 2\mu)^2 : a^2 + \nu^2 + \tfrac{1}{3}(\nu - 2\mu)^2$$

$$= \frac{3a^2 + 4\mu^2 - 2\nu^2 - 4\mu\nu}{3a^2 + 4\mu^2 - 4\nu^2 - 4\mu\nu}.$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega = \nu\infty : \sqrt{a^2 + \nu^2 + \tfrac{1}{3}(\nu - 2\mu)^2}\sqrt{\infty^2} = \frac{\nu\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4\mu^2 + 4\nu^2 - 4\mu\nu}},$$

denn wir haben im letztern Falle den Winkel gegen die Mittelpunktsebene $b : c : 0a = b : c : \frac{a}{\infty}$, worin $\mu_{,} = \infty$, $\nu_{,} = 1$; $\mu = \nu$, $\nu = \nu - 2\mu$, im Sinn.

Wir denken uns in allen diesen Fällen die dreierlei Kanten in ein

und dieselbe Axe b verlegt. Axe a läßt sich am leichtesten aus $\cos \frac{1}{2}\omega$ ableiten, worauf ja auch die bequemsten Rechenformeln aus den ganzen Winkeln immer zurückkommen. Die Ausdrücke weichen nur durch den Zähler $= z\sqrt{3}$ von einander ab. Setzen wir im Nenner

$$\mu^2 + \nu^2 - \mu\nu = N, \text{ so ist}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega = \frac{z}{\sqrt{a^2 + \frac{4}{3}N}}$$

$$a^2 = \frac{z^2}{\cos \frac{1}{2}\omega^2} - \tfrac{4}{3}N.$$

Für die **Berechnung** der **Seiten** nimmt Formel (1), wenn wir $\frac{1}{a^2} = \alpha^2$ setzen, folgende bequeme Form an:

$$\cos = \alpha^2 + mm, + 3nn, : \sqrt{\alpha^2 + m^2 + 3n^2}\ \sqrt{\alpha^2 + m,^2 + 3n,^2}.$$

Zunächst hat man auf die Entfernung der Zonenaxen vom Mittelpunkte zu sehen, welches die Invertirung der **Poldistanzen** gibt. Man darf nur m, = n, = 0 setzen, um sofort

$$\cos = \alpha^2 : \sqrt{\alpha^2 + m^2 + 3n^2}\ \sqrt{\alpha^2} = \alpha : \sqrt{\alpha^2 + m^2 + 3n^2}$$

zu erhalten. Da die Poldistanzen oft zusammenfallen mit der Neigung der Flächen gegen die Axe c, so empfehlen sich auch von dieser Seite zuweilen die kürzern Formeln.

Rhomboederflächenwinkel in der Spitze der Hauptecke haben auf der Sectionslinie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu} \ldots m = \frac{3}{2\mu}, n = \frac{1}{2\mu}; m, = 0, n, = -\frac{1}{\mu}$

$$\cos = \alpha^2 - \frac{3}{2\mu^2} : \sqrt{\alpha^2 + \frac{9}{4\mu^2} + \frac{3}{4\mu^2}}\ \sqrt{\alpha^2 + \frac{3}{\mu^2}}$$

$$\cos = \mu^2\alpha^2 - \tfrac{3}{2} : \sqrt{\mu^2\alpha^2 + 3}\ \sqrt{\mu^2\alpha^2 + 3} = \frac{\mu^2\alpha^2 - 1{,}5}{\mu^2\alpha^2 + 3}.$$

Dihexaederflächenwinkel in der Spitze der Hauptecke haben dagegen

$$m = \frac{1}{\mu}, n = 0; m, = \frac{1}{2\mu}, n, = \frac{1}{2\mu}$$

$$\cos = \alpha^2 + \frac{1}{2\mu^2} : \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{\mu^2}}\ \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{4\mu^2} + \frac{3}{4\mu^2}}$$

$$\cos = \mu^2\alpha^2 + \tfrac{1}{2} : \sqrt{\mu^2\alpha^2 + 1}\ \sqrt{\mu^2\alpha^2 + 1} = \frac{\mu^2\alpha^2 + 0{,}5}{\mu^2\alpha^2 + 1}.$$

Da bei Rhomboedern und Dihexaedern die Dreiecke gleichschenklich sind, so sind mit den Winkeln an der Spitze auch die gleichen Winkel an der Basis bekannt. Doch ist es zur Controle gut, auch die Formeln dieser Winkel zu suchen. Bei beiden wird m, = n, = ∞, und für

Rhomboeder $m = 0, n = \frac{1}{\mu}$

$$\cos = \frac{3\infty}{\mu} : \sqrt{\alpha^2 + \frac{3}{\mu^2}}\ \sqrt{\infty^2 + 3\infty^2} = \tfrac{3}{2} : \sqrt{\mu^2\alpha^2 + 3} = \frac{1{,}5}{\sqrt{\mu^2\alpha^2 + 3}};$$

Dihexaeder $m = \frac{1}{\mu}$, $n = 0$

$$\cos = \frac{\infty}{\mu} : \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{\mu^2}} \sqrt{\infty^2 + 3\infty^2} = \tfrac{1}{2} : \sqrt{\mu^2\alpha^2 + 1} = \frac{0,5}{\sqrt{\mu^2\alpha^2 + 1}}.$$

Schon die Verwandtschaft dieser beiden Formeln mit den vorhergehenden gibt uns einige Bürgschaft für die Richtigkeit der Entwickelung. Die Horizontallinie, welche vom gemeinschaftlichen Punkte c aus parallel der Sectionslinie a : b ins Unendliche strahlt, bildet im Rhomboeder mit der Zonenaxe c; $\frac{b}{\mu} + 0$ Wechselwinkel, cos behält daher gleiche Vorzeichen mit der Formel $m, = n, = \pm\infty$; setze ich dagegen $m, = \pm\infty$, $n, = \mp\infty$, dann habe ich den Nebenwinkel vom Wechselwinkel im Sinn.

Dreikantnerflächenwinkel haben dagegen zwei Unbekannte, und erst der dritte dient zur Controle. Die drei Kanten der ungleichseitigen Dreiecke liegen in den dreierlei b jeglicher Sectionslinie. Wir brauchen nur einer, der $\frac{a'}{\nu - \mu} : \frac{b}{\mu + \nu}$ unsere Aufmerksamkeit zuzuwenden: der Winkel an der **Spitze** der Hauptaxe liegt dann zwischen $\frac{b}{\mu + \nu}$ und $\frac{b}{2\nu - \mu}$; der Winkel neben der **stumpfen** Endkante fällt zwischen $\frac{b}{2\nu - \mu}$ und $\frac{b}{\nu - 2\mu}$, er liefert uns den gleichen Wechselwinkel; der Winkel neben der **scharfen** Endkante zwischen $\frac{b}{\mu + \nu}$ und $\frac{b}{\nu - 2\mu}$ liefert uns den Nebenwinkel vom Wechselwinkel, zwischen $\frac{b}{\mu + \nu}$ und $\frac{b}{\nu - 2\mu}$ läge dagegen ebenfalls der gleiche Wechselwinkel. Wollen wir die Aufgabe allgemein lösen, so haben wir die drei Punkte auf die rechtwinklichen Coordinaten ab zu beziehen. Nichts ist einfacher: denn ein Punkt $\frac{b}{\mu + \nu}$ liegt in der Axe b selbst, und die andern beiden sind von der nähern a und der fernern b im Verhältniß $\frac{3}{2} : \frac{1}{2}$ entfernt, die Coordinatenwerthe dürfen daher nur respective mit $\frac{3}{2}$ und $\frac{1}{2}$ multiplicirt werden. Daher wird für den

Seitenwinkel an der **Spitze**

$$m = 0,\ n = \frac{1}{\mu + \nu};\ m, = \frac{3}{2\,(2\nu - \mu)},\ n, = \frac{1}{2\,(2\nu - \mu)}:$$

$$\cos = \alpha^2 + \frac{3}{2(\mu + \nu)\,(2\nu - \mu} : \sqrt{\alpha^2 + \frac{3}{(\mu + \nu)^2}} \sqrt{\alpha^2 + \frac{9}{4(2\nu - \mu)^2} + \frac{3}{4(2\nu - \mu)^2}}$$

$$= \alpha^2(\mu + \nu)\,(2\nu - \mu) + \tfrac{3}{2} : \sqrt{\alpha^2(\mu + \nu)^2 + 3}\,\sqrt{\alpha^2(2\nu - \mu)^2 + 3}.$$

neben **scharfer Kante**

$$m = 0,\ n = \frac{1}{\mu + \nu};\ m_, = \frac{3}{2(\nu - 2\mu)},\ n_, = -\frac{1}{2(\nu - 2\mu)}:$$

$$\cos = \alpha^2 - \frac{3}{2(\mu+\nu)(\nu-2\mu)} : \sqrt{\alpha^2 + \frac{3}{(\mu+\nu)^2}}\sqrt{\alpha^2 + \frac{9}{4(\nu-2\mu)^2} + \frac{3}{4(\nu-2\mu)^2}}$$

$$= \alpha^2(\mu+\nu)\,\nu-2\mu) - \tfrac{3}{2} : \sqrt{\alpha^2(\mu+\nu)^2+3}\ \sqrt{\alpha^2(\nu-2\mu)^2+3}.$$

neben **stumpfer Kante**

$$m = 0;\ n = \frac{1}{\nu - 2\mu};\ m_, = \frac{3}{2(2\nu - \mu)},\ n_, = \frac{1}{2(2\nu - \mu)}:$$

$$\cos = \alpha^2 + \frac{3}{2(\nu-2\mu)(2\nu-\mu)} : \sqrt{\alpha^2 + \frac{3}{(\nu-2\mu)^2}}\sqrt{\alpha^2 + \frac{9}{4(2\nu-\mu)^2} + \frac{3}{4(2\nu-\mu)^2}}$$

$$= \alpha^2(\nu-2\mu)(2\nu-\mu) + \tfrac{3}{2} : \sqrt{\alpha^2(\nu-2\mu)^2+3}\ \sqrt{\alpha^2(2\nu-\mu)^2+3}.$$

Wir haben im letztern Falle die beiden Axen ab gewechselt, um $m=0$ zu bekommen, erreichen aber auch dasselbe Resultat, wenn

$$m = \frac{3}{2(2\nu - \mu)},\ n = \frac{1}{2(2\nu - \mu)};\ m_, = \frac{3}{2(\nu - 2\mu)},\ n_, = -\frac{1}{2(\nu - 2\mu)}$$

gesetzt wird.

Beispiel Kalkspath. **Rhomboeder:** Endkantenwinkel 105° 5'. Folglich pag. 282

Axe $a = \sqrt{tg^2\,52^0\,32' - \tfrac{1}{3}} = \sqrt{1{,}37019};\ \frac{1}{a} = \alpha = \sqrt{0{,}72983}.$

Seite $\cos\omega = \frac{\alpha^2 - 1{,}5}{\alpha^2 + 3} = \frac{0{,}73 - 1{,}5}{3{,}73} = -\frac{0{,}77}{3{,}73} = 101^0\ 55'.$

Poldistanz $\cos = \alpha : \sqrt{\alpha^2 + m^2 + 3n^2}$. Rhomboeder $a : a$
Endkante zur Axe $m = 0,\ n = 1$ gibt

$$\cos = \alpha : \sqrt{\alpha^2 + 3} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 3}} = \sqrt{\frac{0{,}73}{3{,}73}}\ \ldots\ 63^0\ 44'\ 37''.$$

Fläche zur Axe $m = \tfrac{3}{4},\ n = \tfrac{1}{4}$ gibt

$$\cos = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \frac{9}{16} + \frac{3}{16}}} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{0{,}73}{1{,}48}}\ \ldots\ 45^0\ 23\tfrac{1}{2}'.$$

Probe auf der Axe b: $m = 0,\ n = 1;\ m_, = 0,\ n_, = -\tfrac{1}{2}$, gibt Formel (1) pag. 280:

$$\cos = \alpha^2 - \tfrac{3}{2} : \sqrt{\alpha^2 + 3}\ \sqrt{\alpha^2 + \tfrac{3}{4}} = -\frac{0{,}77}{\sqrt{3{,}73\,.\,1{,}48}}$$

$= 109^0\ 8' = 63.44.37 + 45.23.14$ (Winkel des Hauptschnitts).

Dihexaeder durch Rhomboeder und Gegenrhomboeder gebildet.

Endkante $-\cos = \frac{3a^2+2}{3a^2+4} = \frac{3\,.\,1{,}37+2}{3\,.\,1{,}37+4} = \frac{6{,}11}{8{,}11} = 138^0\ 53',$

halbe Endkante . . . $\cos = \sqrt{\frac{1}{3a^2 + 4}} = \sqrt{\frac{1}{8,11}} = 69^0\ 26\frac{1}{2}'$,

Seitenkante . . . . . $\cos = \frac{3a^2 - 4}{3a^2 + 4} = \frac{0,11}{8,11} = 89^0\ 13'$,

halbe Seitenkante . . $\cos = \sqrt{\frac{4}{3a^2 + 4}} = \sqrt{\frac{4}{8,11}} = 44^0\ 36\frac{1}{2}'$,

Seite an der Spitze $\cos = \frac{\alpha^2 + 0,5}{\alpha^2 + 1} = \frac{1,23}{1,73} = 44^0\ 41'$,

an der Basis $\cos = \sqrt{\frac{0,25}{\alpha^2 + 1}} = \sqrt{\frac{0,25}{1,73}} = 67^0\ 39\frac{1}{2}'$

$2.67.39\frac{1}{2} + 44.41 = 180^0$.

Nach **Poldistanzformel** hat Endkante zur Axe $m = 1$, $n = 0$

$$\cos = \alpha : \sqrt{\alpha^2 + 1} = \sqrt{\frac{0,73}{1,73}} = 49^0\ 29\frac{1}{2}' = \mathrm{tg}\ a.$$

Dreikantner $a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a$ gibt $\mu = 1$, $\nu = 3$, folglich pag. 284

stumpfe Endkante.

$$-\cos\omega = \frac{3a^2 - 2 + 36 - 12}{3a^2 + 4 + 36 - 12} = \frac{3 . 1,37 + 22}{3 . 1,37 + 28} = \frac{26,11}{32,11} = 144^0\ 24'$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 . a^2 + 4(1 + 9 - 3)}} = \sqrt{\frac{3}{3.a^2 + 4.7}} = \sqrt{\frac{3}{32,11}} = 72^0\ 12'$$

scharfe Endkante

$$-\cos\omega = \frac{3a^2 - 2 - 18 + 24}{3a^2 + 4 + 36 - 12} = \frac{3.1,37 + 4}{32,11} = \frac{8,11}{32,11} = 104^0\ 38'$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{32,11}} = \sqrt{\frac{12}{32,11}} = 2\sqrt{\frac{3}{32,11}} = 52^0\ 19'$$

Seitenkanten

$$-\cos\omega = \frac{3a^2 + 4 - 18 - 12}{3a^2 + 4 - 36 - 12} = \frac{4,11 - 26}{32,11} = -\frac{21,89}{32,11} = 47^0\ 1'$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4 + 36 - 12}} = \sqrt{\frac{27}{32,11}} = 3\sqrt{\frac{3}{32,11}} = 23^0\ 30\frac{1}{2}'$$

$$\text{Axe } a = \sqrt{\frac{z}{\cos^2\frac{1}{2}\omega} - \frac{4}{3}N},$$

$N = \mu^2 + \nu^2 - \mu\nu = 1 + 9 - 3 = 7$, für den halben stumpfen Endkantenwinkel ist $z = 1$, folglich

$$a = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 72 . 12} - \frac{28}{3}} = \sqrt{10,703 - 9,333} = \sqrt{1,370}.$$

Für die **Seitenwinkel** des Dreiecks am Dreikantner kommt an der

Spitze:

$$\cos = \alpha^2 + \frac{3}{2.4.5} : \sqrt{\alpha^2+\tfrac{5}{16}}\,\sqrt{\alpha^2+\tfrac{5}{25}} = \frac{0{,}805}{\sqrt{0{,}917.0{,}85}} = 24^0\ 17';$$

stumpfe Kante:

$$\cos = \alpha^2 + \frac{3}{2.5} : \sqrt{\alpha^2+3}\,\sqrt{\alpha^2+\tfrac{5}{25}} = \frac{1{,}03}{\sqrt{3{,}75\ .\ 0{,}85}} = 54^0\ 39';$$

scharfe Kante:

$$\cos = \alpha^2 - \frac{3}{2.4} : \sqrt{\alpha^2+\tfrac{5}{16}}\,\sqrt{\alpha^2+3} = \frac{0{,}355}{\sqrt{0{,}917.3{,}73}} = 101^0\ 4';$$

Summa 180^0

Rechnung mit den Tangentenformeln der halben Winkel.

Setzen wir in den Formeln des zweigliedrigen Systems pag. 213 Axe $b = a\sqrt{3}$, so kommt

1) $\mathrm{tg} = \sqrt{3}\ \sqrt{1 + (m^2 + 3n^2)a^2} : 3\mu n - m\nu$ (Kante).

2) $\mathrm{ctg} = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\ \sqrt{1 + (\mu^2 + \tfrac{1}{3}\nu^2)\alpha^2} : \tfrac{1}{3}m\nu - \mu n$ (Seite).

Giltig für $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu}$ und $ma + na$.

Die Formeln für Kanten und Seiten sind vollständig reciprok, was sich auch auf die Tangente erstreckt, da $\frac{1}{\mathrm{tg}} = \mathrm{ctg}$ ist. Unter α^2 wird wie früher $\frac{1}{a^2}$ verstanden.

Rhomboeder $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu - \mu} = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu}$ haben nur eine Kante zu bestimmen, da die andere das Supplement bildet. Wir wählen immer denjenigen Kantenpunkt, welcher in der Rechnungsaxe b liegt. Folglich ist für die **halbe Endkante**

$$m = 0,\ n = \frac{1}{\mu};\ \nu = \mu, \text{ gibt}$$

$$\mathrm{tg} = \sqrt{3}\sqrt{1 + \frac{3a^2}{\mu^2}} : 3\mu\,.\frac{1}{\mu} = \sqrt{\tfrac{1}{3}+\frac{a^2}{\mu^2}},\ a = \mu\sqrt{\mathrm{tg}^2 - \tfrac{1}{3}}.$$

Hauptrhomboeder $\mu = 1$ hat $\mathrm{tg} = \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{3}}$, $a = \sqrt{\mathrm{tg}^2 - \tfrac{1}{3}}$.

Dihexaeder $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu}$ haben in Axe a ihre

Endkanten, folglich $n = 0,\ m = \frac{1}{\mu};\ \nu = \mu$, gibt

halbe Endkante $\mathrm{tg} = \sqrt{3}\sqrt{1 + \frac{a^2}{\mu^2}}$, $a = \mu\sqrt{\tfrac{1}{3}\,\mathrm{tg}^2 - 1}$.

halbe Seitenkante $\mathrm{tg}o = \frac{\mu}{a}\sqrt{\tfrac{4}{3}}$, $a = \frac{\mu}{\mathrm{tg}o}\sqrt{\tfrac{4}{3}}$.

Denn das Perpendikel vom Mittelpunkt auf die Sectionslinie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu}$ ist

$$\frac{a \cdot b}{\mu \cdot \mu} : \sqrt{\frac{a^2}{\mu^2} + \frac{b^2}{\mu^2}} = \frac{ab}{\sqrt{\mu^2(a^2 + b^2)}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{\sqrt{4\mu^2 a^2}} = \frac{a}{\mu} \sqrt{\tfrac{3}{4}}.$$

Daher Neigung der Dihexaeder gegen die Axe

$$\sin : \cos = \frac{a}{\mu} \sqrt{\tfrac{3}{4}} : 1 , \quad tg = \frac{a}{\mu} \sqrt{\tfrac{3}{4}},$$

woraus die Seitenkante durch Umkehrung folgt.

Dreikantner und **Nebendihexaeder** (Dihexaeder zweiter Ordnung) lagern mit ihren Winkeln in den Zwischenaxen b, man muß daher vor allem ihre Kantenpunkte in b fixiren. Nehmen wir dieselben Fälle, wie oben bei den Cosinusformeln pag. 284, so ist für die

stumpfe Endkante von $\frac{b}{2\nu - \mu} : \frac{a}{\mu} : c$,

$$m = 0, \ n = \frac{1}{2\nu - \mu}; \ \nu = 2\nu - \mu, \text{ gibt}$$

$$tg = \sqrt{3} \sqrt{1 + \frac{3a^2}{(2\nu - \mu)^2}} : \frac{3\mu}{2\nu - \mu} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\tfrac{1}{3} (2\nu - \mu)^2 + a^2},$$

scharfe Endkante von $\frac{b}{\mu + \nu} : \frac{a}{\nu - \mu} : c$,

$$m = 0, \ n = \frac{1}{\mu + \nu}; \ \mu = \nu - \mu, \ \nu = \mu + \nu, \text{ gibt:}$$

$$tg_{,} = \sqrt{3} \sqrt{1 + \frac{3a^2}{(\mu + \nu)^2}} : \frac{3(\nu - \mu)}{\mu + \nu} = \frac{1}{\nu - \mu} \sqrt{\tfrac{1}{3} (\mu + \nu)^2 + a^2}.$$

Seitenkante von $\frac{b}{\nu - 2\mu} : \frac{a}{\nu} : c$,

$$m = 0, \ n = \frac{1}{\nu - 2\mu}; \ \mu = \nu, \ \nu = \nu - 2\mu, \text{ gibt:}$$

$$ctg_{o} = \sqrt{3} \sqrt{1 + \frac{3a^2}{(\nu - 2\mu)^2}} : \frac{3\nu}{\nu - 2\mu} = \frac{1}{\nu} \sqrt{\tfrac{1}{3} (\nu - 2\mu)^2 + a^2}.$$

tg_{o} würde das Complement zum halben Seitenkantenwinkel geben, während ctg_{o} den wirklichen Winkel gibt.

Da in allen Formeln a^2 nur einmal steckt, so ist es leicht zu finden, leichter als bei den Cosinusformeln, man darf es nur hinschreiben:

$$a^2 = \mu^2 tg^2 - \frac{(2\nu - \mu)^2}{3} = (\nu - \mu)^2 tg_{,} - \frac{(\mu + \nu)^2}{3}$$

$$= \nu^2 ctg^2_{o} - \frac{(\nu - 2\mu)^2}{3}.$$

Die erste und dritte gehen für $\nu = \mu$ und die zweite für $\nu = 0$ in die Rhomboederformel $a^2 = \mu^2 (tg^2 - \tfrac{1}{3})$ über.

Nebendihexaeder haben alle das Zeichen:

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{3\mu} : \frac{a}{2\mu} : \frac{b}{3\mu} : \frac{a}{\mu} : \frac{b}{0},$$

folglich gehen die Endkanten der Fläche $\frac{b}{3\mu} : \frac{a}{\mu} : c$ von o nach $\frac{b}{3\mu}$, es wird also:

$$\mu = 0,\ n = \frac{1}{3\mu};\ \nu = 3\mu,\ \text{gibt}$$

$$tg = \sqrt{3}\sqrt{1 + \frac{3a^2}{9\mu^2} : \frac{3\mu}{3\mu}} = \sqrt{3 + \frac{a^2}{\mu^2}} = \frac{1}{\mu}\ \sqrt{3\mu^2 + a^2}.$$

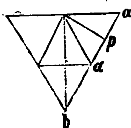
Beispiel. Eisenglanzdihexaeder

$$r = \tfrac{2}{3}c : a : \tfrac{1}{2}a : a = c : \tfrac{3}{2}a : \tfrac{3}{4}a : \tfrac{3}{2}a = c : \frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : \frac{a}{\nu - \mu}.$$

Nehmen wir Axe $a = \sqrt{0{,}535}$ als bekannt an, so findet sich, da $\mu = \frac{2}{3}$ ist, der halbe Dihexaederendkantenwinkel

$$tg = \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{4}{3} + 0{,}535} = \sqrt{3 + \tfrac{9}{4} \,.\, 0{,}535} = \sqrt{4{,}204}\ \ldots\ 64^0.$$

Seiten. Wollen wir den Winkel an der Spitze des Quarzdihexaeders haben, welchen schon R. de l'Isle (Essai 1772 tab. X fig. 2) 40° fand, so dürfen wir nur den halben Winkel suchen, welcher zwischen den Zonenaxen cp und ca liegt. Wir haben also in der Seitenformel (2) pag. 290 für die Sectionslinie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$, $\mu = \nu = 1$, und für den Zonenpunkt c; ma + nb, m = 1, n = 0 zu setzen, so kommt



$$ctg = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\ \sqrt{1 + \tfrac{4}{3}\alpha^2} : \tfrac{1}{3} = \sqrt{3 + 4\alpha^2}.$$

Beim Quarz ist der Endkantenwinkel 133° 44', mithin Axe

$$a = \sqrt{\tfrac{1}{3}\ tg^2\, 66 \,.\, 52 - 1} = \sqrt{0{,}82628},\ \alpha = \frac{1}{a} = \sqrt{1{,}2101}.$$

Folglich der halbe Seitenwinkel an der Spitze des Dihexaeders

$$ctg = \sqrt{3 + 4\alpha^2} = \sqrt{7{,}84} = 19^0\ 39'\ \ldots\ 39 \,.\, 18.$$

Wollen wir den Endwinkel in der Rhomboederfläche, so gilt der Zonenpunkt b, folglich wird m = 0, n = 1, und es wird

$$ctg = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\ \sqrt{1 + \tfrac{4}{3}\alpha^2} : 1 = \tfrac{1}{3}\sqrt{3 + 4\alpha^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{7{,}84} = 46^0\ 58\tfrac{1}{2}'\ \ldots\ 93^0\ 47'.$$

Allgemein haben wir für Dihexaeder und Rhomboeder $\nu = \mu$ zu setzen, und für Dihexaeder $m = 0,\ n = \frac{1}{\mu}$, für Rhomboeder $n = 0$, $m = \frac{1}{\mu}$, gibt

$$\text{Dihexaeder}\ \frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu}\ \ldots\ ctg = \sqrt{3 + 4\mu^2\alpha^2},$$

$$\text{Rhomboeder}\ \frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu}\ \ldots\ ctg = \tfrac{1}{3}\sqrt{3 + 4\mu^2\alpha^2}.$$

Dreikantner haben ihre dreierlei Seitenwinkel ebenfalls auf **einer** Sectionslinie pag. 281, wozu wir die Linie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{2\nu - \mu}$ wählen wollen. Dann ist in der Seitenformel, wenn wir zunächst von m und n absehen,

$\mu = \mu,\ 2\nu - \mu = \nu$ zu setzen, gibt:

$$\text{ctg} = \sqrt{3}\sqrt{1 + (\mu^2 + \frac{(2\nu - \mu)^2}{3}\alpha^2} : \text{m}\,.\,\frac{(2\nu - \mu)}{3} - \text{n}\mu = Z : N.$$

Jetzt haben wir nur noch die drei Zonenpunkte

$$\frac{b}{\mu + \nu},\ \frac{b}{2\nu - \mu},\ \frac{b}{\nu - 2\mu}$$

ins Auge zu fassen. Der Zähler bleibt für alle gleich, blos im Nenner ändert m und n. Für

1. Punkt $\frac{b}{\mu + \nu}$ ist $m = \frac{3}{2(\mu + \nu)}$, $n = \frac{1}{2(\mu + \nu)}$, gibt

$$\frac{3}{2(\mu + \nu)} \cdot \frac{(2\nu - \mu)}{3} - \frac{\mu}{2(\mu + \nu)} = \frac{2\nu - 2\mu}{2(\mu + \nu)} = \frac{\nu - \mu}{\nu + \mu} = N_1.$$

2. Punkt $\frac{b}{2\nu - \mu}$ ist $m = 0$, $n = \frac{1}{2\nu - \mu}$, gibt

$$0 - \frac{\mu}{2\nu - \mu} = \frac{\mu}{\mu - 2\nu} = N_2.$$

3. Punkt $\frac{b}{\nu - 2\mu}$ ist $m = -\frac{3}{2(\nu - 2\mu)}$, $n = \frac{1}{2(\nu - 2\mu)}$, gibt

$$-\frac{3}{2(\nu - 2\mu)} \cdot \frac{(2\nu - \mu)}{3} - \frac{\mu}{2(\nu - 2\mu)} = \frac{2\nu}{2(\nu - 2\mu)} = \frac{\nu}{\nu - 2\mu} = N_3.$$

Für den gewöhnlichen Dreikantner $a : \frac{a}{3}$ ist $\mu = 1$, $\nu = 3$, gibt für

1. Punkt $\text{ctg} = \sqrt{3}\ \sqrt{1 + (1 + \frac{25}{3})} : \frac{3 - 1}{3 + 1} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{28}{9}\alpha^2} : \frac{1}{2}$

$\text{ctg} = 2\sqrt{2{,}6044}$ . . . . $17^0\ 13'$

2. Punkt $\text{ctg} = \sqrt{2{,}6044} : \frac{1}{5} = 5\ \sqrt{2{,}6044}$ . . . . $7^0\ 4'$

3. Punkt $\text{ctg} = \sqrt{2{,}6044} : 3 = \frac{1}{3}\ \sqrt{2{,}6044}$ . . . . $61^0\ 43'$.

Es sind das die Neigungen der drei Kanten gegen eine Diagonale, welche ich von c aus auf die Sectionslinie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{2\nu - \mu}$ senkrecht ziehe. Der Winkel an der Spitze beträgt daher $7 \,.\, 4 + 17 \,.\, 13 = 24^0\ 17'$; neben der stumpfen Kante liegt $61 \,.\, 43 - 7 \,.\, 4 = 54^0\ 39'$; neben der scharfen das Supplement von $61 \,.\, 43 + 17 \,.\, 13 = 78^0\ 56'$ . . $101^0\ 4'$. Also alles wie oben pag. 290, nur daß jetzt die Rechnung einfacher ist.

Weiß'sche Rechnungsweise.

Abh. Berl. Akad. 1823 pag. 217.

Geben wir dem allgemeinen Flächenausdrucke pag. 34 unsere Form

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu + \nu} : \frac{a}{\nu} : \frac{b}{2\nu - \mu} : \frac{a}{\nu - \mu} : \frac{b}{\nu - 2\mu},$$

so gehen die drei Kanten von c nach $\frac{b}{\mu + \nu}$, $\frac{b}{2\nu - \mu}$, $\frac{b}{\nu - 2\mu}$, wie die Projectionsfigur unmittelbar zur Anschauung bringt. Da $c = 1$ gesetzt ist, so ist die Neigung der Endkanten gegen Axe c

$$\sin : \cos = \frac{b}{\mu + \nu} : 1, \ \mathrm{tg} = \frac{b}{\mu + \nu} = \frac{a\sqrt{3}}{\mu + \nu}.$$

$$\sin : \cos = \frac{b}{2\nu - \mu} : 1, \ \mathrm{tg}, = \frac{b}{2\nu - \mu} = \frac{a\sqrt{3}}{2\nu - \mu}.$$

Die Neigung der Flächen gegen die Axe hat zum sin das Perpendikel vom Mittelpunkte auf die Sectionslinie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{2\nu - \mu}$ gefällt, d. h.

$$\sin = \frac{a}{\mu} \cdot \frac{b}{2\nu - \mu} : \sqrt{\frac{a^2}{\mu^2} + \frac{b^2}{(2\nu - \mu)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{\mu^2 + \nu^2 - \mu\nu}}.$$

Da die nachbarlichen Axen ab sich je unter 30° schneiden, so steht $\frac{a}{\mu}$ von $\frac{b}{2\mu - \mu}$ um $3 \cdot 30^0 = 90^0$ entfernt; ebenso $\frac{b}{\mu + \nu}$ von $\frac{a}{\nu - \mu}$ und $\frac{a}{\nu}$ von $\frac{b}{\nu - 2\mu}$. Fälle ich auf die Sectionslinie $\frac{b}{\mu + \nu} : \frac{a}{\nu - \mu}$ ein Perpendikel, so kommt derselbe Ausdruck

$$\sin = \frac{b}{\mu + \nu} \cdot \frac{a}{\nu - \mu} : \sqrt{\frac{b^2}{(\mu + \nu)^2} + \frac{a^2}{(\nu - \mu)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{\mu^2 + \nu^2 - \mu\nu}}.$$

Alle Perpendikel vom Mittelpunkte auf die Sectionslinien eines beliebigen Dreikantners gefällt geben daher

$$\mathrm{tg} = \sin : \cos = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{\mu^2 + \nu^2 - \mu\nu}} : 1,$$

und das doppelte Complement dazu bildet den Seitenkantenwinkel des 6+6kantners.

Das Perpendikel vom Mittelpunkte auf die Endkante von c nach $\frac{b}{2\nu - \mu}$ gefällt liefert den

$$\cos = 1 \cdot \frac{b}{2\nu - \mu} : \sqrt{1 + \frac{b^2}{(2\nu - \mu^2)}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{(2\nu - \mu)^2 + 3a^2}},$$

während die 90° entfernte $\frac{a}{\mu}$ den sin gibt, also

$$1)\ \text{tg} = \frac{a}{\mu} : \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{(2\nu-\mu)^2+3a^2}} = \frac{1}{\mu}\sqrt{\tfrac{1}{3}(2\nu-\mu)^2+a^2}.$$

Das Perpendikel auf die Endkante von c nach $\frac{b}{\mu+\nu}$ gefällt liefert den

$$\cos = 1 . \frac{b}{\mu+\nu} : \sqrt{1+\frac{b^2}{(\mu+\nu)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{(\mu+\nu)^2+3a^2}},$$

während die 90° entfernte $\frac{a}{\nu-\mu}$ den sin gibt, also

$$2)\ \text{tg}_{,} = \frac{a}{\nu-\mu} : \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{(\mu+\nu)^2+3a^2}} = \frac{1}{\nu-\mu}\sqrt{\tfrac{1}{3}(\mu+\nu)^2+a^2}.$$

Endlich das Perpendikel auf die Seitenkante von c nach $\frac{b}{\nu-2\mu}$ gefällt liefert den

$$\cos = 1 . \frac{b}{\nu-2\mu} : \sqrt{1+\frac{b^2}{(\nu-2\mu)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{(\nu-2\mu)^2+3a^2}},$$

während die 90° entfernte $\frac{a}{\nu}$ den sin gibt, also

$$3)\ \text{tg}_{0} = \frac{a}{\nu} : \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{(\nu-2\mu)^2+3a^2}} = \frac{1}{\nu}\sqrt{\tfrac{1}{3}(\nu-2\mu)^2+a^2}.$$

Die Ableitungen können mit Hilfe unserer Projectionen nicht klarer und eleganter sein, so daß alle vermeintlichen Verbesserungen den Meister an Bündigkeit und Kürze nicht erreicht, geschweige denn übertroffen hätten.

Invertirung des Kalkspathes.

Hauy (Mineralogie ed. Weiss II. 145) sah das nächste schärfere Rhomboeder $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a$ als eine „umgekehrte Kerngestalt" (chaux carbonatée inverse) an, weil beide, Haupt- und Nebenrhomboeder, die Kanten- und Seitenwinkel mit einander vertauschen, und den Dreikantner $a : \frac{1}{3}a$ nannte er métastatique, weil seine scharfe Endkante mit der Kante, und sein stumpfer Seitenwinkel mit der Seite des Hauptrhomboeders übereinstimme. Diese interessante Umkehrung (Invertirung) und Versetzung (Metastase) der Winkel war dem alten Meister ein wichtiger Grund für die Richtigkeit der Winkelannahmen von 104° 28′ 40″ (Kanten) und 101° 32′ 13″ (Seiten), da sie drei Mal an den gewöhnlichsten Körpern des Systemes wiederkehrten. Doch beruhte das Ganze auf der einfachsten Annahme, daß der Blätterbruch gegen die Axe 45° geneigt sei, d. h. c=s pag. 19 sein müsse. Mit dem Reflexionsgoniometer wurde dieser Zauber der Sache genommen. Unsere Formeln zeigen das leicht.

Greifen wir nochmals auf das reguläre System zurück, so ist

$$\mp \cos = \frac{1+\mu\mu_{,}+\nu\nu_{,}}{1+\mu^2+\nu^2} \text{ und } \pm \cos = \frac{1+mm_{,}+nn_{,}}{1+m^2+n^2},$$

die griechischen Buchstaben geben die Sectionslinien und deren Kantenwinkel; die lateinischen die Zonenpunkte und deren Seitenwinkel. Beide Formeln unterscheiden sich nur noch durch das entgegengesetzte Vorzeichen des cos pag. 208. Bei allen regulären Formen, deren Orte und Axenschnitte sich vertauschen, findet eine Uebertragung der Winkel statt. Es hat

Oktaeder $\mu = \nu = \mu_, = 1$ und $\nu_, = -1$ (Sectionslinie).

Granatoeder $m = n = m_, = 1$ und $n_, = -1$ (Flächenorte).

Folglich ist $-\cos = +\cos = \frac{1}{3}$, d. h. die Kante des Oktaeders beträgt 109 . 28 und die Seite des Granatoeders 70 . 32, der scharfe Seitenwinkel an der Endecke, woraus der stumpfe 109 . 28 für den Rhombus folgt. Umgekehrt ist dann für die Kante des Granatoeders

$$\mu = 1,\ \nu = 0;\ \mu_, = 0,\ \nu_, = 1;$$

für die Seite des Oktaeders

$$m = 1,\ n = 0;\ m_, = 0,\ n_, = 1.$$

Gibt Oktaederseite $60^0 = +\cos\frac{1}{2}$, Granatoederkante $120^0 = -\cos\frac{1}{2}$ pag. 151.

Eine Fläche $\mu = \nu = \mu_, = 2,\ \nu_, = -2$ entspricht der Endkante des Pyramidenoktaeders $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b$ und $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b'$; und die Sectionslinie, welche die Orte $m = n = m_, = 2$ und $n_, = -2$ verbindet, einem Pyramidenwürfeloktaeder $2a : \infty a$. Das stumpfe Oktaeder des Pyramidenwürfels vertauscht also seine Winkel mit dem scharfen des Pyramidenoktaeders. Das Oktaeder des Leucitoeders $2a : 2a$ dagegen mit dem scharfen Oktaeder des Pyramidenwürfels $\frac{1}{2}a : \infty a$, weil

$$m = \mu = n = \nu = m_, = \mu_, = \tfrac{1}{2} \text{ ist etc.}$$

Was für die oktaedrische das gilt nun auch für die rhomboedrische Stellung pag. 168: das Tetraeder (Rhomboeder des Oktaeders) vertauscht seine Winkel mit dem Rhomboeder des Granatoeders, wie schon aus den Oktaedern folgt. Zwischen beiden liegt der Würfel, wovon Granatoeder das stumpfere und Tetraeder das schärfere Rhomboeder bildet. Da sich bei der Projection auf die Oktaederfläche verhält:

$$a : c = \sqrt{\tfrac{2}{3}} : 1 \text{ und } \alpha : c = \sqrt{\tfrac{3}{2}} : 1$$

so dürfen wir in den Cosinusformeln pag. 280 nur

$$a^2 = \tfrac{2}{3} \text{ und } \frac{1}{a^2} = \alpha^2 = \tfrac{3}{2}$$

setzen, um sofort die nothwendigen Formeln zu erhalten:

$$\pm \cos = \tfrac{3}{2} + mm_, + 3nn_, : \sqrt{\tfrac{3}{2} + m^2 + 3n^2}\ \sqrt{\tfrac{3}{2} + m_,^2 + 3n_,^2}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}mm_, + nn_, : \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}m^2 + n^2}\ \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}m_,^2 + n_,^2} \text{ (Seite)}$$

$$\mp \cos = 2 + 3\mu\mu_, + \nu\nu_, : \sqrt{2 + 3\mu^2 + \nu^2}\ \sqrt{2 + 3\mu_,^2 + \nu_,^2} \text{ (Kante),}$$

denn die Formeln sind vollständig reciprok. Suchen wir jetzt an der Hand der Projection des regulären Systemes tab. 4 fig. 2 die Winkel vom

Rhomboeder des **Tetraeders** $\infty a : \frac{1}{4}b$ mit $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b'$, so ist für die

Kante $\mu = 0,\ \nu = 4;\ \mu_, = 2,\ \nu_, = -2$, folglich

$$-\cos = 2 + 0 - 2 . 4 : \sqrt{2 + 0 + 16}\ \sqrt{2 + 3 . 4 + 4} = -\tfrac{1}{3}.$$

Zwischen den Zonenpunkten $\frac{5}{4}a + \frac{1}{4}b$ und $\frac{5}{4}a' + \frac{1}{4}b$ liegt die

Seite $m = \frac{5}{4}$, $n = \frac{1}{4}$; $m_, = -\frac{5}{4}$, $n_, = \frac{1}{4}$, folglich

$$+ \cos = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} : \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{9}{16} + \tfrac{1}{16}}\ \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{9}{16} + \tfrac{1}{16}}$$
$$= (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}) : \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{2}.$$

Rhomboeder des **Granatoeders** gibt zwischen dem

Zonenpunkte $3a + b$ und $3a' + b$ für die

Seite $m = 3$, $n = 1$; $m_, = -3$, $n_, = 1$

$$+ \cos = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} . 3 . 3 + 1 . 1 : \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} . 9 + 1}\ \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} . 9 + 1}$$
$$= -\tfrac{3}{2} : \tfrac{9}{2} = -\tfrac{1}{3}.$$

Zwischen den Sectionslinien $\infty a : b$ und $2a : 2b'$ für die

Kante $\mu = 0$, $\nu = 1$; $\mu_, = \frac{1}{2}$, $\nu_, = -\frac{1}{2}$

$$- \cos = 2 + 0 - \tfrac{1}{2}\ \sqrt{2+0+1}\ \sqrt{2 + 3 . \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}} = \tfrac{3}{2} : 3 = \tfrac{1}{2}.$$

Es hat also der $-\cos$ der Tetraederkante $-\frac{1}{3} = 70.32$, der $+\cos$ der Granatoederseite $-\frac{1}{3} = 109.28$; und umgekehrt der $+\cos$ der Tetraederseite $\frac{1}{2} = 60^0$ und der $+\cos$ der Granatoederseite $-\frac{1}{2} = 120^0$.

Für die gewöhnlichen Formeln des dreigliedrigen Systemes trifft dieser Winkelwechsel nicht ein, und zwar ist daran das Verhältniß der Axen Schuld (Hdb. Mineral. 1863 pag. 396). Nur der einzige Fall, wo $s=c$ d. h. $b=2c=2$ wird, macht eine Ausnahme. Wählen wir zum Beweise die Tangentenformeln pag. 290, so ist

$$b = a\sqrt{3} = 2,\ a = \sqrt{\tfrac{4}{3}} \text{ und } \frac{1}{a} = \alpha = \sqrt{\tfrac{3}{4}}$$

zu setzen, wir erhalten

$$\text{Kante}\quad tg = \sqrt{3}\ \sqrt{1 + (m^2 + 3n^2)\tfrac{4}{3}} : 3\mu n - m\nu$$
$$= \sqrt{3 + (m^2 + 3n^2)4} : 3\mu n - m\nu,$$
$$\text{Seite}\quad ctg = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\ \sqrt{1 + (\mu^2 + \tfrac{1}{3}\nu^2)\tfrac{3}{4}} : \tfrac{1}{3}m\nu - \mu n$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{3} + (\mu^2 + \tfrac{1}{3}\nu^2)\tfrac{1}{4}} : \tfrac{1}{3}m\nu - \mu n.$$

Was bei dem Regulärsystem Würfel und Gegenwürfel gab, ist jetzt Rhomboeder

$a : b$ und erstes schärfere $\infty a : \frac{1}{4}b$.

Das **Rhomboeder** hat für die halbe Endkante den

Zonenpunkt $0a + b$ und die Sectionslinie $a : b$

$m = 0$, $n = 1$; $\mu = \nu = 1$, gibt

$$\text{Kante}\quad tg = \sqrt{3 + 3 . 4} : 3 = \sqrt{\tfrac{5}{3}},$$
$$\text{Seite}\quad ctg = \sqrt{\tfrac{1}{3} + (1 + \tfrac{1}{3})\tfrac{1}{4}} : 1 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

1 **schärfere Rhomb.** hat für die halbe Endkante den

Zonenpunkt $\frac{5}{4}a + \frac{1}{4}b$ und die Sectionslinie $\infty a : \frac{1}{4}b$

$m = \frac{5}{4}$, $n = \frac{1}{4}$; $\mu = 0$, $\nu = 4$, gibt

$$\text{Kante}\quad tg = \sqrt{3 + (\tfrac{9}{16} + \tfrac{3}{16})4} : \tfrac{5}{4} . 4 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$
$$\text{Seite}\quad ctg = \sqrt{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} . 16 . \tfrac{1}{4}} : \tfrac{1}{3} . \tfrac{5}{4} . 4 = \sqrt{\tfrac{5}{3}}.$$

Um zu entwickeln, haben wir den weitläufigen Weg eingeschlagen. Am

kürzesten hätten wir die allgemeine Formel für die betreffenden Winkel hingesetzt:

Rhomboederkante pag. 290 $\text{tg} = \sqrt{\tfrac{1}{3} + \frac{a^2}{\mu^2}} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{4}{3\mu^2}}$,

$\mu = 1$ gibt $\sqrt{\tfrac{5}{3}} \ldots 52^0\,14'$,

im schärfern Rhomboeder $\frac{a}{2} : \frac{a}{2}$ ist

$\mu = 2$ gibt $\sqrt{\tfrac{2}{3}} \ldots 50^0\,46'$,

Dreikantner pag. 291 $\text{tg}, = \frac{1}{\nu - \mu} \sqrt{\tfrac{1}{3}(\mu + \nu)^2 + \tfrac{4}{3}}$ für

$\mu = 1,\ \nu = 3$ gibt $\sqrt{\tfrac{5}{3}}$;

Rhombseite pag. 292 $\text{ctg} = \tfrac{1}{3} \sqrt{3 + 4\mu^2\alpha^2} = \sqrt{\tfrac{1}{3}(1 + \mu^2)}$

gibt für $\mu = 1 \ldots \sqrt{\tfrac{2}{3}}$; $\mu = 2 \ldots \sqrt{\tfrac{5}{3}}$ etc.

Für die Seiten der Dreikantner wählen wir die cos der ganzen Winkel, dann ist der stumpfe Seitenwinkel pag. 288 neben scharfer Kante

$\cos = \alpha^2(\mu+\nu)\,(\nu - 2\mu) - \tfrac{3}{2} : \sqrt{\alpha^2(\mu+\nu)^2 + 3}\ \sqrt{\alpha^2(\nu - 2\mu)^2 + 3}$, gibt

$(\tfrac{3}{4} . 4 - \tfrac{3}{2}) : \sqrt{\tfrac{3}{4} . 16 + 3}\ \sqrt{\tfrac{3}{4} + 3} = \tfrac{3}{2} : \tfrac{15}{2} = \tfrac{1}{5} \ldots 78^0\,28'$.

Rhomboederseite pag. 286

$$\cos = \frac{\mu^2\alpha^2 - \tfrac{3}{2}}{\mu^2\alpha^2 + 3} \ldots \frac{\tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{2}}{\tfrac{3}{4} + 3} = -\tfrac{1}{5} \,..\, 101^0\,32'.$$

$+ \tfrac{1}{5}$ kommt daher, daß wir das Supplement finden. Da nun der Winkel $\cos = \tfrac{1}{5}$ gleich dem Winkel von $\text{tg} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$, so haben wir in den drei Körpern dreimal die gleichen Winkel oder deren Complemente.

Wäre die Hauy'sche Ansicht richtig gewesen, so hätten wir im Kalkspath statt 3+1 Axe vier gleiche Axen a, das Rhomboeder bekäme das Zeichen 2a : a : 2a : a, worin das letzte a die Hauptaxe c bedeutete. Wir verfolgen das nicht weiter, auch übt es auf unsere Projectionsfigur durchaus keinen Einfluß, denn wie das viergliedrige System dem regulären in der oktaedrischen, so gleicht das dreigliedrige demselben in der rhomboedrischen Stellung. Der einzige Unterschied liegt in der Wiederholung der Flächen, denn der 48flächner zerlegt sich dort in drei Vierkantner (Dioktaeder), hier in vier Dreikantner (Dirhomboeder) ꝛc. Auf die

Kugelprojection tab. 1 fig. 2 sind dagegen die Winkel von Einfluß. Wir haben zwar oben pag. 147 schon gezeigt, daß die Entwerfung für das reguläre System keine Schwierigkeiten bietet. Jetzt nehmen wir, wie bei der viergliedrigen Stellung pag. 140, die dreigliedrige Linearprojection zu Hilfe tab. 4 fig. 2, und kommen fast mit der gleichen Leichtigkeit zum Ziele. Wir ziehen einen beliebigen Kreis, worin die drei sich unter 60° schneidenden Hauptdurchmesser aaa den Sectionslinien des Leucitoeders 112, die Zwischenaxen bbb den Granatoederflächen 110 entsprechen. Sie bilden die beiden sechsseitigen Säulen. Die Zonenpunkte der Kanten sowie die Orte der Flächen fallen sämmt-

lich in die Zwischenaxe bbb. Denn man darf sich die Kugelfläche nur so um die Würfelecken gelegt denken, daß beide Mittelpunkte zusammenfallen, durch welche Träger und Flächen gehen. Alles kommt nun auf die Bestimmung der Kante b oder der Diagonale $\frac{b}{2}$ an. Da die Würfelfläche 35° 16′ (halber Tetraederwinkel) gegen die rhomboedrische Axe geneigt ist, so darf ich diesen Winkel nur als Centrumswinkel von Q nach P eintragen, von P nach dem Auge a, ziehen, so ist $\frac{b}{2}$ der Diagonalpunkt, durch welchen der Würfelkreis b gehen muß. Die Entfernung vom Mittelpunkt ist

$$b = tg\ 17 . 38 = 0{,}318, \text{ für den Halbmesser } a = 1.$$

Ein Perpendikel y im Dreieck B Q $\frac{b}{2}$ auf die Mitte der Hypotenuse z errichtet gibt uns auf der Zwischenaxe b in B den Mittelpunkt des Würfelkreises h. Der Radius r zwischen B und $\frac{b}{2}$ ist

$$r^2 = \tfrac{1}{4}z^2 + y^2,\ z = 1{,}05,\ y = 0{,}525\ tg\ 72 . 22,$$

d. h. $r = \sqrt{3}$. Wir dürfen also nur, wie bei der Projection auf die Würfelfläche, die Quadrantsehne $= \sqrt{2}$ auf der Zwischenaxe vom Mittelpunkte aus nach B abtragen, so ist das der Mittelpunkt des Würfelflächenkreises h, denn von hier nach a′ oder $\frac{b}{2}$ beträgt die Linie $\sqrt{3}$. Jetzt nehmen wir unsere Projection auf die Oktaederfläche pag. 168 zur Hand, so ist auf der Zwischenaxe $\sqrt{2}$ die Länge von B, woraus sich die Länge von $A = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ durch die Sectionslinie der Würfelfläche h von selbst ergibt, da $B = \sqrt{2} = A\sqrt{3}$ ist. Wir bezeichnen sie zum Unterschiede von den Kreisschnitten mit großen Buchstaben AB, dann haben die nebenliegenden Sextanten A′B′. Punkt $\pi = A' + 0$ ist der Mittelpunkt vom Dihexaederkreise π des Pyramidenwürfels 120; $d = \tfrac{1}{2}B' + 0$ der Mittelpunkt des Granatoederkreises d. Der Mittelpunkt des Oktaederkreises $o = 2B' + 0$ wird durch die Sectionslinie des Granatoeders d erzeugt. Die Sectionslinie des Oktaeders $o = \tfrac{1}{2}A : \tfrac{1}{2}A$ gibt mir das Rhomboeder l des Leucitoeders 112 in $\tfrac{1}{4}B + 0$ und das Dihexaeder x des 48flächners 123 in $\tfrac{1}{2}A' + 0$ den Sectionskreis 6a : 3a : 6a. Die Sectionslinie des Pyramidenwürfels $3A : \tfrac{3}{2}A : 3A$ gibt mir in $B' + 0$ den Gegenwürfel p, des Pyramidenoktaeders 221, und in $B + \tfrac{3}{2}A$ den Dreikantner l, $= a : \tfrac{3}{2}a : 2a$ des Leucitoeders ꝛc. Die schwierigsten Kreise sind mit Leichtigkeit gefunden, man macht die Figur mit derselben Freude, wie die Linearprojection, nur muß man ein größeres Papier nehmen, so daß auch von dieser Seite die geraden Linien vor den Kreisen den Vorzug haben. Um für die Zwischenrhomboeder den Einsatzpunkt der zweiten Zirkelspitze zu finden, st es gut, die Axenbe-

zeichnungen hinzusetzen. Denn da wir z. B. wissen, daß der Dreikantner des Leucitoeders 112 l, = a : $\frac{2}{3}$a : 2a hat, so darf ich vom Mittelpunkte l, nur nach a oder 2a spannen, um den Radius des gesuchten Kreises ohne alles Weitere zu haben. Doch können wir auch die Fläche entwickeln: da alle Kreissehnen durch den Mittelpunkt gehen müssen, so haben wir nur den punktirten Radius von l, nach dem Mittelpunkte zu ziehen, einen rechten Winkel anzulegen, so bestimmt der im Projectionskreise den Durchschnittspunkt u, und damit den Radius l,u des gesuchten Kreises, welcher durch a : $\frac{2}{3}$a : 2a geht. Auf diese Weise kann man die Flächenausdrücke ebenfalls meist ohne Rechnung entwickeln.

Die kleine Fig. 3 habe ich daneben gesetzt, um die Construction nochmals zu veranschaulichen: h ist die Flächendiagonale und k die Kante eines Würfels, welche gegen die Axe c etwa 35° und 55° machen. Lege ich dieselben durch den Mittelpunkt, so fallen sie nach h, und k,, und bestimmen so die Punkte P und P, im Projectionskreise, die dann durch den Augenstrahl a' nach $\frac{b}{2}$ und b projicirt werden. Ganz auf die gleiche Weise kann ich aber jedes beliebige Rhomboeder construiren: ich darf blos der Diagonale h tab. 1 fig. 5 die Neigung der Rhomboederfläche gegen die Axe c geben, so ist der Bogen QP dieser Neigung gleich, und p der Ort der Diagonale, durch welchen der Sectionskreis h gehen muß. Ein Perpendikel y auf die Mitte von z = Qp gefällt bestimmt mir wieder die Axe B. Mit h ist auch die Lage der Kante k gegeben, denn wie beim Würfel, so muß auch bei den Rhomboedern MN durch S gedrittelt werden, so daß MS = 2NS. Lege ich nun diese k durch den Mittelpunkt nach k_2, so fällt ihr Ort P_2 nicht mit P, zusammen. Wie beim 4gliedrigen fallen also Flächenorte und Projectionskreise auseinander.

Wir können die Linien jedoch auch ohne Constructionen finden: sehen wir das reguläre als zweigliedrig an, so werden die Axen

$$A : B : c = \sqrt{\tfrac{2}{3}} : \sqrt{2} : 1, \text{ daher}$$
$$\alpha : \beta : c = \sqrt{\tfrac{3}{2}} : \sqrt{\tfrac{1}{2}} : 1 = \tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{2}{3}} : \tfrac{1}{2}\sqrt{2} : 1;$$

α und β geben uns die Sectionskreise, A und B dagegen die Flächenorte: denn $\alpha = \frac{1}{2}$B ist der Mittelpunkt für den Granatoederkreis d ꝛc. Suchen wir den Kreis von

$$\pi = \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}A = \beta + \tfrac{1}{3}\alpha,$$

so geht er b : 3a, wie die Figur 2 zeigt. Ja das Bild zu entwerfen, brauchen wir uns um die Zeichen der Zonenpunkte gar nicht zu kümmern, sondern verbinden blos den Mittelpunkt mit dem Centrum, legen die Kreissehne, und ziehen den Kreis, wo er hin gehen mag.

Kalkspath tab. 1 fig. 4 hat die Eigenthümlichkeit, daß die Flächen sich gegen die Hauptaxe etwa 45° neigen. Daher steht in der Kugel-

projection der Ort P vom Mittelpunkte gerade so weit ab, als der Halbirungspunkt des Sectionskreises P. Wir können uns davon sofort überzeugen, wenn wir P über und P′ links unter der Horizontalaxe A 45° im Projectionskreise fixiren, und von den fixirten Punkten nach dem Auge ziehen, so wird die Verticalaxe β von der Augenlinie in P und P′ geschnitten. In diesem besondern Falle geben die Sectionskreise auch zugleich die Flächenorte, ähnlich wie beim regulären Systeme.

Nach Hauy's Annahme verhält sich s : c = 1 : 1. Da nun jeder Sextant AAo ein gleichseitiges Dreieck bildet, so ist

$$A^2 = \tfrac{1}{4}A^2 + s^2$$

$$A^2 - \tfrac{1}{4}A^2 = \tfrac{3}{4}A^2 = 1, \text{ oder } A = \sqrt{\tfrac{4}{3}},$$

woraus sich sofort $B = A\sqrt{3} = 2$ ergibt. Folglich haben wir die Axenverhältnisse

$$A : B : c = \sqrt{\tfrac{4}{3}} : 2 : 1,$$

$$\alpha : \beta : c = \sqrt{\tfrac{3}{4}} : \tfrac{1}{2} : 1 = \tfrac{3}{4}A : \tfrac{1}{4}B : 1,$$

$$s = \tfrac{1}{2}B = 2\beta.$$

Ziehen wir mit der lateinischen Axe B den Sectionskreis f, dessen Radius $= \sqrt{1 + B^2}$ ist, so muß derselbe durch $\tfrac{1}{4}\beta$ gehen, also den Axenausdruck $\frac{a}{2} : \frac{a}{2}$ bekommen. Die Durchschnittspunkte der drei Kreise f f f liefern uns die Orte PPP. Den Ort P muß aber auch der Sectionskreis P des Hauptrhomboeders a : a treffen. Derselbe hat zu seinem vollern Zeichen

$$b : a : \frac{b}{2} : a : b : \infty a,$$

wir müssen daher um $2\beta = s$ den Sectionskreis P mit dem Radius $= \sqrt{1 + 4\beta^2}$ ziehen, d. h. zum Rhomboeder f das nächste stumpfe Rhomboeder P nehmen. Sind auf diese Weise die Cardinalpunkte gegeben, so entwickelt sich alles andere von selbst. Die lateinischen und griechischen Axen wirft man unter einander, je nachdem man sie braucht. Wollen wir z. B. Ort und Sectionslinien des gewöhnlichen Dreikantners

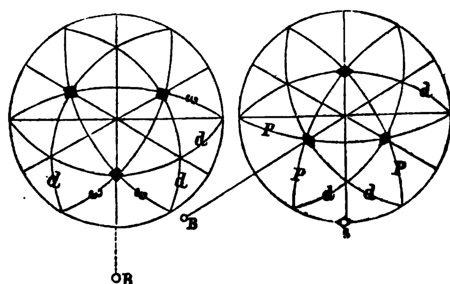
$$r = b : a : \frac{b}{4} : \frac{a}{3} : \frac{b}{5} : \frac{a}{2} = B : \tfrac{1}{3}A = \beta + 3\alpha$$

bestimmen, so muß ihr Ort $r = \beta + 3\alpha$ in dem Coordinatenkreise pag. 158 B und $\tfrac{1}{3}A$ liegen, wovon man sich mit dem Zirkel sogleich überzeugt; der Sectionskreis $r = B : \tfrac{1}{3}A$ hat dagegen seinen Mittelpunkt in $\beta + 3\alpha$, ich muß also mit β um 3α und mit 3α um β Bogen schlagen, so ist der Mittelpunkt für den Sectionskreis $r = \frac{a}{2} : \frac{a}{3} : a$ construirt. Miller (Elem. Intr. Miner. 1852 pag. 576) geht über die Kreise der drei Rhomboeder nicht hinaus, er scheint überhaupt die Orte blos durch Winkel bestimmt zu haben, daher die vielen Winkelangaben, und

das äußerst magere Zonenbild. Wahrscheinlich machte ihm das Auffinden der Zonenkreise Mühe. Wir haben so eben für den Sectionskreis r nicht blos α sondern auch β mit zu Hilfe genommen. Dieß ist aber nicht nothwendig, sondern nach pag. 160 suchen wir für die Sectionslinie $\frac{a}{2} : \frac{a}{3}$ im gegenüberliegenden Sextanten den Punkt $2\alpha + 3\alpha$, was mittelst Anlegen eines Rechtecks geschieht, so ist der Mittelpunkt am unmittelbarsten gefunden. Um den Ort r zu bekommen, dürfen wir nur mit $\frac{1}{2}$A und $\frac{1}{3}$A Kreise schlagen, wo sie sich schneiden, ist der gesuchte Punkt. Mit dem Axenausdrucke der Fläche sind daher auch Sectionskreis und Flächenort sofort auf zweierlei Weise gegeben. Für flächenreiche Körper bietet das Entwerfen der Orte durchsichtigere Bilder, aber die todte Menge hat wenig Werth, wenn sie nicht durch eine Reihe verschränkterer Zonenkreise gleichsam belebt wird. Wollen wir daher vom Kalkspath eine vollere Einsicht bekommen, so müssen wir Hochstetters große Figur (Denkschrift. Wien. Akad. 1853) zur Hand nehmen: in der Kantenzone des Rhomboeders P, welche in unsern Punkt B fällt, werden allein 24 Sectionslinien gezeichnet, wovon wir der Methode wegen einige hinsetzen, und kurz mit 1 bis 13 bezeichnen. Zunächst fallen alle in den Zonenkreis f, welchen wir um B mit dem Radius $\sqrt{1 + B^2}$ ziehen. Das Rhomboeder P = 1 = B : A : s : A hat seinen Ort in 1 P, um denselben im Zonenkreise f zu finden, dürfen wir nur den Zirkel mit dem Radius $\sqrt{1 + A^2}$ in einen der beiden A oder mit dem Radius $\sqrt{1 + s^2}$ in s einsetzen, in allen drei Fällen finden wir den gesuchten Punkt. Gerade so geht es mit 2 und 3, wo dieselben die Axen A oder s schneiden, setzen wir den Zirkel ein. Fläche r gehört dem gewöhnlichen Dreikantner $\frac{a}{2} : \frac{a}{3}$, jeder der Axenschnitte genügt, um den Ort im Durchschnitte der Zonenkreise f und g sogleich zu finden. Die Säule 4 geht durch den Nullpunkt, daher muß ihr Ort am Ende des senkrecht dagegen stehenden Radius im Kreispunkte 4 liegen. So sind alle übrigen Punkte von 5 bis 13 einfach mit dem Zirkel auf Kreis f bestimmt, indem ich die eine Spitze in α, A, $\frac{2}{3}$A, $\frac{1}{2}$A 2c. einsetze, mit der andern nach $s = 2\beta$ greife, und sehe, wo diese andere den Zonenkreis f trifft. Natürlich müssen die Orte auch der Reihe nach folgen: bei P fängt es im Zonenkreise an, geht dann 2, 3, 4, r, 5, 6, 7 2c. Zwischen 9 und 13 drängen die Punkte sich so, daß man sie kaum noch hinbringt. Man braucht auch hier nicht blos die Punkte auf der horizontalen A zu nehmen, sondern jeder Schnitt der Axen und Zwischenaxen genügt. Ja ich kann sogar jeden beliebigen Punkt wählen. Wollte ich z. B. den Ort der Rhomboederfläche 6 suchen, und ich wüßte nur, daß sie durch irgend einen Punkt x ginge, so verbinde ich blos x mit dem Mittelpunkte, setze im letztern eine Senkrechte dagegen ein und ver-

längere so weit, bis sie den Projectionskreis in y schneidet, so ist xy der Radius, welcher mich auf den Ort 6 führt. Der zweite Zonenpunkt s mit den Wirtelstrahlen 1 bis 9 hat den Zonenkreis P, welcher um s mit dem Radius $\sqrt{s^2 + 1} = \sqrt{2}$ gezogen wird. Die Orte sind wieder mit den gleichen Zahlen bezeichnet. Das Dihexaeder 7 liegt in der Horizontalaxe A gegenüber. Fläche 1 muß wieder am Ende des auf ihr senkrechten Radius liegen, und da Linie f Horizontalaxe A im Unendlichen schneidet, so muß der Coordinatenkreis eine gerade Linie werden, die der Medianlinie entsprechend in f den Ort erzeugt.

Stellen wir nochmals die Kugelprojectionen vom Kalkspath und



Regulärsystem neben einander, so findet der Unterschied statt, daß beim Regulären die Durchschnittspunkte der Würfelsectionslinien ω zugleich die Orte der Würfelflächen sind, beim Kalkspath dagegen nicht. Denn construiren wir uns die Orte der Blätterbrüche mittelst s = c = 1, und verbinden dieselben durch die Sectionskreise P, so entsprechen diese nicht mehr wie beim regulären Systeme den Orten derselben Flächen, sondern wenn die schwarzen Rhomben den Flächenorten P entsprechen, so sind nach Hauy'scher Annahme die Verbindungskreise P Sectionslinien des nächsten schärfern Rhomboeders. Die Sectionskreise des Hauptrhomboeders entsprechen vielmehr den Kreisen d, welche mit der Quadrantsehne erzeugt sind, gerade wie auf dem Projectionskreise der Würfelfläche das Granatoeder pag. 141 gefunden wurde.

Manche ziehen es in neuern Zeiten vor, wieder auf die Hauy'sche Anschauung zurückzugehen, und die Kanten des Rhomboeders als drei gleich lange und gleich schiefe Axen zu nehmen. Dann kommen natürlich, weil alle Systeme dem gleichen Zonenconnex unterworfen sind, Flächenzeichen, die ganz mit dem regulären System übereinstimmen, scheinbar einfacher werden, als die Weiß'schen Zeichen, aber wegen ihres schiefen Winkels für den Krystallographen ein für alle Mal etwas Unbequemes enthalten. Doch lesen wir auch diese Ausdrücke aus unserer Projection leicht ab, wie ich das schon im Hdb. Mineral. 1855 pag. 95 nachgewiesen habe. Im Grunde bedürfte es dazu keiner besondern Figur,

denn man kann die Verhältnisse fast eben so gut aus der Projection des regulären Systemes auf die Würfelfläche ablesen. Doch um das Auge besser zu leiten, wähle ich das Kalkspathrhomboeder tab. 3 fig. 1 als Ausgangspunkt. Die zwei dicken Linien AA′ unter 102° entsprechen den Kanten des Kalkspathrhomboeders. Denken wir uns nun die dritte aufrechte nach vorn geneigt, so gehören die drei punktirten Linien in der Granatoederkante q = A + A zum Leucitoeder l = 2A : 2A = $\frac{1}{2}$A : A′, deren Sectionslinien bekanntlich die Axen in dreigliedriger Stellung bilden. Heißt ihr Mittelpunkt q, so steht die aufrechte Axe qc symmetrisch gegen die drei isoklinen Rhomboederkanten AAA, wir haben also 2 + 1gliedrige Axenordnung. Der außerhalb der Projectionsebene liegende Punkt c ist beiden gemein, nur geht in den isoklinen Axen c nach Q, und bei den dreigliedrigen c nach q. Das Rhomboeder, welches von a : a : ∞a : c geht, gibt uns im punktirten Strahle die Axeneinheiten, welche in qa = a und qA′ = ∞a bestehen müssen. Alles was durch die Punkte A′ geht, hat ∞, so namentlich die Oktaederfläche o, = A′ : A′ = ∞a : ∞a, die zu gleicher Zeit auch der dritten punktirten Axe parallel geht. Die drei andern Oktaederflächen, das nächste schärfere Rhomboeder bildend, gehen

$$o = A : A = A : A',$$

ihre Schnitte mit den drei punktirten Axen bestimmen uns $\frac{1}{2}$a, denn das nächste schärfere Rhomboeder geht ja $\frac{a'}{2} : \frac{a'}{2}$.

Die Granatoeder d, = A : ∞A und 0A : 0A′ geben uns die drei Zwischenaxen b, die andern drei A′ : ∞A und 0A : 0A das nächste stumpfe Rhomboeder d = 2a′ : 2a′.

So erhalten wir allmählig ohne irgend eine Rechnung immer mehr bekannte Schnitte. Zu unserer Freude bemerken wir, daß die quer gelagerte punktirte Axe in gleichem Verhältniß geschnitten wird, wie es bei senkrechter Stellung der Hauptaxe c der Fall sein würde. Es muß das ja sein, weil c dagegen senkrecht bleibt. Wir haben darin eine bequeme Handhabe, alle Rhomboeder sofort abzulesen, da zwei Axenschnitte ja gleich sind, und die dritte Axe im Unendlichen getroffen wird, also die Sectionslinie nothwendig durch A′ = ∞a geht.

Beispielsweise muß eine Linie p = A′ : 2A dem Gegenrhomboeder a′ : a′ angehören, da 2A = a ist, in A′ der Punkt ∞a liegt, und die dritte a parallel geht, wodurch ihr zweites a bestimmt ist. Dies Rhomboeder kam ausgezeichnet selbstständig im Basalttuffe am Bölle bei Owen Oberamts Kirchheim vor, und entspricht, wie aus A′ : 2A folgt, dem Gegenwürfel des gewöhnlichen Pyramidenoktaeders pag. 229. Kann man die Zahl nicht unmittelbar ablesen, so genügt die kleinste Zonenpunktrechnung, denn die Sectionslinie 2A : 2A ist allen gemein, und der Mittelpunkt q = A + A. Ein Leucitoid A′ : $\frac{5}{3}$A bildet daher mit 2A : 2A nach der Zonenpunktformel pag. 188 $\frac{2}{11}$a + $\frac{2}{11}$a denn

$\mu = \frac{1}{2}$ $\nu = \frac{1}{2}$
$\mu_{,} = -1$ $\nu_{,} = \frac{8}{3}$ gibt $(\frac{16}{6} - \frac{3}{6})a + (\frac{3}{6} + \frac{6}{6})b + (\frac{8}{6} + \frac{3}{6})c$
$13a + 9b + 11c = \frac{13}{11}a + \frac{9}{11}b.$

Da nun $q = \frac{1}{11}A$ ist, so hat das Rhomboeder $\frac{1}{11}(13-11) = \frac{2}{11}a : \frac{2}{11}a$.

Ebenso findet sich vom Leucitoid $A' : \frac{3}{4}A$ das Rhomboeder $\frac{2}{7}a' : \frac{2}{7}a'$. Daß es ein Nebenrhomboeder sei, folgt aus der Lage im gegenüberliegenden Sextanten.

Auch die Dirhomboeder (Dreikantner) ergeben sich zum Theil außerordentlich leicht. Zum Beispiel alle Linien, welche den beiden Axen qA' parallel laufen, müssen durch a gehen, also in der ersten Kantenzone liegen. Dahin gehören gleich die beiden $\pi_{,} = 0A : \frac{0}{2}A'$, welche in $\frac{a}{3}$ schneiden, also einem Dreikantner $a : \frac{1}{3}a = a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a$ angehören, womit dann auf den beiden symmetrischen Axen die Schnitte $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ bestimmt sind. Das Leucitoeder $l_2 = A : \frac{1}{2}A'$ geht durch 2a, folglich haben wir, da $\frac{1}{2}A = a$ ist,

$$\frac{a}{1} : \frac{a}{x} : \frac{a}{\frac{1}{2}} = a : \frac{a}{1 + \frac{1}{2}} : 2a = a : \tfrac{2}{3}a : 2a.$$

So bringen wir alle Schnitte mit Leichtigkeit heraus, namentlich wenn wir uns der Entwickelung beim regulären System erinnern, wo z. B. $\pi = 3a : \frac{3}{2}a : 3a$ ein Dihexaeder war. Wir haben hier das Eigenthümliche, daß die Reihenfolge $\frac{3}{2}a : 3a : 3a$ geht. Allein wir müssen bedenken, daß A' und A' die Punkte ∞a im drei- und einaxigen Systeme bezeichnen, und das eine 3a diesseits, das andere 3a jenseits jenem ∞a liegt; dieses ist daher negativ, und muß herüberschlagend gedacht werden, so daß $\frac{3}{2}a$ richtig in die Mitte von beiden kommt.

Da wir auf der dreigliedrigen Queraxe alle Ausdrücke unmittelbar ablesen, so bedarf es für die Rechnung blos noch des Schnittes auf einer der beiden andern Axen. Hier bringen wir das Kantenzonengesetz in Anwendung. Legen wir das Rhomboeder mit seiner Fläche QAqA auf die Projection mit der Neigung der dritten Kante cQ nach vorn, so läuft die Rhomboederaxe von c nach q. Ziehe ich dann die Gradendfläche $c : \infty a : \infty a : \infty a$, welche dem Oktaeder $c : A' : A'$ entspricht, so ist es eine allgemeine Eigenschaft der Rhomboeder, daß die Linie qq' durch Q gedrittelt wird. Es ist eben immer wieder das Kantenzonengesetz. Denn denken wir uns die Axe c als die Resultante der drei Kantenkräfte, so muß eine Fläche durch die Zickzackkanten gelegt dritteln, weil $\frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$ ist. Jetzt machen wir einen Aufriß durch cqA' tab. 3 fig. 2, d. h. in der Ebene der sechsseitigen Säule $a : a : \infty a : \infty c$, so liegt die wirkliche dreigliedrige Axe qa' senkrecht gegen qc: eine Linie, die von c nach A' geht, muß Axe qa' im Unendlichen treffen. Das

war ja der Sinn, wenn wir sagten, was durch Punkt A' gehe, müsse in dreigliedriger Stellung unendlich haben. Nehmen wir nun nicht QA', sondern qA' = A' als Einheit der schiefen Axen, so bildet cqa'A' ein Parallelogramm, worin cq = A'a' = 1 gesetzt, eine Fläche $\frac{A'}{\mu}$ hinten $\frac{a'}{\mu - 1}$ $\left(\text{vorn } \frac{a}{\mu + 1}\right)$ haben muß, weil $1 + \mu - 1 = \mu$ ist. Einige Beispiele werden das erläutern:

$$P = \frac{A'}{2} : \frac{A'}{1} \text{ gibt } \frac{a'}{2-1} : \frac{a'}{1-1} = a' : \infty a = a : a : \infty a$$

$$d = \frac{A'}{1} : \frac{A'}{(\frac{1}{2})} \text{ gibt } \frac{a'}{1-1} : \frac{a'}{\frac{1}{2}-1} = \infty a : 2a' = 2a' : 2a' : \infty a$$

$$o, = A' : A' \text{ gibt } \frac{a'}{1-1} : \frac{a'}{1-1} = \infty a : \infty a' = \infty a : \infty a : \infty a$$

$$o = A' : A \text{ gibt } \frac{a'}{1-1} : \frac{a}{1+1} = \infty a : \frac{a'}{2} = \frac{a'}{2} : \frac{a'}{2} : \infty a$$

$$\pi = \tfrac{3}{4}A' : \tfrac{3}{2}A' \text{ gibt } \frac{a'}{\frac{4}{3}-1} : \frac{a'}{\frac{2}{3}-1} = 3a' : 3a = 3a : \tfrac{3}{2}a : 3a$$

$$\pi, = \tfrac{1}{4}A' : \tfrac{1}{2}A \text{ gibt } \frac{a'}{4-1} : \frac{a'}{2-1} = \frac{a'}{3} : \frac{a'}{1} = a : \frac{a}{3} : \frac{a}{2}.$$

So können wir jeden Ausdruck mittelst der zwei symmetrischen Axen finden, und die Queraxe als Controle nehmen.

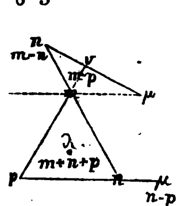
Mit Leichtigkeit läßt sich die Sache auch umkehren, d. h. haben wir einen dreigliedrigen Ausdruck, so sollen die Axenschnitte auf den Rhomboederkanten gefunden werden. Nehmen wir zu dem Ende die Projection auf die Oktaederfläche tab. 4 fig. 2 zur Hand, so liegen jetzt in der Würfelecke die drei gleichen Axen, wie das in der kleinen Nebenfigur tab. 3 fig. 3 noch besonders markirt ist. Eine der drei Kanten z. B. Q mag Nullpunkt der drei Axen sein, so müssen alle drei Rhomboederflächen durch den gemeinschaftlichen außerhalb liegenden Punkt c gehen. Sie würden dann auf die neuen unterhalb AB liegenden Axen ab bezogen die Ausdrücke

1 = 0b : a : c = b : ∞a : ∞c und 2 = 0a : b : c = a : ∞b : ∞c

bekommen. Dagegen muß 3 = ∞a : ∞b : c haben, woraus hervorgeht, daß die Punkte A und B den Ort Unendlich bedeuten. Alle Flächen (Granatoeder und Pyramidenwürfel), welche durch diese Punkte gehen, müssen eine der beiden Axen a und b im Unendlichen schneiden. Die Projectionsebene o, welche den Linien QA und QB parallel läuft, muß a : b : c gehen, also liegt im Unendlichen dieser Linien die Axeneinheit a und b. Die andern drei Oktaederflächen bilden das nächste schärfere Rhomboeder, folglich ist z. B. 4 = a : b : c. Damit sind die beiden andern Axeneinheiten fixirt, wie das auch aus den Granatoederflächen 5 = ∞a : b : c und 6 = ∞a : b : c hervorgeht. Daraus nehmen wir

sogleich die wichtige Regel ab, daß alle Sectionslinien, welche die drei Axen in der Einheit schneiden, entweder durch den Diagonalpunkt des Rhomboederdreiecks oder dessen Seiten parallel gehen müssen. Der Pyramidenwürfel 7, welcher die Seite B in ein Drittel schneidet, geht $c : \infty a : \frac{1}{2}b$. So fortfahrend könnte man eine Menge Cardinalpunkte feststellen. Ich habe für solche Betrachtungen mir ein für alle Mal eine große Figur mit farbigen Linien gemacht, wovon Methode Kryst. tab. 6 fig. 1 ein unvollständiges Abbild steht. Auf dieser Figur liest man sofort alles ohne irgend eine Rechnung ab. Nur das Kantenzonengesetz wird dabei wieder angewendet. Das klar zu machen, habe ich tab. 3 fig. 4 wieder einen kleinen Aufriß durch Axe C und B gelegt, dann steht im orthometrischen Systeme Axe b senkrecht gegen c, und man sieht nun leicht ein, daß (wie vorhin in fig. 2) eine Fläche von C nach B gezogen der untern Axe b parallel gehen muß. Eine $C : \frac{1}{2}B$ erzeugt b, weil $1 + 1 = 2$ ist; $C : \frac{1}{3}B$ erzeugt $\frac{1}{2}$, weil $2 + 1 = 3$ ist, kurz $\frac{B}{\mu}$ gibt $\frac{b}{\mu - 1}$. So ist es rechts von Q. Links dagegen erzeugt $C : \frac{1}{3}B'$ den Axenschnitt $\frac{b'}{4}$, weil ich jetzt addiren muß, $3 + 1 = 4$; $C : B'$ schneidet in $\frac{1}{2}b'$, und $C : \infty B'$ muß b' treffen, weil $1 + 0 = 1$ ist. Hat man sich einmal hineingedacht, so ist es eine wahre Freude, sich in dieser Weise auf der Figur zu ergehen: wir lesen bei einiger Uebung die einen Axenausdrücke so schnell, wie die andern ab.

Dem Rechner scheint es bequemer, die Sache mit bloßen Zahlen zu bewältigen. Wir bringen das mit dem Kantenzonengesetz pag. 191 am besten zu Stande. Heißen die Indices einer Fläche auf drei Axen bezogen



$$mnp = \frac{a}{m} : \frac{\lambda}{n} : \frac{a}{p}$$

auf die zugehörigen vier Axen dagegen

$$\mu\nu\pi\lambda = \frac{c}{\lambda} : \frac{\alpha}{\mu} : \frac{\alpha}{\nu} : \frac{\alpha}{\pi},$$

so ist $\pi = \nu - \mu$. Aus dem Kantenzonengesetze folgt sogleich

1) $\lambda = m + n + p$
2) $\mu = n - p$
3) $\nu = m - p$
4) $\pi = m - n = \nu - \mu$,

worauf wir bei der Anwendung des Kantenzonengesetzes nochmals zurückkommen. Sobald $m > n > p$ ist, wobei die negative Zahl kleiner als Null genommen wird, geben die vier Gleichungen positive Ausdrücke, woraus sich mnp leicht bestimmen läßt. Gleichung

$$1 + 3 + 4 = 3m = \lambda + \nu + \pi = \lambda + 2\nu - \mu = m$$
$$1 + 2 - 4 = 3n = \lambda + \mu - \pi = \lambda - \nu + 2\mu = n$$
$$1 - 2 - 3 = 3p = \lambda - \mu - \nu = \lambda - \mu - \nu = p.$$

Denn da ein Symbol dieselbe Fläche ausdrückt, mag es auch mit irgend einer beliebigen Zahl multiplicirt sein, so ist $\frac{3m\,3n\,3p}{3} = mnp$ die gesuchte Fläche.

Bei der Anwendung muß man an das Oktaeder in dreigliedriger Stellung pag. 168 denken: eine Fläche $mnp = \frac{a}{m} : \frac{b}{n} : \frac{c}{p}$ über der Oktaederfläche hat ihre Parallele in $\bar{m}\bar{n}\bar{p} = \frac{a'}{m} : \frac{b'}{n} : \frac{c'}{p}$, sie liegt an den Enden der Stellung; eine Fläche $mn\bar{p} = \frac{a}{m} : \frac{b}{n} : \frac{c'}{p}$ liegt dagegen an den Seiten, und hat ihre Gegenfläche $\bar{m}\bar{n}p = \frac{a'}{m} : \frac{b'}{n} : \frac{c}{p}$ ebenfalls an der gegenüberliegenden Seite.

Beispiel. Pyramidenwürfel 210 hat in seiner dreigliedrigen Stellung **oben** $210 = mnp$, seitlich $20\bar{1} = mnp$, folglich

$$\begin{array}{lll} & \text{oben} & \text{seitlich} \\ \lambda = m + n + p = & 3, & 1 \\ \mu = \quad\;\; n - p = & 1, & 1 \\ \nu = \quad\; m - p = & 2, & 3, \text{ das gibt} \end{array}$$

oben $\frac{c}{3} : a : \frac{a}{2} : \frac{a}{2-1} = c : 3a : \frac{3}{2}a : 3a$ Dihexaeder.

seitlich $c : a : \frac{a}{3} : \frac{a}{3-1} = c : a : \frac{a}{3} : \frac{a}{2}$ Dirhomboeder.

$$\begin{array}{llll} \text{Leucitoeder} & 211, & 21\bar{1}, & \bar{2}11 \\ & mnp & mnp & mnp \end{array}$$

Leucitoeder $211 = mnp$ gibt:

$$\lambda\mu\nu\pi = 4011 = \frac{c}{4} : \infty a : a : a = c : 4a : 4a.$$

$21\bar{1} = mnp$ gibt:

$$\lambda\mu\nu\pi = 2231 = \frac{c}{2} : \frac{a'}{2} : \frac{a'}{3} : a' = c : a' : \tfrac{2}{3}a' : 2a'.$$

$\bar{2}11 = mnp$ gibt:

$$\lambda\mu\nu\pi = 003\bar{3} = \frac{c}{0} : \frac{a}{0} : \frac{a}{3} : \frac{a}{3} = a : a : \infty a : \infty c.$$

Der vorige Dreikantner $\lambda\mu\nu\pi = 1132$ gehörte zur ersten Ordnung, weil $\mu < \pi$ ist; der Dreikantner 2231 zur zweiten, weil umgekehrt $\mu > \pi$ ist, d. h. der Leucitoederdreikantner hat seine stumpfe Kante wie die Kante des Würfels (Hauptrhomboeders), der Pyramidenwürfeldrei-

kantner wie die Fläche des Würfels liegen. Da man dies nun aber schon von vorn herein aus der Projection, ja selbst aus den Modellen ersieht, so braucht man auf das $\pm$ gar nicht so ängstlich zu achten.

So sieht man am 48flächner $123 = a : \frac{a}{2} : \frac{a}{3}$, daß alle der zweiten Abtheilung angehören. Der **oberste** Dreikantner hat alle Schnitte positiv, daher

$$123 \ldots 1 - 2 = 1,\ 1 - 3 = 2,\ 2 - 3 = 1,\ 1 + 2 + 3 = 6.$$

$$\text{Gibt } \tfrac{1}{6}c : a : \frac{a}{2} : a = c : 6a : 3a : 6a$$

das bekannte Dihexaeder pag. 169.

Der darunter liegende **mittlere** Dreikantner kommt mit dem größten zum negativen Schnitt. daher

$$\bar{1}23 \ldots \bar{1} - 2 = 3,\ \bar{1} - 3 = 4,\ 2 - 3 = 1,\ \bar{1} + 2 + 3 = 4$$

$$\text{gibt } \tfrac{1}{4}c : a : \tfrac{1}{4}a : \tfrac{1}{3}a = c : 4a' : a' : \tfrac{4}{3}a'.$$

Der folgende **untere** kommt mit dem mittlern zum negativen Schnitt, daher

$$1\bar{2}3 \ldots 1 - \bar{2} = 3,\ 1 - 3 = 2,\ \bar{2} - 3 = 5,\ 1 + \bar{2} + 3 = 2$$

$$\text{gibt } \tfrac{1}{2}c : \tfrac{1}{2}a' : \tfrac{1}{3}a' : \tfrac{1}{3}a' = c : a' : \tfrac{2}{3}a' : \tfrac{2}{3}a'.$$

Der folgende **unterste** kommt mit dem kleinsten zum Schnitt, daher

$$12\bar{3} \ldots 1 - 2 = 1,\ 1 - \bar{3} = 4,\ 2 - \bar{3} = 5,\ 1 + 2 + \bar{3} = 0$$

$$\text{gibt } \frac{c}{0} : a : \frac{a}{5} : \frac{a}{4} = \infty c : a : \frac{a}{5} : \frac{a}{4},$$

eine vier und vierkantige Säule. Ueber die Anordnung der Zeichen kann kein Zweifel sein, da immer die beiden kleinsten Brüche zum Axenschnitt kommen, und der größere daher an der Spitze steht, d. h. kommt $\frac{a}{\nu} : \frac{a}{\pi}$ zum Schnitt, so ist das Zeichen $\frac{a}{\nu - \pi} : \frac{a}{\nu} : \frac{a}{\pi}$, denn die Summe der Nenner muß immer die kleinste Zahl in der Mitte geben.

Wollen wir jetzt die 3 + 1axigen Schnitte auf drei Axen zurückführen, so hat der gewöhnliche Dreikantner

$$c : a : \tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{2}a \ldots \lambda\mu\nu\pi = 1132, \text{ folglich gibt}$$

$$\lambda + \nu + \pi = 1 + 3 + 2 = 6 = m$$
$$\lambda + \mu - \pi = 1 + 2 - 3 = 0 = n$$
$$\lambda - \mu - \nu = 1 - 1 - 3 = \bar{3} = p.$$

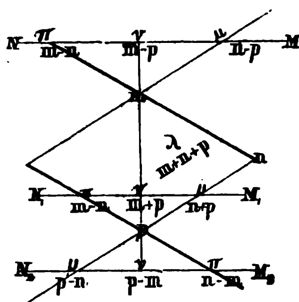
Der Körper hat also das Zeichen $60\bar{3} = 20\bar{1}$, gibt obigen Pyramidenwürfel. Der Kalkspathdreikantner

$$c : a : \tfrac{1}{4}a : \tfrac{1}{3}a \text{ hat } \lambda\mu\nu\pi = 1165, \text{ folglich gibt}$$

$$\lambda + \nu + \pi = 1 + 6 + 5 = 12 = m$$
$$\lambda + \mu - \pi = 1 + 1 - 5 = \bar{3} = n$$
$$\lambda - \mu - \nu = 1 - 1 - 6 = \bar{6} = p$$

$4\bar{1}\bar{2} = \bar{4}12$ gibt den untersten Dreikantner des häufigen 48flächners $a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a$.

Wenn die Körper zur zweiten Ordnung gehören, so darf ich nur die Ebene parallel mit sich bewegen und nach M,N, rücken, so fällt sie zwar in denselben Sextanten, aber da sie statt $+ \lambda$ nun $- \lambda$, den Gegenpunkt der Hauptaxe c, schneidet, so wird



1) $\bar{\lambda} = m + n + p$
2) $\mu = n + p$
3) $\nu = m + p$
4) $\pi = m - n = \nu - \mu$. Daraus folgt

$$2 - 1 = \bar{m} = \lambda + \mu$$
$$3 - 1 = \bar{n} = \lambda + \nu$$
$$3 + 2 - 1 = p = \lambda + \mu + \nu$$

Hätten wir also den Gegendreikantner $c : a' : \frac{1}{3}a' : \frac{1}{2}a'$, so wären

$$\lambda\mu\nu = 1\ 1\ 3, \text{ das gibt}$$
$$\bar{m} = 1 + 1 = \bar{2}$$
$$\bar{n} = 1 + 3 = \bar{4}$$
$$p = 1 + 1 + 3 = 5.$$

Wir hätten den Dreikantner des 48flächners $\bar{2}\bar{4}5 = 24\bar{5} = \frac{a}{2} : \frac{a}{4} : \frac{a}{5}$.

Hätten wir das Gegenrhomboeder $c : \infty a : a' : a'$, so wäre

$$\lambda\mu\nu = 101, \text{ das gibt}$$
$$\bar{m} = \lambda + \mu = 1 + 0 = \bar{1}$$
$$\bar{n} = \lambda + \nu = 1 + 1 = \bar{2}$$
$$p = \lambda + \mu + \nu = 1 + 0 + 1 = 2,$$

d. h. ein Pyramidenoktaeder $\bar{1}\bar{2}2 = 12\bar{2} = a : a : 2a$. Wenn es sich blos um das Finden der Zahl handelt, so sind dieses die einfachsten Formeln, aber da wir den Gegenpunkt der Axe c in Rechnung genommen haben, so müssen wir zur Orientirung am Modell die Vorzeichen tauschen. Denn $12\bar{2}$ würde in der dreigliedrigen Stellung das Scalenoëder bezeichnen, während es in der That das untere Rhomboeder $22\bar{1}$ ist, wir müßten also das Zeichen versetzen. Dies vermeiden wir sofort, wenn wir λ positiv lassen und die Linie heraus nach M_2N_2 rücken, dann wird

1) $\lambda = m + n + p$
2) $\mu = p - n$
3) $\nu = p - m$
4) $\pi = n - m$. Das gibt

$$
\begin{aligned}
1-3 \ldots\ 2m + n &= \lambda - \nu \\
2-3 \ldots\ m - n &= \mu - \nu \\
\hline
3m &= \lambda + \mu - 2\nu; \\
1+4 \ldots\ 2n + p &= \lambda + \pi = \lambda + \nu - \mu \\
4-3 \ldots\ n - p &= \pi - \nu = -\mu \\
\hline
3n &= \lambda - 2\mu + \nu \\
1+3 \ldots\ 2p + n &= \lambda + \nu \\
3-4 \ldots\ p - n &= \nu - \pi = \mu \\
\hline
3p &= \lambda + \mu + \nu
\end{aligned}
$$

Suchen wir jetzt den Gegendreikantner $c : a' : \frac{1}{3}a' : \frac{1}{2}a'$, so ist

$\lambda\mu\nu = 1\ 1\ 3$, folglich

$$
\begin{aligned}
m &= \lambda + \mu - 2\nu = 1 + 1 - 6 = \bar{4} \\
n &= \lambda - 2\mu + \nu = 1 - 2 + 3 = 2 \\
p &= \lambda + \mu + \nu = 1 + 1 + 3 = 5
\end{aligned}
$$

$\bar{4}25 = 4\bar{2}\bar{5}$ ist der untere Dreikantner des 48flächners $\frac{a}{2} : \frac{a}{4} : \frac{a}{5}$.

Das Gegenrhomboeder $\lambda\mu\nu = 101$ hat

$m = 1 + 0 - 2 = \bar{1}$; $n = 1 - 0 + 1 = 2$; $p = 1 + 0 + 1 = 2$,

das untere Rhomboeder $\bar{1}22$ des Pyramidenoktaeders $a : a : 2a$.

Zum Schluß noch etwas über die Benennung der Körper. Wir haben hier gegenüber dem viergliedrigen pag. 279 den eigenthümlichen Fall, daß von den sechs Sextanten im Allgemeinen nur die drei abwechselnden erfüllt sind. Blos in besondern Fällen werden alle gleich getroffen. Es gibt

1) eine Einzelfläche $c : \infty a : \infty a : \infty a$, die stets horizontal gelegt wird, und wogegen die Hauptaxe c senkrecht steht.

2) Zwei Hexagonalsäulen, Säule und Gegensäule, mit sechs gleichen Winkeln von 120°, die sich nur durch ihre Stellung von einander unterscheiden, $a : a : \infty a : \infty c$ und $a : \frac{1}{2}a : a : \infty c$, die eine stumpft die Kante der andern ab, sie füllen alle Sextanten gleichmäßig. Die Zwischensäulen sind Hälftflächner der

3) Dihexagonalsäulen $a : \frac{a}{\mu} : \infty c$, mit 6+6 Kanten, wovon 6 in die Axen a und 6 in die Zwischenaxen b fallen. Da a nie b gleich werden kann, so können wie bei der Biquadratsäule auch die Winkel nie gleich werden, aber es können bald die stumpfern bald die schärfern in die Zwischenaxen fallen, so daß man darin zwei Ordnungen unterscheiden kann. Dehnt man die abwechselnden Flächen aus, so gibt es stets eine reguläre sechsseitige Säule von 120°. Alles das sind offene Körper. Zu den geschlossenen gehören

4) Rhomboeder und Nebenrhomboeder, die analog den viergliedrigen Oktaedern ihre Flächen hinlegen, wo die andern ihre

Kanten haben; oder wenn die einen drei abwechselnde Sextanten eingenommen haben, so treten die andern in die zwischenliegenden. Man pflegt das durch Strichelung zu bezeichnen, so daß die Hauptreihe $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu}$, die Nebenreihe zu $\frac{a'}{\mu} : \frac{a'}{\mu}$ d. h. mit Stricheln geschrieben wird. Während im viergliedrigen Systeme kein Hauptoktaeder dem Nebenoktaeder gleich, also zum Gegenoktaeder werden kann, ist das im dreigliedrigen Systeme sehr wohl möglich, wie schon aus dem regulären System folgt. Der Grund liegt in der Gleichheit der Sextanten, indem in beiden Fällen die Kanten in die Zwischenaxen b fallen. Zippe (Uebersicht Krystallgest. Rhomboedr. Kalkhaloids, Denkschr. Wien. Akad. 1851 Bd. III) gibt beim Kalkspath allein fünf solcher Gegenrhomboeder

$$a' : a'; \ 2a : 2a; \ 4a' : 4a'; \ \tfrac{2}{5}a' : \tfrac{2}{5}a'; \ \frac{a'}{4} : \frac{a'}{4}$$

an, die mit den gewöhnlichern

$$a : a; \ 2a' : 2a'; \ 4a : 4a; \ \tfrac{2}{5}a : \tfrac{2}{5}a; \ \frac{a}{4} : \frac{a}{4}$$

je ein Dihexaeder bilden würden.

Ihre Ausdrücke für reguläre Stellung ergeben sich aus tab. 3 fig. 1 fast unmittelbar.

a) Ist $a : a : \infty a : c$ im 3+1axigen System der Würfel $a : \infty a : \infty a$ im gleichaxigen, so wird

$a' : a' : \infty a : c$ Gegenwürfel $\frac{1}{2}A : \frac{1}{2}A = a : a : 2a$

(unteres Rhomboeder des Pyramidenoktaeders in dreigliedriger Stellung).

b) Nächstes stumpfere Rhomboeder $2a' : 2a' : \infty a : c$ entspricht dem Rhomboeder des Granatoeders $A' : \infty A = a : a : \infty a$, sein Gegenrhomboeder $L = 2a : 2a : \infty a : c$ dagegen dem obern Rhomboeder des Leucitoides $A' : \frac{1}{4}A' = a : a : \frac{1}{4}a$. Man darf nur das Lineal in eine beliebige Projection auf die Würfelfläche legen, um das sofort auch auf jedem andern Bilde einzusehen.

c) Das zweite stumpfere $4a : 4a : \infty a : c$ geht von

$A' : \frac{1}{2}A' = a : a : \frac{1}{2}a$,

gehört also bekanntlich dem obern Rhomboeder des gewöhnlichen Leucitoeders an. Das zugehörige Gegenrhomboeder $4a' : 4a' : \infty a : c$ im Nebensextanten gibt $\frac{2}{5}A' : \frac{2}{5}A' = a : a : \frac{5}{2}a$. An einer großen Figur des regulären Systems kann man die Punkte unmittelbar abnehmen, sie gehören dem obern Rhomboeder des Pyramidenoktaeders 552 an, wie schon aus den stumpfen Endkantenwinkeln folgt.

d) $\frac{2}{5}a : \frac{2}{5}a : \infty a : c$ ist das Rhomboeder, welches die stumpfe Endkante des gewöhnlichen Dreikantners $a : \frac{1}{3}a$ gerade abstumpft. Ihre Sectionslinie fällt in vortreffliche Zonen, woraus ihr Zug

$A' : \frac{1}{4}A = a : a : \frac{1}{4}a$

ersichtlich ist. Sie muß dem untern (scharfen) Rhomboeder dieses

Leucitoides angehören. Da $\frac{1}{\frac{5}{2}+1} = \frac{2}{7}$, so muß sie von der Axe qA' als Einheit genommen $\frac{2}{7}$ abschneiden, woraus sich sofort

$$\tfrac{8}{7}A : \tfrac{8}{7}A = a : a : \tfrac{7}{8}a$$

für das Gegenrhomboeder $\frac{2}{5}a' : \frac{2}{5}a' : \infty a : c$ ergibt.

e) Das zweite schärfere Rhomboeder $\frac{a}{4} : \frac{a}{4} : \infty a : c$, welches in zwei scharfen Endkanten der gewöhnlichen Dreikantner $a : \frac{1}{3}a$ liegt, ergibt sich durch die Linie $A' : \frac{1}{3}A = a : a : \frac{1}{3}a$, welche dem scharfen (untern) Rhomboeder entspricht. Da $\frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$ der Schnitt auf qA' ist, so findet sich daraus durch bloßen Anblick $\frac{7}{5}A : \frac{7}{5}A = a : a : \frac{5}{7}a$. So wird bei einiger Uebung die Sache bald zum geläufigen Handwerk, und mit dem Lineale in der Hand kann man auf den beliebigsten Figuren seine Sache controliren.

Wir haben übrigens jetzt den schwerern Weg eingeschlagen, indem wir auf die Würfelflächenprojection recurrirten. Leichter wird die Sache auf der dreigliedrigen Projection, wo wir die zwischen den Würfelflächen liegenden Würfelsectionslinien zu Einheiten wählen. Dann hat der Würfel

$$\frac{a}{1} : \frac{a}{1} \ldots \frac{a}{1-1} : \frac{a}{1-1} = \infty a : \infty a.$$

Das nächste schärfere Rhomboeder

$$\frac{a}{2} : \frac{a}{2} \ldots \frac{a}{2-1} : \frac{a}{2-1} = a : a.$$

Das zweite schärfere

$$\frac{a}{4} : \frac{a}{4} \ldots \frac{a}{4-1} : \frac{a}{4-1} = \frac{a}{3} : \frac{a}{3}.$$

Das nächste stumpfere Rhomboeder

$$\frac{a}{1} : \frac{a}{0} \ldots \frac{a}{1-1} : \frac{a}{0-1} = \infty a : a.$$

Das zweite stumpfere

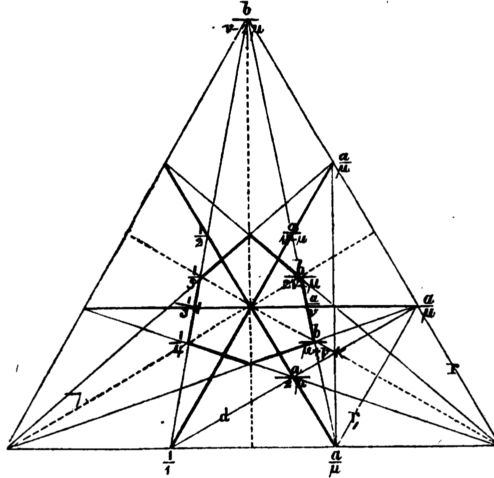
$$a' : \infty a = \frac{a}{1} : \frac{a}{0} \ldots \frac{a}{1+1} : \frac{a}{0+1} = \frac{a}{2} : a.$$

Ein Rhomboeder $\frac{2}{5}a : \frac{2}{5}a' : \infty a : c$ hat

$$\frac{a}{0} : \frac{a}{5} \ldots \frac{a}{0-1} : \frac{a}{5-1} = a : a : \frac{a}{4}.$$

Das Gegenrhomboeder $\frac{2a'}{5} : \frac{2}{5}a' : \infty a : c$ hinten $(\frac{1}{5} . \frac{2}{5} + \frac{1}{5})\, a' : \infty a$ $= \frac{7}{15}a' : \frac{a}{0} \ldots \frac{a}{\frac{15}{7}-1} : \frac{a}{0-1} = \frac{7}{8}a : a : a.$ In den meisten Fällen kaum mehr als ein Ablesen, namentlich wenn die Linien alle sorgfältig gezogen sind.

5) Dirhomboeder und Nebendirhomboeder. Die Di-



rhomboeder (Drei- und Dreikantner, Scalenoeder) sind die allgemeinsten Körper des dreigliedrigen Systemes mit dem Ausdruck $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu}$, wo μ und ν jede ganze oder gebrochene Zahl bedeutet. Ist $\nu = \mu$, so geht das Zeichen in $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu} : \frac{a}{\infty}$ über, wir haben ein Rhomboeder r. Ist $\nu = 2\mu$, so wird das Zeichen $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{2\mu} : \frac{a}{\mu}$, ein Dihexaeder d, d. h. die Endkanten k des Dirhomboeders in den Zwischenaxen sind alle gleich. So lange ν nicht die Grenze von 2μ erreicht, d. h. $\mu < \frac{1}{2}\nu$ ist, bleiben die Sectionslinien $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu}$ innerhalb des Dihexaeders d, der stumpfe Endkantenwinkel des Dreikantners muß den Rhomboederflächen correspondiren. Fällt dagegen die Sectionslinie des Dirhomboeders außerhalb d, so schlagen die Winkel um, die stumpfern treten im Nebensextanten und umgekehrt auf, bis die Linie $\frac{a'}{\mu} : \frac{a'}{\mu}$ zum Gegenrhomboeder r, wird. Man spricht daher auch in diesem Sinne von Dirhomboedern zweiter Abtheilungen, die ihre stumpfe Endkante wie die Flächen oder wie die Kanten des Hauptrhomboeders liegen haben, und deutet das durch Striche, wie bei den Rhomboedern an. Von besonderer Wichtigkeit ist die Sache gerade nicht, da ihre gegenseitige Stellung sich unmittelbar aus der Projection ergibt. Die Hauptdirhomboeder $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu}$ liegen alle zwischen Säule und Dihexaeder; die Nebendirhomboeder $\frac{a'}{\mu} : \frac{a'}{\nu}$ zwischen Dihexaeder d

und Gegenrhomboeder r,. Daß die Drei- und Dreikantner aus zwei Rhomboedern von Zwischenstellung bestehen, wird unmittelbar aus den gleichseitigen Dreiecken ersichtlich, wenn man die abwechselnden Sectionslinien ausdehnt. Es ist also ganz analog, wie beim viergliedrigen, nur was dort 4 war, ist hier 3.

Gegendirhomboeder kommen auch vor. Beim Kalkspath sind mehrere nachgewiesen, worunter sich auch der gewöhnliche Dreikantner $a : \frac{a}{3} : \frac{a}{2}$ befindet, dessen stumpfe Endkante wie die Fläche des Blätterbruchs $P = a : a : \infty a$ liegt. Es entspricht dem gewöhnlichen Pyramidenwürfel $\pi, = a : \frac{1}{2}a : \infty a$.

Das Gegendirhomboeder $a' : \frac{a'}{3} : \frac{a'}{2}$ entspricht in Tab. 3 fig. 1 der Linie

$$\tfrac{4}{9}A : \tfrac{2}{5}B = \frac{a}{\frac{9}{4} - 1} : \frac{a}{\frac{5}{2} - 1} = \tfrac{4}{5}a : 2a,$$

d. h. einem 48flächner $a : \frac{2}{5}a : \frac{1}{2}a = 254$, wie sich durch bloße Anlegung des Lineales findet. Kommt an den Säulenkrystallen von Andreasberg sehr ausgedehnt vor. Die Indices sind $\lambda\mu\nu = 113$, daraus folgt nach pag. 310 $1 + 1 = 2$, $1 + 3 = 4$, $1 + 1 + 3 = 5$. Das nicht seltene Dirhomboeder $\frac{a}{2} : \frac{a}{5} : \frac{a}{3}$ gehört zur ersten Ordnung, weil $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$. Es entspricht dem Pyramidenwürfel $\frac{2}{3}A : \infty A = 2a : 3a : \infty a$, wie man mittelst Lineal sofort erkennt. Die Indices sind $\lambda\mu\nu\pi = 1253$, daraus nach pag. 309 $1 + 5 + 3 = 9$, $1 + 2 - 3 = 0$, $1 - 2 - 5 = 6$, gibt $906 = 302$. Schon Hauy kannte davon das Gegendirhomboeder $\frac{a'}{2} : \frac{a'}{5} : \frac{a'}{3}$, welches einem 48flächner $\frac{7}{8}A : \frac{7}{2}A = \frac{a}{8} : \frac{a}{2} : \frac{a}{7}$ entsprechen würde. Man findet das noch durch Probiren, aber wenn das nicht sicher ist, so setzt man in voriger Formel λ blos $\bar{\lambda}$, also $\bar{\lambda}\mu\nu\pi = \bar{1}253$ gibt $-1 + 5 + 3 = 7$, $-1 + 2 - 3 = 2$, $-1 - 2 - 5 = 8$, die Zahl 728 stimmt mit obiger.

Ein **Sechs- und Sechskantner** entsteht, wenn Dirhomboeder und Gegendirhomboeder sich durchdringen. In diesem Falle sind alle Sextanten erfüllt. Man kann sie als gebrochene Dihexaeder ansehen. Alle Dihexaeder, welche im dreigliedrigen Systeme vorkommen, nehmen immer wie die Dreikantner eine Zwischenstellung ein. Nur wenn Rhomboeder und Gegenrhomboeder sich durchdringen, haben die Dihexaederflächen die entgegengesetzte Lage. Das gibt wieder Dihexaeder zweier Ordnungen, Dihexaeder $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu} : \infty a$ und Nebendihexaeder $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{2\mu} : \frac{a}{\mu}$, die jetzt der Strichelung nicht mehr bedürfen, da sie sich durch die Axenausdrücke unterscheiden. Gegendihexaeder sind unmöglich.

Die Frage von der Existenz des sechsgliedrigen Systemes hängt mit der Frage der Zwillinge zusammen, wie wir unten sehen werden.

4. Zweigliedriges System.

Rechnung mit den Cosinusformeln.

1. Seiten

$$\pm \cos \omega = (1 + mm_{,}a^2 + nn_{,}b^2) : \sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2}\,\sqrt{1 + m_{,}^2a^2 + n_{,}^2b^2}.$$

Giltig für zwei Zonenaxen c; ma + nb und c; m,a + n,b.

2. Kanten

$$\mp \cos \omega = (1 + \mu\mu_{,}\alpha^2 + \nu\nu_{,}\beta^2) : \sqrt{1 + \mu^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2}\,\sqrt{1 + \mu_{,}^2\alpha^2 + \nu_{,}^2\beta^2}.$$

Giltig für zwei Ebenen $\frac{\alpha}{\mu} : \frac{\beta}{\nu}$ und $\frac{\alpha}{\mu_{,}} : \frac{\beta}{\nu_{,}}$.

Wir wählen jetzt diese Form, um die vollständige Reciprocität zu zeigen. Zur Unterstützung des Gedächtnisses haben wir, wie immer, blos die Coordinaten der zwei Zonenpunkte über einander zu schreiben

$$\frac{1 + ma + nb}{1 + m_{,}a + n_{,}b}$$

und dann für das erste Formelglied die Producte der übereinander stehenden drei Ausdrücke, für das zweite Formelglied die Wurzeln der Quadrate hinzuschreiben. Ist a = b = 1, so haben wir das reguläre System. Unter α^2 ist $\frac{1}{a^2}$ und unter $\beta^2 = \frac{1}{b^2}$ verstanden.

Oben pag. 206 gaben wir den

3. Kanten

$$\mp \cos = (a^2b^2 + \mu\mu_{,}b^2 + \nu\nu_{,}a^2) : \sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}\,\sqrt{a^2b^2 + \mu_{,}^2b^2 + \nu_{,}^2a^2}.$$

Giltig für zwei Ebenen $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ und $\frac{a}{\mu_{,}} : \frac{b}{\nu_{,}}$.

Dividiren wir hier Zähler und Nenner mit a^2b^2, so kommt Formel (2). Denken wir uns ferner eine Zonenaxe c; ma + nb, und legen sie durch den Mittelpunkt der Projection, so erhält sie die Coordinaten

$$c + ma' + nb' = c' + ma + nb,$$

weil durch die Verrückung die Zonenaxe in einen andern Quadranten fällt. Eine Ebene senkrecht dagegen muß die Axen in

$$\frac{1}{c} : \frac{1}{ma'} : \frac{1}{nb'} = 1 : \frac{\alpha}{\mu} : \frac{\beta}{\nu}$$

schneiden. Das Gestrichelte können wir vernachlässigen, wir nehmen eben den Quadranten, wo die Flächen liegen, positiv. Setzen wir jetzt $m = \mu$ und $n = \nu$, so kommt obige Formel.

Das Zweigliedrige bildet eine gewisse Norm, da hier die Formeln in ihrer größten Allgemeinheit für rechtwinkliche Axen angewendet werden. Heißen die Zonenaxen ma + nb + pc, so erhalten wir

Seiten $\pm \cos \omega = \frac{mm_,a^2 + nn_,b^2 + pp_,c^2}{\sqrt{m^2a^2 + n^2b^2 + p^2c^2}\sqrt{m_,^2a^2 + n_,^2b^2 + p_,^2c^2}}$

Kanten $\mp \cos \omega = \frac{\mu\mu_,\alpha^2 + \nu\nu_,\beta^2 + \pi\pi_,\gamma^2}{\sqrt{\mu^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2 + \pi^2\gamma^2}\sqrt{\mu_,^2\alpha^2 + \nu_,^2\beta^2 + \pi_,^2\gamma^2}}$,

aus welchen die Formeln aller andern höhern Systeme sofort folgen. Zwei Unbekannte a und b oder α und β sind hier zu bestimmen. Wir müssen uns daher zwei Winkel, cos ω und cos $\omega_,$, messen, um die Rechnung führen zu können. Allgemein ist das nicht gut ausführbar, wir schreiten daher gleich zu den besondern Formeln der

Oktaeder $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$, wo man in Formel (2) zwischen gestrichelten und ungestrichelten Buchstaben nicht mehr zu unterscheiden hat, weshalb im Nenner statt der beiden Wurzeln einfach $1 + \mu^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2$ auftritt. Nun ist für die

vordere Endkante a : c . . . $\mu_, = \mu$ und $\nu_, = -\nu$, folglich

$$\mp \cos \omega = \frac{1 + \mu^2\alpha^2 - \nu^2\beta^2}{1 + \mu^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2} = \frac{a^2b^2 + \mu^2b^2 - \nu^2a^2}{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2};$$

seitliche Endkante b : c . . . $\mu_, = -\mu$ und $\nu_, = \nu$, folglich

$$\mp \cos \omega_, = \frac{1 - \mu^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2}{1 + \mu^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2} = \frac{a^2b^2 - \mu^2b^2 + \nu^2a^2}{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2};$$

Seitenkante a : b . . . $\mu_, = -\mu$ und $\nu_, = -\nu$,

$$\pm \cos \omega_0 = \frac{1 - \mu^2\alpha^2 - \nu^2\beta^2}{1 + \mu^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2} = \frac{a^2b^2 - \mu^2b^2 - \nu^2a^2}{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}.$$

In letzterm Falle haben wir den Winkel, welchen die Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ mit der hintern in der Axe c ihr gegenüberliegenden Fläche $\frac{a'}{\mu} : \frac{b'}{\nu}$ macht, daher das Zeichen +. Wir können ihr jedoch auch die Form

$$\mp \cos \omega_0 = \frac{-1 + \mu^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2}{1 + \mu^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2} = \frac{-a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}$$

geben, so haben wir die wirkliche Seitenkante im Sinn, denn wir dürfen ja nur die zweite Fläche statt nach + c, unten nach — c kehren. Wir machen zwar bei unsern Rechnungen gewöhnlich vom Gegenpunkt c′ keinen Gebrauch, aber er ist für uns ebensogut vorhanden, als der positive Punkt, und wir können mit ihm rechnen. Suchten wir daher die wirkliche Seitenkante, so hätten wir den Schnitt im Sinne, welchen die Flächen $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ und $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c'$ mit einander machen. Es wäre also alles positiv, bis auf 1, welches dem c′ entsprechend jetzt negativ werden muß. Wir können daher jeden Augenblick auch den negativen Endpunkt in Betracht ziehen, und kommen damit vom halben zum vollen Bilde. 6 Winkel sind überhaupt blos möglich, denn die 7te Fläche geht der 8ten parallel, da für diesen Fall $\mp \cos = \mp 1$ wird.

Die $\alpha\beta$ Formeln sind practischer, als die ab Formeln, weil wir dort das Product a^2b^2 vermeiden. Setzen wir nun $\mu = \nu = 1$, so haben wir das Grundoktaeder in einfachster Form, aber die Formeln eignen sich doch nicht recht zur Bestimmung von $\alpha\beta$ oder ab aus zwei Messungen ω und $\omega_,$. Die

halben Winkel sind in dieser Hinsicht bequemer. Für diese Fälle ist in Formel (2) zu setzen:

vordere Endkante $\mu_, = 0$, $\nu_, = \infty$, gibt

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega = 1+0+\nu\,\infty\beta^2 : \sqrt{1+\mu^2\alpha^2+\nu^2\beta^2}\ \sqrt{1+0+\infty^2\beta^2}$$

$$= \frac{\nu\beta}{\sqrt{1+\mu^2\alpha^2+\nu^2\beta^2}} = \frac{\nu a}{\sqrt{a^2b^2+\mu^2b^2+\nu^2a^2}};$$

seitliche Endkante $\mu_, = \infty$, $\nu_, = 0$, gibt

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega_, = 1+\mu\,\infty\alpha^2+0 : \sqrt{1+\mu^2\alpha^2+\nu^2\beta^2}\ \sqrt{1+\infty^2\alpha^2+0}$$

$$= \frac{\mu\alpha}{\sqrt{1+\mu^2\alpha^2+\nu^2\beta^2}} = \frac{\mu b}{\sqrt{a^2b^2+\mu^2b^2+\nu^2a^2}};$$

Seitenkante $\mu_, = \nu_, = 0$, gibt

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega_0 = 1+0+0 : \sqrt{1+\mu^2\alpha^2+\nu^2\beta^2}\ \sqrt{1+0+0}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2\alpha^2+\nu^2\beta^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2+\mu^2b^2+\nu^2a^2}}.$$

Wir haben hier den wirklichen Seitenkantenwinkel, und nicht sein Supplement, sobald wir den $+\cos\frac{1}{2}\omega_0$ nehmen. Der Entwickelung der Formel nach müßte er negativ sein. Wir haben es aber hier wieder mit dem $\pm c$ in der Hand: denn denken wir uns die Geradendfläche durch $c' = -1$ gelegt, so wird

$$\mp \cos\omega_0 = \frac{-1}{\sqrt{1+\mu^2\alpha^2+\nu^2\beta^2}},$$

d. h. $\cos\omega_0$ positiv.

Es ist auch leicht auf Weiß'sche Weise, sich davon durch directe Rechnung zu überzeugen. Denn das Perpendikel s auf die Sectionslinie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ ist

$$s = \cos\tfrac{1}{2}\omega_0 = \frac{ab}{\sqrt{\mu^2b^2+\nu^2a^2}}.$$

$$\text{rad}^2 = 1 + s^2 = \frac{a^2b^2+\mu^2b^2+\nu^2a^2}{\mu^2b^2+\nu^2a^2}, \text{ folglich}$$

$$\cos : \text{rad} = \cos\tfrac{1}{2}\omega_0 = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2+\mu^2b^2+\nu^2a^2}}, \text{ wie vorhin.}$$

Aus je zwei Winkeln lassen sich nun die Axen leichter berechnen. Wenn man obige Formeln für cos miteinander dividirt, so kommt:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\omega}{\cos\frac{1}{2}\omega_,} = \frac{\nu\beta}{\mu\alpha} = \frac{\nu a}{\mu b},\quad \nu^2\beta^2 = \mu^2\alpha^2 \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}\omega^2}{\cos\frac{1}{2}\omega_,^2}$$

$$\frac{\cos \tfrac{1}{2}\omega}{\cos \tfrac{1}{2}\omega_0} = \nu\beta = \frac{\nu}{b}$$

$$\frac{\cos \tfrac{1}{2}\omega_,}{\cos \tfrac{1}{2}\omega_0} = \mu\alpha = \frac{\mu}{a}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega^2 \, (1 + \mu^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2) = \nu^2\beta^2$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega^2 \, (1 + \mu^2\alpha^2) = \nu^2\beta^2 \, (1 - \cos \tfrac{1}{2}\omega^2) = \nu^2\beta^2 \sin \tfrac{1}{2}\omega^2$$

$$\frac{\cos \tfrac{1}{2}\omega^2}{\sin \tfrac{1}{2}\omega^2} (1 + \mu^2\alpha^2) = \nu^2\beta^2 = \mu^2\alpha^2 \cdot \frac{\cos \tfrac{1}{2}\omega^2}{\cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2}$$

$$\frac{\cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2}{\sin \tfrac{1}{2}\omega^2} = \mu^2\alpha^2 \left(1 - \frac{\cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2}{\sin \tfrac{1}{2}\omega^2}\right) = \mu^2\alpha^2 \left(\frac{\sin \tfrac{1}{2}\omega^2 - \cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2}{\sin \tfrac{1}{2}\omega^2}\right)$$

$$\frac{\cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2}{\sin \tfrac{1}{2}\omega^2 - \cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2} = \mu^2\alpha^2 = \frac{\mu^2}{a^2},$$

$$a^2 = \mu^2 \frac{\sin \tfrac{1}{2}\omega^2 - \cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2}{\cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2}, \quad a = \mu \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}\omega^2}{\cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2} - 1}$$

folglich $b = \nu \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}\omega_,^2}{\cos \tfrac{1}{2}\omega^2} - 1}$.

Noch leichter folgt $\beta = \frac{\cos \tfrac{1}{2}\omega}{\nu \cos \tfrac{1}{2}\omega_0}$ und $\alpha = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}\omega^2}{\cos \tfrac{1}{2}\omega_0} - 1}$

oder $\alpha = \frac{\cos \tfrac{1}{2}\omega_,}{\mu \cos \tfrac{1}{2}\omega_0}$ und $\beta = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}\omega_,^2}{\cos \tfrac{1}{2}\omega_0^2} - 1}$.

Beispiel. Schwefel

Kante a : c = $\tfrac{1}{2}\omega$ = 53.19 ... $\sin^2$ = 9,80829, $\cos^2$ = 9,55252

Kante b : c = $\tfrac{1}{2}\omega_,$ = 42.29 ... $\sin^2$ = 9,65909, $\cos^2$ = 9,73549

Kante a : b = $\tfrac{1}{2}\omega_0$ = 71.38½ .. $\sin^2$ = 9,95463, $\cos^2$ = 8,99651

$$a = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}\omega^2}{\cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2} - 1} = \sqrt{1,1825 - 1} = \sqrt{0,1825}; \quad \alpha = \sqrt{5,4794}.$$

$$b = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}\omega_,^2}{\cos \tfrac{1}{2}\omega_0^2} - 1} = \sqrt{0,2781 - 1} = \sqrt{0,2781}; \quad \beta = \sqrt{3,5958}.$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2}{\cos \tfrac{1}{2}\omega_0^2}} = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}\omega^2}{\cos \tfrac{1}{2}\omega_0^2} - 1} = \sqrt{5,48}.$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\cos \tfrac{1}{2}\omega^2}{\cos \tfrac{1}{2}\omega_0^2}} = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}\omega_,^2}{\cos \tfrac{1}{2}\omega_0^2} - 1} = \sqrt{3,59}.$$

Oblongoktaeder $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{0}$ und $\frac{a}{0} : \frac{b}{\nu_,}$ haben für die vier gleichen

Endkanten $\omega \ldots \mu_, = 0$, $\nu_, = \nu$ und $\nu = 0$, gibt

$$\mp \cos \omega = 1 + 0 + 0 : \sqrt{1 + \mu^2\alpha^2 + 0} \; \sqrt{1 + 0 + \nu_,^2\beta^2}$$
$$= 1 : \sqrt{(1 + \mu^2\alpha^2)(1 + \nu_,^2\beta^2)} = ab : \sqrt{(\mu^2 + a^2)(\nu_,^2 + b^2)}.$$

vordere Seitenkante $\omega_, \ldots \nu = 0$; $\mu_, = \nu_, = 0$, gibt

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega_, = 1 + 0 + 0 : \sqrt{1 + \mu^2\alpha^2 + 0} \; \sqrt{1 + 0 + 0}$$
$$= 1 : \sqrt{1 + \mu^2\alpha^2} = a : \sqrt{a^2 + \mu^2}.$$

seitliche Seitenkante $\omega_0 \ldots \mu = 0$; $\mu_, = \nu_, = 0$, gibt

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega_0 = 1 : \sqrt{1 + \nu^2\beta^2} = b : \sqrt{b^2 + \nu^2}.$$

Wir haben hier wieder ganz einfach die zweite Fläche $\frac{a}{\mu_,} : \frac{b}{0}$ als Geradendfläche $\pm c : \frac{a}{0} : \frac{b}{0}$ angesehen, die durch den Mittelpunkt gedacht die Seitenkantenwinkel halbirt. Wollen wir das Supplement zum ganzen Seitenkantenwinkel, so ist für den vordern ω, $\nu = \nu_, = 0$ und $\mu_, = -\mu$ zu setzen, dann kommt

$$-\cos \omega_, = 1 - \mu^2\alpha^2 + 0 : \sqrt{1 + \mu^2\alpha^2 + 0}\ \sqrt{1 + \mu^2\alpha^2 + 0}$$
$$= \frac{1 - \mu^2\alpha^2}{1 + \mu^2\alpha^2} = \frac{a^2 - \mu^2}{a^2 + \mu^2}.$$

Für die seitliche Seitenkante wird daher

$$-\cos \omega_0 = \frac{1 - \nu^2\beta^2}{1 + \nu^2\beta^2} = \frac{b^2 - \nu^2}{b^2 + \nu^2}.$$

Aus den halben Winkeln läßt sich α und β sofort entwickeln, denn

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2 (a^2 + \mu^2) = a^2$$
$$\mu^2 \cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2 = a^2 - a^2 \cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2 = a^2 \sin \tfrac{1}{2}\omega_,^2$$
$$\mu \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\omega_, = a;\ \nu \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\omega_0 = b.$$

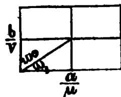
Aus dem ganzen Endkantenwinkel folgt zwar leicht

$$\cos \omega^2 (1 + \mu^2\alpha^2) = \frac{1}{1 + \nu^2\beta^2},\ \nu^2\beta^2 = \frac{1}{\cos \omega^2 (1 + \mu^2\alpha^2)} - 1$$
$$\nu\beta = \sqrt{\frac{1}{\cos \omega^2 (1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\omega_,^2)} - 1},$$

aber die Formel ist doch nicht recht practisch.

Auch die Formeln für die Neigung zur Mittelpunktsebene pag. 210 geben keine wesentliche Erleichterung. Denn setzen wir in

$$\cos = \mu\mu_, b^2 - \nu\nu_, a^2 : \sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}\ \sqrt{\mu_,^2b^2 + \nu_,^2a^2}$$



für Winkel $\omega_, \ldots \nu = 0$; $\mu_, = \mu$, $\nu_, = \nu$, wird

$$\cos \omega_, = \mu^2b^2 - 0 : \sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + 0}\ \sqrt{\mu^2b^2 + \nu^2a^2}$$
$$= \mu^2b : \sqrt{a^2 + \mu^2}\ \sqrt{\mu^2b^2 + \nu^2a^2}$$

für Winkel $\omega_0 \ldots \mu = 0$; $\mu_, = \mu$, $\nu_, = \nu$, wird

$$\cos \omega_0 = 0 - \nu^2a^2 : \sqrt{a^2b^2 + 0 + \nu^2a^2}\ \sqrt{\mu^2b^2 + \nu^2a^2}$$
$$= \nu^2a : \sqrt{b^2 + \nu^2}\ \sqrt{\mu^2b^2 + \nu^2a^2}.$$

Beispiel. Vitriolblei von Poni

$o = b : c : \infty a$ hat 104 . 24 Seitenkante

$d = 2a : c : \infty b$ hat 78 . 47 Seitenkante

d/o schneiden sich unter 118° 16′.

Nehmen wir do als ein Oblongoktaeder mit den Seitenaxen ab, so ist

$$a = \operatorname{ctg} \omega_, = \operatorname{ctg} 39 . 23\tfrac{1}{2} = 10{,}08551,\ a = \sqrt{1{,}48} = 2\sqrt{0{,}37}.$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{\cos\omega^2\,(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega,{}^2)} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos 61.44\,(1+\operatorname{tg}^2 39.23\frac{1}{2})} - 1}$$
$$= \sqrt{1{,}66\ldots}$$

Daraus folgt $b = \frac{1}{\beta} = \sqrt{0{,}6}$; $\alpha = \frac{1}{a} = \sqrt{0{,}674}$.

Endkante — $\cos\omega = 1 : \sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} = 1 : \sqrt{1{,}674 \,.\, 2{,}66} = 118.16.$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\omega, = b : \sqrt{1+a^2}\ \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\dfrac{0{,}6}{2{,}48\,.\,2{,}08}} = 70\,.\,4 \\ \cos\omega_0 = a : \sqrt{1+b^2}\ \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\dfrac{1{,}48}{1{,}6\,.\,2{,}08}} = 48\,.\,12\end{array}\right\} = 118\,.\,16.$$

Die Seitenrechnungen (Formel 1) bieten keine Schwierigkeiten, wir haben eben immer nur die Coordinaten der Fußpunkte hinzusetzen. Beim Entwerfen der Kugelprojection wünscht man häufig die Polardistanzen zu wissen, d. h. die Neigung der Kanten gegen Axe c. Um einzusehen, daß das Polardistanzen sind, darf man die Kante nur durch den Mittelpunkt legen, um sofort den gleichen Bogen auf der umschriebenen Kugel zu haben. Die Formel selbst pag. 210 ergab sich, wenn wir den Mittelpunkt m, = n, = 0 als zweiten Zonenpunkt nahmen, es kommt

$$\cos = 1+0+0 : \sqrt{1+m^2a^2+n^2b^2}\ \sqrt{1+0+0} = 1 : \sqrt{1+m^2a^2+n^2b^2}.$$

Wenn die beiden Zonenpunkte gleichwerthig sind, aber in entgegengesetzten Quadranten liegen, so ist m, = — m, n, = — n, und die Formel wird sogleich

$$\cos = \frac{1 - m^2a^2 - n^2b^2}{1 + m^2a^2 + n^2b^2}.$$

Fallen dabei die Punkte in eine der beiden Axenebenen, so ist für

Axenebene bc ... n = 0, d. h. $\cos = \dfrac{1 - m^2a^2}{1 + m^2a^2}$;

Axenebene ac ... m = 0, d. h. $\cos = \dfrac{1 - n^2b^2}{1 + n^2b^2}$.

Das sind die Sätze von Haidinger (Hdb. bestimm. Mineral. 1845 pag. 73), welche sich hier wie von selbst ergeben. Denn wir können natürlich die Formel auf allgemeinere Form bringen

$$\cos = \frac{p^2c^2 - n^2b^2 - m^2a^2}{p^2c^2 + n^2b^2 + m^2a^2}.$$

Dann kommt für m = 0

$$\cos = \frac{p^2c^2 - n^2b^2}{p^2c^2 + n^2b^2} = \frac{c^2 - b^2}{c^2 + b^2},$$

wenn wir p = n = 1 setzen.

Suchen wir am Oblongoktaeder od unseres Vitriolbleis die Seiten, so ist für die Winkel an der Spitze

vorn auf d ... m = n = 1; m, = 1, n, = — n gibt

seitliche Seitenkante $\omega_0 \ldots \mu = 0;\ \mu_, = \nu_, = 0$, gibt

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega_0 = 1 : \sqrt{1 + \nu^2\beta^2} = b : \sqrt{b^2 + \nu^2}.$$

Wir haben hier wieder ganz einfach die zweite Fläche $\frac{a}{\mu_,} : \frac{b}{0}$ als Geradendfläche $\pm c : \frac{a}{0} : \frac{b}{0}$ angesehen, die durch den Mittelpunkt gedacht die Seitenkantenwinkel halbirt. Wollen wir das Supplement zum ganzen Seitenkantenwinkel, so ist für den vordern $\omega_,\ \nu = \nu_, = 0$ und $\mu_, = -\mu$ zu setzen, dann kommt

$$-\cos \omega_, = 1 - \mu^2\alpha^2 + 0 : \sqrt{1 + \mu^2\alpha^2 + 0}\ \sqrt{1 + \mu^2\alpha^2 + 0}$$

$$= \frac{1 - \mu^2\alpha^2}{1 + \mu^2\alpha^2} = \frac{a^2 - \mu^2}{a^2 + \mu^2}.$$

Für die seitliche Seitenkante wird daher

$$-\cos \omega_0 = \frac{1 - \nu^2\beta^2}{1 + \nu^2\beta^2} = \frac{b^2 - \nu^2}{b^2 + \nu^2}.$$

Aus den halben Winkeln läßt sich α und β sofort entwickeln, denn

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2 (a^2 + \mu^2) = a^2$$

$$\mu^2 \cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2 = a^2 - a^2 \cos \tfrac{1}{2}\omega_,^2 = a^2 \sin \tfrac{1}{2}\omega_,^2$$

$$\mu \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\omega_, = a;\ \nu \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\omega_0 = b.$$

Aus dem ganzen Endkantenwinkel folgt zwar leicht

$$\cos \omega^2 (1 + \mu^2\alpha^2) = \frac{1}{1 + \nu^2\beta^2},\ \nu^2\beta^2 = \frac{1}{\cos \omega^2 (1 + \mu^2\alpha^2)} - 1$$

$$\nu\beta = \sqrt{\frac{1}{\cos \omega^2 (1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\omega_,^2)} - 1},$$

aber die Formel ist doch nicht recht practisch.

Auch die Formeln für die Neigung zur Mittelpunktsebene pag. 210 geben keine wesentliche Erleichterung. Denn setzen wir in

$$\cos = \mu\mu_, b^2 - \nu\nu_, a^2 : \sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2}\ \sqrt{\mu_,^2b^2 + \nu_,^2a^2}$$

für Winkel $\omega_, \ldots \nu = 0;\ \mu_, = \mu,\ \nu_, = \nu$, wird

$$\cos \omega_, = \mu^2b^2 - 0 : \sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + 0}\ \sqrt{\mu^2b^2 + \nu^2a^2}$$

$$= \mu^2 b : \sqrt{a^2 + \mu^2}\ \sqrt{\mu^2b^2 + \nu^2a^2}$$

für Winkel $\omega_0 \ldots \mu = 0;\ \mu_, = \mu,\ \nu_, = \nu$, wird

$$\cos \omega_0 = 0 - \nu^2a^2 : \sqrt{a^2b^2 + 0 + \nu^2a^2}\ \sqrt{\mu^2b^2 + \nu^2a^2}$$

$$= \nu^2 a : \sqrt{b^2 + \nu^2}\ \sqrt{\mu^2b^2 + \nu^2a^2}.$$

Beispiel. Vitriolblei von Poni

$o = b : c : \infty a$ hat 104 . 24 Seitenkante

$d = 2a : c : \infty b$ hat 78 . 47 Seitenkante

d/o schneiden sich unter 118° 16'.

Nehmen wir do als ein Oblongoktaeder mit den Seitenaxen ab, so ist

$$a = \operatorname{ctg} \omega_, = \operatorname{ctg} 39 . 23\tfrac{1}{2} = 10{,}08551,\ a = \sqrt{1{,}48} = 2\sqrt{0{,}37}.$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{\cos \omega^2 (1 + tg\, \tfrac{1}{2}\omega,^2)} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos 61.44\,(1 + tg^2\, 39.23\tfrac{1}{2})} - 1}$$
$$= \sqrt{1,66\ldots}$$

Daraus folgt $b = \frac{1}{\beta} = \sqrt{0,6}$; $\alpha = \frac{1}{a} = \sqrt{0,674}$.

Endkante — $\cos \omega = 1 : \sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} = 1 : \sqrt{1,674 \,.\, 2,66} = 118.16.$

$$\left.\begin{array}{l} \cos \omega, = b : \sqrt{1+a^2}\ \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\dfrac{0,6}{2,48 \,.\, 2,08}} = 70 \,.\, 4 \\ \cos \omega_0 = a : \sqrt{1+b^2}\ \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\dfrac{1,48}{1,6 \,.\, 2,08}} = 48 \,.\, 12 \end{array}\right\} = 118 \,.\, 16.$$

Die Seitenrechnungen (Formel 1) bieten keine Schwierigkeiten, wir haben eben immer nur die Coordinaten der Fußpunkte hinzusetzen. Beim Entwerfen der Kugelprojection wünscht man häufig die Polardistanzen zu wissen, d. h. die Neigung der Kanten gegen Axe c. Um einzusehen, daß das Polardistanzen sind, darf man die Kante nur durch den Mittelpunkt legen, um sofort den gleichen Bogen auf der umschriebenen Kugel zu haben. Die Formel selbst pag. 210 ergab sich, wenn wir den Mittelpunkt $m, = n, = 0$ als zweiten Zonenpunkt nahmen, es kommt

$\cos = 1+0+0 : \sqrt{1+m^2a^2+n^2b^2}\ \sqrt{1+0+0} = 1 : \sqrt{1+m^2a^2+n^2b^2}.$

Wenn die beiden Zonenpunkte gleichwerthig sind, aber in entgegengesetzten Quadranten liegen, so ist $m, = -m$, $n, = -n$, und die Formel wird sogleich

$$\cos = \frac{1 - m^2a^2 - n^2b^2}{1 + m^2a^2 + n^2b^2}.$$

Fallen dabei die Punkte in eine der beiden Axenebenen, so ist für

Axenebene bc ... $n = 0$, d. h. $\cos = \dfrac{1 - m^2a^2}{1 + m^2a^2}$;

Axenebene ac ... $m = 0$, d. h. $\cos = \dfrac{1 - n^2b^2}{1 + n^2b^2}$.

Das sind die Sätze von Haidinger (Hdb. bestimm. Mineral. 1845 pag. 73), welche sich hier wie von selbst ergeben. Denn wir können natürlich die Formel auf allgemeinere Form bringen

$$\cos = \frac{p^2c^2 - n^2b^2 - m^2a^2}{p^2c^2 + n^2b^2 + m^2a^2}.$$

Dann kommt für $m = 0$

$$\cos = \frac{p^2c^2 - n^2b^2}{p^2c^2 + n^2b^2} = \frac{c^2 - b^2}{c^2 + b^2},$$

wenn wir $p = n = 1$ setzen.

Suchen wir am Oblongoktaeder od unseres Vitriolbleis die Seiten, so ist für die Winkel an der Spitze

vorn auf d ... $m = n = 1$; $m, = 1$, $n, = -n$ gibt

$$\cos = 1 + a^2 - b^2 : \sqrt{1+a^2+b^2}\ \sqrt{1+a^2+b^2} = \frac{1+a^2-b^2}{1+a^2+b^2};$$

seitlich auf o . . . m = n = 1; m, = — 1, n, = 1, gibt

$$\cos = \frac{1-a^2+b^2}{1+a^2+b^2} = \frac{1{,}6-1{,}48}{3{,}08} = \frac{0{,}12}{3{,}08} = 87 \,.\, 46.$$

Da die Dreiecke gleichschenklich sind, so sind die Winkel an der Basis

$$\frac{180 - 87\,.\,46}{2} = 46\,.\,7.$$

Suchen wir zur Controle den Winkel an der Basis von o direct, so ist m, = ∞, n, = 1, gibt

$$\cos = 1 + \infty a^2 + b^2 : \sqrt{1 + a^2 + b^2} : \sqrt{1 + \infty^2 a^2 + b^2}$$

$$= a : \sqrt{1 + a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1{,}48}{3{,}08}} = 46\,.\,7.$$

Tangentenformeln der ganzen Winkel.

1. Seiten

$$\pm \operatorname{ctg} = \frac{mm,a^2+nn,b^2+pp,c^2}{\sqrt{(mn,-m,n)^2a^2b^2+(mp,-m,p)^2a^2c^2+(np,-n,p)^2b^2c^2}}$$

2. Kanten

$$\mp \operatorname{ctg} = \frac{\mu\mu,\alpha^2+\nu\nu,\beta^2+\pi\pi,\gamma^2}{\sqrt{(\mu\nu,-\mu,\nu)^2\alpha^2\beta^2+(\mu\pi,-\mu,\pi)^2\alpha^2\gamma^2+(\nu\pi,-\nu,\pi)^2\beta^2\gamma^2}}$$

Sie folgen durch bloße Umtauschung der Buchstaben auseinander. Das erste Glied stimmt vollständig mit dem des cos, und unter der Wurzel treten die Glieder der Zonenpunktformel in entsprechender Weise zu den Axen. Die Glieder np, — n,p sollten eigentlich in n,p — np, pag. 212 umgestellt sein, allein der Gleichmäßigkeit wegen lassen wir sie so stehen, da das Quadrat ja in beiden Fällen positiv ausfallen muß. Diese wunderbare Symmetrie kommt natürlich dem Gedächtniß sehr zu statten. Setzen wir jetzt

$$p = p, = c = \pi = \pi, = \gamma = 1,$$

so erhalten wir die einfachern Formen

$$\text{Seiten} + \operatorname{ctg} = \frac{mm,a^2+nn,b^2+1}{\sqrt{(mn,-m,n)^2a^2b^2+(m-m,)^2a^2+(n-n,)^2b^2}}, \quad (3)$$

$$\text{Kanten} - \operatorname{ctg} = \frac{\mu\mu,\alpha^2+\nu\nu,\beta^2+1}{\sqrt{(\mu\nu,-\mu,\nu)^2\alpha^2\beta^2+(\mu-\mu,)^2\alpha^2+(\nu-\nu,)^2\beta^2}}. \quad (4)$$

Suchen wir jetzt die Poldistanzen, so wird ebenfalls wieder m,=n,=0,

$$\operatorname{ctg} = 0 + 0 + 1 : \sqrt{0 + m^2a^2 + n^2b^2},\quad \operatorname{tg} = \sqrt{m^2a^2 + n^2b^2}.$$

Sind beide Zonenpunkte gleichwerthig, aber in entgegengesetzten Quadranten, so wird m, = — m, n, = — n, wir erhalten

$$\operatorname{ctg} = \frac{1 - m^2a^2 - n^2b^2}{2\sqrt{m^2a^2 + n^2b^2}}.$$

Liegen diese symmetrischen Punkte in der Axenebene bc, so ist $m = 0$, in ac dagegen $n = 0$, das gibt

$$\text{ctg} = \frac{1 - n^2b^2}{2nb} \text{ und } \frac{1 - m^2a^2}{2ma}.$$

Liegen die Punkte in der Seite eines Oblongoktaeders, so wird für die Seite vorn $m_, = m$ und $n_, = -n$

$$\text{ctg} = \frac{1+m^2a^2-n^2b^2}{\sqrt{4m^2n^2a^2b^2+4n^2b^2}} = \frac{1+m^2a^2-n^2b^2}{2b\sqrt{n^2+m^2n^2a^2}};$$

seitlich $m_, = -m$ und $n_, = n$

$$\text{ctg} = \frac{1-m^2a^2+n^2b^2}{\sqrt{4m^2n^2a^2b^2+4m^2a^2}} = \frac{1-m^2a^2-n^2b^2}{2a\sqrt{m^2+m^2n^2b^2}}.$$

Diese speciellen Formeln sind so brauchbar, als die der cos.

Da bei den Oblongoktaedern die Mittelpunktsebene die Endkanten nicht halbirt, so ist sofort die tg des ganzen Winkels von $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{0}$ mit $\frac{a}{0} : \frac{b}{\nu_,}$ gefunden, wenn wir in der Kantenformel $\nu = 0$ und $\mu_, = 0$ setzen, gibt

$$-\text{ctg} = 1+0+0 : \sqrt{(\mu\nu_,+0.0)^2\alpha^2\beta^2+(\mu-0)^2\alpha^2+(0+\nu_,)^2\beta^2}$$
$$= 1 : \sqrt{\mu^2\nu_,^2\alpha^2\beta^2+\mu^2\alpha^2+\nu_,^2\beta^2} = ab : \sqrt{\mu^2\nu_,^2+\mu^2b^2+\nu_,^2a^2}.$$

Das gibt für den Endkantenwinkel des Vitriolbleies

$$-\text{tg} = \sqrt{\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{0{,}674.1{,}66+0{,}674+1{,}66}$$
$$= \sqrt{0{,}674.1{,}66+2{,}334} = 61.43 \ldots\ldots 118.17.$$

Am bequemsten und kürzesten bleiben jedoch immer folgende

Weiß'sche Formeln pag. 213.

1. Seiten $\text{ctg} = \sqrt{a^2b^2 + \nu^2a^2 + \mu^2b^2} : m\nu a^2 - n\mu b^2$.

Giltig für einen Zonenpunkt $ma + nb$ und eine Sectionslinie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$.

2. Kanten $\text{tg} = \sqrt{\alpha^2\beta^2 + n^2\alpha^2 + m^2\beta^2} : \mu n\alpha^2 - \nu m\beta^2$.

Giltig für einen Zonenpunkt $m + n$ und eine Sectionslinie $\frac{1}{\mu} : \frac{1}{\nu}$.

Die Formeln sind in dieser Form völlig reciprok. Schreiben wir die

Kanten $\text{tg} = ab\sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2} : n\mu b^2 - m\nu a^2$ (5)

so leiten wir umgekehrt daraus wieder ab die

Seiten $\text{ctg} = \alpha\beta\sqrt{1 + \mu^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2} : \nu m\beta^2 - \mu n\alpha^2$.

Beide Formeln führen zu demselben Ziele. Den einfachsten Ausdruck erhalten die **Rhombenoktaeder** $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ in ihren drei Kanten. Für die

vordere Endkante $a : c$ ist $n = \frac{1}{\infty} = 0$, $m = \frac{1}{\mu}$, folglich

$$\mathrm{tg} = \sqrt{\alpha^2\beta^2 + 0 + \frac{\beta^2}{\mu^2} : 0 - \frac{\nu}{\mu}\beta^2}$$
$$= \sqrt{\mu^2\alpha^2 + 1} : \nu\beta = \mathrm{b}\sqrt{\mu^2 + \mathrm{a}^2} : \nu\mathrm{a};$$

seitliche Endkante b : c ist $m = 0,\ n = \frac{1}{\nu}$, folglich

$$\mathrm{tg}_{,} = \sqrt{\alpha^2\beta^2 + \frac{\alpha^2}{\nu^2} + 0 : \frac{\mu}{\nu}\alpha^2 - 0}$$
$$= \sqrt{\nu^2\beta^2 + 1} : \mu\alpha = \mathrm{a}\sqrt{\nu^2 + \mathrm{b}^2} : \mu\mathrm{b};$$

Seitenkante a : b ist $m = \frac{\infty}{\mu},\ n = \frac{\infty}{\nu};\ \nu = -\nu$, folglich:

$$\mathrm{tg}_0 = \sqrt{\alpha^2\beta^2 + \frac{\infty^2}{\nu^2}\alpha^2 + \frac{\infty^2}{\mu^2}\beta^2 : \frac{\mu\infty}{\nu}\alpha^2 + \frac{\nu\infty}{\mu}\beta^2}$$
$$= \sqrt{\frac{\alpha^2}{\nu^2} + \frac{\beta^2}{\mu^2} : \frac{\mu\alpha^2}{\nu} + \frac{\nu\beta^2}{\mu}}$$
$$= 1 : \sqrt{\mu^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2} = \mathrm{ab} : \sqrt{\mu^2\mathrm{b}^2 + \nu^2\mathrm{a}^2}.$$

Wir bekommen im letztern Falle die Neigung der Fläche gegen Axe c, also das Complement zum halben Seitenkantenwinkel. Der halbe Seitenkantenwinkel selbst muß also sein

$$\mathrm{tg}_0 = \sqrt{\mu^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2} = \frac{\sqrt{\mu^2\mathrm{b}^2 + \nu^2\mathrm{a}^2}}{\mathrm{ab}}.$$

Auch hier sind die reciproken Axen mit griechischen Buchstaben einfacher.

Axenformel läßt sich aus je zwei gegebenen Kanten irgend eines Oblongoktaeders a : b : c leicht finden. Die drei halben Kanten haben darin folgende Ausdrücke:

$$\mathrm{tg} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\sqrt{\mathrm{a}^2 + 1};\ \mathrm{tg}_{,} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\sqrt{\mathrm{b}^2 + 1};\ \mathrm{tg}_0 = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{a}^2} + \frac{1}{\mathrm{b}^2}},\ \text{folglich}$$

$$\mathrm{a} = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2 . \mathrm{tg}_{,}^2 - 1}{\mathrm{tg}^2 + 1}} = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2 + 1}{\mathrm{tg}^2\, \mathrm{tg}_0^2 - 1}} = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}_{,}^2 + 1}{\mathrm{tg}_0^2 + 1}}$$
$$\mathrm{b} = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2 . \mathrm{tg}_{,}^2 - 1}{\mathrm{tg}_{,}^2 + 1}} = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2 + 1}{\mathrm{tg}_0^2 + 1}} = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}_{,}^2 + 1}{\mathrm{tg}_{,}^2 . \mathrm{tg}_0^2 - 1}}.$$

Axenschnitte ergeben sich ebenso leicht. Denn sind mir von einer Oktaederfläche $\frac{\mathrm{a}}{\mu} : \frac{\mathrm{b}}{\nu} : \mathrm{c}$ zwei Winkel bekannt, so ist

$$\mathrm{tg} = \mathrm{b}\sqrt{\mu^2 + \mathrm{a}^2} : \nu\mathrm{a} \text{ und } \mathrm{tg}_{,} = \mathrm{a}\sqrt{\nu^2 + \mathrm{b}^2} : \mu\mathrm{b},$$

dann findet sich durch die einfachste Elimination

$$\mu = \mathrm{a}\sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2 + 1}{\mathrm{tg}^2 . \mathrm{tg}_{,}^2 - 1}} \text{ und } \nu = \mathrm{b}\sqrt{\frac{\mathrm{tg}_{,}^2 + 1}{\mathrm{tg}^2 . \mathrm{tg}_{,}^2 - 1}}.$$

Wie umgekehrt allgemein

$$\mathrm{a} = \mu\sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2 . \mathrm{tg}_{,}^2 - 1}{\mathrm{tg}^2 + 1}} \text{ und } \mathrm{b} = \nu\sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2 . \mathrm{tg}_{,}^2 - 1}{\mathrm{tg}_{,}^2 + 1}}$$

ist, so daß man das eine aus dem andern ablesen kann, Hdb. Mineral. 1863 pag. 55.

Die **Nebenoktaeder**, welche die Endkanten der Rhombenoktaeder abstumpfen, sind jetzt nicht mehr wie im viergliedrigen Systeme den abgestumpften ähnlich, sondern bilden sogenannte **Oblongoktaeder**, deren gleiche Endkantenwinkel durch die Mittelpunktsebene ungleich getheilt werden. Ihre Endkanten liegen in den Kantenzonen, worin m = n wird, also

$$\operatorname{tg} = ab\sqrt{\frac{1}{m^2} + a^2 + b^2} : (\mu b^2 - \nu a^2).$$

Setzen wir darin pag. 320 einerseits $\nu = 0$, so ist $m = \frac{1}{\mu}$, folglich

$$\operatorname{tg} \omega, = a\sqrt{\mu^2 + a^2 + b^2} : \mu b;$$

andererseits $\mu = 0$ und $m = \frac{1}{\nu}$, folglich

$$\operatorname{tg} \omega_0 = b\sqrt{\nu^2 + a^2 + b^2} : \nu a.$$

Gibt für $\mu = \nu = 1$ die einfachen Ausdrücke

$$\operatorname{tg} \omega, = \frac{a}{b}\sqrt{1+a^2+b^2} \text{ und } \operatorname{tg} \omega_0 = \frac{b}{a}\sqrt{1+a^2+b^2},$$

was bei der Gemeinsamkeit der Wurzelgrößen die Rechnung der Winkel sehr vereinfacht, so daß man kaum der Tangentenformel des ganzen Winkels

$$-\operatorname{tg}(\omega, + \omega_0) = \sqrt{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2} \text{ pag. } 323$$

bedarf. Uebrigens sind die Winkel oft meßbar, da sie das Supplement von den Neigungen der Oblongoktaeder gegen die Säulen bilden. Dann lassen sich daraus die Axen berechnen

$$a = \sqrt{\frac{(\operatorname{tg}\omega, \operatorname{tg}\omega_0 - 1)\operatorname{tg}\omega,}{\operatorname{tg}\omega, + \operatorname{tg}\omega_0}} \text{ und } b = \sqrt{\frac{(\operatorname{tg}\omega, \operatorname{tg}\omega_0 - 1)\operatorname{tg}\omega_0}{\operatorname{tg}\omega, + \operatorname{tg}\omega_0}}.$$

Die Neigung der Flächenpaare zur Axe c = 1, und damit der Seitenkanten ist

$$\operatorname{tg}\omega, = a \text{ und } \operatorname{tg}\omega_0 = b.$$

Beispiel. Schwerspath P = c : ∞a : ∞b, o = b : c : ∞a; o/P = 127.18, daher o/c = 37° 18′.

M = a : b : ∞c hat vorn 101.40, daher M/a = 50° 50′. Gibt

$$\begin{array}{lll}
b = \operatorname{tg} 37.18 \ldots lb = & 9{,}88184 & \\
lb^2 = & 9{,}76368 \ldots b = & \sqrt{0{,}58033} \\
l\beta^2 = & 10{,}23632 \ldots \beta = & \sqrt{1{,}7231} \\
a = b \operatorname{ctg} 50.50 \ldots l\operatorname{ctg} = & \underline{9{,}91095} & \\
la = & 9{,}79279 & \\
la^2 = & 9{,}58558 \ldots a = & \sqrt{0{,}3851} \\
l\alpha^2 = & 10{,}41442 \ldots \alpha = & \sqrt{2{,}5967.}
\end{array}$$

Rhombenoktaeder z = a : b : c, der **seitliche** Endkantenwinkel

$$tg, = \frac{a}{\mu b}\sqrt{\nu^2 + b^2} = \frac{1}{\mu\alpha}\sqrt{\nu\beta^2 + 1} \text{ gibt } \mu = \nu = 1$$

$$tg, = \sqrt{\frac{a^2(1 + b^2)}{b^2}} = \sqrt{\frac{\beta^2 + 1}{\alpha^2}},\ l\ tg, = 0{,}01032 \ldots 45 . 41.$$

y = 2a : b : c, der **vordere** Endkantenwinkel

$$tg = \frac{b}{\nu a}\sqrt{\mu^2 + a^2} = \frac{1}{\nu\beta}\sqrt{\mu^2\alpha^2 + 1}$$

gibt $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = 1$

$$tg = \frac{b}{a}\sqrt{\tfrac{1}{4} + a^2} = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + 1},\ tg = 9{,}99057 \ldots 44^0\ 22\tfrac{1}{2}'.$$

Oblongoktaeder o = b : c : ∞a und u = a : c : ∞b hat in der ganzen **Endkante**

$$-\ tg = \sqrt{\mu^2\nu,^2\alpha^2\beta^2 + \mu^2\alpha^2 + \nu,^2\beta^2} = \frac{1}{ab}\sqrt{\mu^2\nu,^2 + \mu^2 b^2 + \nu,^2 a^2}$$

$$-\ tg = \sqrt{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{ab}\sqrt{1 + a^2 + b^2},$$

$$l\ tg = 10{,}47210 \ldots 71 . 22 \ldots 108^0\ 38'.$$

Die getheilten Winkel geben dagegen

$$\left.\begin{array}{l} tg\ \omega, = \frac{a}{b}\sqrt{1 + a^2 + b^2},\ l\ tg\ \omega, = 10{,}05767 \ldots 48 . 48 \\ tg\ \omega_0 = \frac{b}{a}\sqrt{1 + a^2 + b^2},\ l\ tg\ \omega_0 = 10{,}23577 \ldots 59 . 50 \end{array}\right\} = 108^0\ 38'.$$

Für das gewöhnliche Oblongoktaeder o/d, wo d = 2a : c : ∞b, bleibt $\nu, = 1$, dagegen wird $\mu = \frac{1}{2}$, gibt

$$-\ tg = \sqrt{\tfrac{1}{4}\alpha^2\beta^2 + \tfrac{1}{4}\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{ab}\sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}b^2 + a^2}$$

$l\alpha^2 = 10{,}41442$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$
$l\beta^2 = 10{,}23632$	$\frac{b^2}{4} = 0{,}1451$
10,65074..num. 4,4745..	$a^2 = 0{,}3851$
$\frac{1}{4}\alpha^2\beta^2 = 1{,}1186$	0,7802 $l\sqrt{} = 9{,}94610$
$\frac{1}{4}\alpha^2 = 0{,}6492$	$l\ ab = 9{,}67463$
$\beta^2 = 1{,}7231$	$l\ tg = 10{,}27157..61.51$
3,4909	

$l\sqrt{} = l\ tg = 10{,}27156.$

Auf beide Weise kommt — tg = 180 — 61 . 51 = 118° 9′.

Für die **Seiten** dieses Oblongoktaeders o/d liegt die Sectionslinie $d = 2a : \infty b = \frac{a}{(\frac{1}{2})} : \frac{b}{0}$; suche ich darauf den ebenen Winkel an der Spitze, so ist der Zonenpunkt ma + nb = 2a + b, gibt in Formel (1)

pag. 323 $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = 0$; m = 2, n = 1, folglich

$$\text{ctg} = \sqrt{a^2b^2+0+\frac{b^2}{4}} : 0-\tfrac{1}{2}b^2 = \frac{2}{b}\sqrt{a^2+\tfrac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2+1}{b^2}}$$

$$\begin{aligned} \lg\ 4a^2+1 &= 10{,}40490 \\ \lg\ b^2 &= \underline{9{,}76368} \\ &\ 10{,}64122 \ldots \text{l ctg} = 10{,}32061 \ldots 25 . 33, \text{ doppelt } 51^0\ 6'. \end{aligned}$$

An der Spitze von $o = \infty a : b = \frac{a}{0} : \frac{b}{1}$ wird $\mu = 0$, $\nu = 1$, während m = 2, n = 1 bleibt, gibt

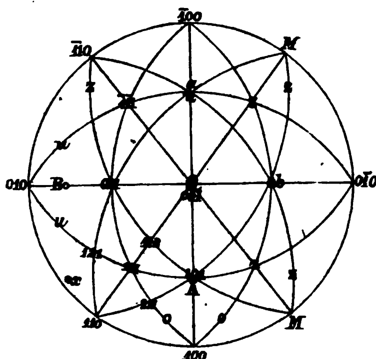
$$\text{ctg} = \sqrt{a^2b^2+a^2} : ma^2 = \sqrt{\frac{b^2+1}{4a^2}} \ldots 44 . 38 \ldots 89 . 16.$$

Die **Kugelprojection** führen wir nach Anleitung von pag. 139 ganz so aus, wie bei den anderen Systemen. Wir setzen den Radius des Projectionskreises = c = 1, und tragen darauf entweder die Axen a und b, oder α und β ab: ziehen wir mit a und b die Coordinatenkreise pag. 158, so bekommen wir die Flächenorte, wie sie in der obern Projectionsebene sich ergeben; ziehen wir dagegen mit α und β, so bekommen wir die Sectionskreise, wie sie der untern Projectionsebene zugehören.

Beispiel. **Vitriolblei:** Gehen wir mit Hauy vom Oblongoktaeder u = a : c : ∞b und o = b : c : ∞a. aus, so sind die Axen

a = 0,6 und b = 0,77 oder

α = 1,66 und β = 1,3.



Gewöhnlich entwirft man blos die Orte. Für diesen Fall müssen, r=100 gesetzt, die Mittelpunkte der Coordinatenkreise a : ∞b und b : ∞a vom Centrum Q 60 und 77 entfernt sein, d. h. QA=a=60 und QB=b=77. Man kann dazu auch den Maßstab bequem benützen. Denn hätte ich r = 20 mm gesetzt, so wäre

a = 0,2 . 60 = 12 mm und b = 0,2 . 77 = 15,4 mm.

Die Kreise uuoo um die Mittelpunkte A und B mit den Radien $\sqrt{a^2+1}$ und $\sqrt{b^2+1}$ gezogen entwickeln uns dann die Orte der Oktaederflächen z = a : b : c = 111. Schlagen wir dann mit Axe QB = b um A und mit QA = a um B Kreise, so ist ihr Durchschnitt x der Mittelpunkt der Sectionskreise z, welche durch die Orte von o und u gehen. Wir haben also die Sectionskreise von Rhombenoktaedern mit den zugehörigen Paaren bekommen. Lägen sie auf der Ebene, so gingen sie nicht a : b, sondern $\alpha : \beta$. Jetzt können wir beliebig weiter entwickeln.

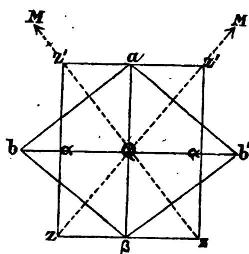
Das dritte Paar M, der Säule a : b : ∞c gehörig, hat gerade Linien zu Sectionskreisen, welche sich vorn unter 76° 16′ schneiden, das Supplement des Säulenwinkels 103° 44′. Mit dem Transporteur kann man daher die Richtigkeit des Constructionsverfahrens erweisen. Um die Orte zu finden, darf man nur die anliegenden Punkte addiren, da alle im Deductionszusammenhange stehen. So ist

111 = 101 + 010 = 100 + 011 = 001 + 110.
121 = 111 + 010 = 011 + 110
211 = 111 + 100 = 101 + 110
112 = 111 + 001 = 101 + 011 ꝛc.

Gingen wir, statt von a und b, von den Axen α und β aus, die außerhalb des Projectionskreises liegen, und verführen nun ganz in der gleichen Weise, so entsprächen diese Kreise den wirklichen Sectionskreisen der Flächen, die Orte den Zonenaxen. So daß auch hier wieder die Figuren sich vollständig reciprok zu einander verhalten.

Bei der Projection auf die Ebene brauchten wir im regulären, vier- und dreigliedrigen System nur die Gleichheit der Axen ab; bei der Kugelprojection mußten wir dagegen bei den letztern nothwendig schon einen Punkt für die Axenlänge feststellen. Beim zweigliedrigen müssen wir auch in der Projection auf die Ebene das Verhältniß der Axen ab zur Herstellung einer richtigen Figur ermitteln; bei der Kugelprojection brauchen wir dagegen zwei Punkte A und B auf den Axen a und b, welche sich einfach aus der Axenlänge ergeben, für c = r = 1. Gehen wir also, wie immer, vom Dodecaeder a : c : ∞b und b : c : ∞a aus, so ist für das erste Paar $\sqrt{A^2+1}$ der Radius des gesuchten Zonenkreises, für das zweite Paar $\sqrt{B^2+1}$. Dasselbe gilt auch für die Axen α und β.

Das Umschlagen der Orte gegen die Sectionslinien muß man sich auch recht klar machen. Gehen wir in nebenstehender Figur des Vitriolbleies von den Axen ab aus, so wollen wir uns die Säule



M = a : b : ∞c

denken, ihr Ort M liegt dann im Unendlichen des Perpendikels, welches vom Mittelpunkte Q auf die Seite ab gefällt wird. Diese Perpendikel QM schließen daher das Supplement MQM vom Säulenwinkel bab′ ein. Nehmen wir jetzt die gestrichelten Perpendikel zz′ als Ausgangspunkt der Projection, so kehrt diese ihren stumpfen Winkel hin, wo die frühere ihren scharfen hatte. Wir gelangen also zu derselben Projectionsfigur, nur ist sie gegen die frühern um 90° verdreht, und etwas kleiner. Nehmen wir a als β, so muß z der Ort des Oktaeders a : b : c sein. Daraus ergibt sich dann α durch Verbindung von z mit z′. In

beiden ist im Säulenwinkel die tg $= \frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha}$, und setzen wir

$$a : b : c = a : b : 1,$$

so wird mit ab dividirt

$$\frac{1}{b} : \frac{1}{a} : \frac{1}{ab} = \beta : \alpha : \alpha\beta\text{, d. h. } c = \alpha\beta \text{ und nicht mehr } 1.$$

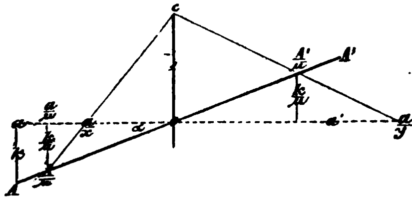
Auf die Entwickelung der Zonen hat das aber lediglich keinen Einfluß.

5. Zweiundeingliedriges System.

Da hier keine rationalen Schnitte rechtwinklicher Axen möglich sind, so muß man sich mit irrationalen begnügen. Glücklicher Weise ist das außerordentlich leicht zu bewerkstelligen, wie schon in Poggendorf's Ann. Phys. 1835 Bd. 34 pag. 555 gezeigt wurde. Denn zwischen schiefwinklicher A und rechtwinklicher a findet das einfache Verhältniß statt:

$$\frac{A}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c = \frac{a}{\mu \pm k} : \frac{b}{\nu} : c,$$

was uns nebenstehender Aufriß der Axen Aac in der Medianebene leicht klar macht. Es seien oA und oA' die Einheiten der schief gegen c stehenden Axen. Wir führen dagegen die rechtwinkliche a ein, nennen den Winkel, welcher zwischen beiden Axen Aa liegt, Aoa $= \alpha$, k das Stück zwischen aA senkrecht auf a, und parallel c = 1. Dann verhält sich



$$k : \sin\alpha = A : 1.$$
$$a : \cos\alpha = A : 1.$$
$$k = A \,.\, \sin\alpha = a \operatorname{tg}\alpha.$$
$$a = A \,.\, \cos\alpha = k \operatorname{ctg}\alpha.$$

Schneidet nun eine beliebige Ebene $c : \frac{A}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ vorn die rechtwinkliche Axe a in $\frac{a}{x}$ oder hinten $c : \frac{A'}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ in $\frac{a'}{y}$, so sind diese Stücke leicht gefunden, weil die Perpendikel von $\frac{A}{\mu}$ und $\frac{A'}{\mu}$ auf die rechtwinkliche Axe a uns die Stücke $\frac{k}{\mu}, \frac{a}{\mu}, \frac{a'}{\mu}$ bestimmen. Denn es verhält sich

vorn $1 : \frac{k}{\mu} = \frac{a}{x} : \frac{a}{\mu} - \frac{a}{x}$ oder $1 + \frac{k}{\mu} : \frac{a}{\mu} = 1 : \frac{a}{x}$, daher $\frac{a}{x} = \frac{a}{\mu + k}$,

hinten $1 : \frac{k}{\mu} = \frac{a'}{y} : \frac{a'}{y} - \frac{a'}{\mu}$ oder $1 - \frac{k}{\mu} : \frac{a'}{\mu} = 1 : \frac{a'}{y}$, daher $\frac{a'}{y} = \frac{a'}{\mu - k}$.

Wir haben daher in den allgemeinen Zeichen blos statt $\mu = \mu \pm k$ zu

setzen, um sofort die nothwendige Correction zu erhalten. Für $k = 0$ fallen die Axen A und a zusammen, d. h. es wird zugleich $\alpha = 0$. Wir haben das rechtwinkliche 2gliedrige System wieder. Da man die Axen a oft so wählen kann, daß α nur einen kleinen Winkel macht, so darf bei ungefähren Rechnungen k ganz vernachlässigt werden. Es lauten also die

Cosinusformeln.

Kanten

$$-\cos = \frac{a^2b^2+(\mu\pm k)(\mu_,\pm k)b^2+\nu\nu_,a^2}{\sqrt{a^2b^2+(\mu\pm k)^2b^2+\nu^2a^2}\ \sqrt{a^2b^2+(\mu_,\pm k)^2b^2+\nu_,^2a^2}}.$$

Giltig für zwei Ebenen $\frac{A}{\mu}:\frac{b}{\nu}$ und $\frac{A}{\mu_,}:\frac{b}{\nu_,}$.

Führen wir griechische Axen ein, so wird die Formel einfacher, denn wir dürfen mit a^2b^2 dividiren, und $\alpha^2 = \frac{1}{a^2}$, $\beta^2 = \frac{1}{b^2}$ setzen, so kommt:

Kanten

$$-\cos = \frac{1+(\mu\pm k)(\mu_,\pm k)\alpha^2+\nu\nu_,\beta^2}{\sqrt{1+(\mu\pm k)^2\alpha^2+\nu^2\beta^2}\ \sqrt{1+(\mu_,\pm k)^2\alpha^2+\nu_,^2\beta^2}}.$$

Die speciellen Formeln sind schon im zweigliedrigen Systeme entwickelt, wir haben nur am passenden Orte $\pm k$ hinzuzufügen. Das macht die Formeln sehr übersichtlich. Freilich gibt es von gleichflächigen Gestalten nur noch

Augitartige Paare (schlechthin Paare zu nennen), deren **Mediankanten** aus den vordern Endkantenwinkeln der Rhombenoktaeder pag. 317 sofort folgen:

$$\text{vorn}\ \cos\omega = \frac{a^2b^2+(\mu\pm k)^2b^2-\nu^2a^2}{a^2b^2+(\mu\pm k)^2b^2+\nu^2a^2} = \frac{1+(\mu\pm k)^2\alpha^2-\nu^2\beta^2}{1+(\mu\pm k)^2\alpha^2+\nu^2\beta^2}.$$

$$\text{hinten}\ \cos\omega = \frac{a^2b^2+(\mu\mp k)^2b^2-\nu^2a^2}{a^2b^2+(\mu\mp k)^2b^2+\nu^2a^2} = \frac{1+(\mu\mp k)^2\alpha^2-\nu^2\beta^2}{1+(\mu\mp k)^2\alpha^2+\nu^2\beta^2}.$$

Beide Formeln unterscheiden sich blos durch $\pm$ und $\mp$, denn wenn die schiefe Axe sich vorn hinabneigt, so gilt vorn + hinten —, wenn sie dagegen nach hinten sich neigt, so gilt vorn — und hinten +.

Beispiel Feldspath. Für die Weiß'sche Stellung ist $\alpha = 1^0\ 10'$, und zwar neigt sich Axe A vorn hinab, folglich ist auf der Vorderseite $k = 0{,}043$ positiv, hinten dagegen negativ. Es verhält sich

$$c : a : b : k = 1 : \sqrt{4{,}529} : \sqrt{12{,}949} : \sqrt{0{,}00187}.$$

$$\alpha : \beta : c = \sqrt{0{,}2208} : \sqrt{0{,}0772} : 1.$$

Suchen wir vorn den Winkel $n/n = a : c : \frac{1}{4}b$, so ist $\mu = 1$, $\nu = 4$, folglich

$$-\cos\omega = \frac{1+(1+k)^2\alpha^2-16\beta^2}{1+(1+k)^2\alpha^2+16\beta^2} = \frac{1+0{,}2402-1{,}2352}{1+0{,}2402+1{,}2352} = \frac{0{,}0050}{2{,}4754}$$

$l\,(1+k)^2 = 0{,}03657 \ldots$ num. $1{,}0877$ $\quad l\,0{,}005 = 7{,}69897$

$l\,\alpha^2 = 9{,}34400$ $\quad l\,2{,}475 = 0{,}39364$

$9{,}38057$ num. $0{,}2402 = (1+k)^2\alpha^2$ $\quad 7{,}30533 \ldots 89^0\ 53'$.

Da die Größe positiv ist, so muß der stumpfe Winkel 90° 7′ über P liegen. Das k verlängert die Rechnung. Allein wenn man sich mit dem Näherungswerth $(1+k)^2 = 1{,}09$ begnügt, so kommt $(1+k)^2\alpha^2 = 0{,}24$, fast derselbe Werth. Wollte man die lateinischen Axen benützen, so macht das Product a^2b^2 die Rechnung etwas weitläufiger.

Natürlich können wir die Formel auch auf ganz schiefe Axen anwenden, wie sie Naumann eingeführt hat. H. v. Kokscharow (Mat. Miner. Rußlands 1867 V. 129) folgt Naumann, und hat daher zwar die Axenbenennung gänzlich mit der Weiß'schen vertauscht:

$a : b : c = 1 : 1{,}1857 : 1{,}80058$, $\gamma = 63^0\ 46'\ 46''$ entspricht unserm
$c : A : b = 1 : 1{,}186 \ : 1{,}8$, $\alpha = 26^0\ \ 3'\ 14''$,

allein er setzt doch die Hauptaxe $a = c = 1$, wobei eine unmittelbare Vergleichung mit den unsrigen ermöglicht wird, während Hr. Prof. Naumann die „Klinodiagonale“ b (a Weiß) = 1 setzt. Wollen wir jetzt mit den Kokscharow'schen Daten denselben Winkel n/n berechnen, so hat

$$n = c : \infty A : \tfrac{1}{2}b = c : \frac{A}{0} : \frac{b}{2} = c : \frac{a}{0+k} : \frac{b}{2},$$

es muß also in den Formeln $\mu = 0$ und $\nu = 2$ gesetzt werden, folglich

$$-\cos\omega = \frac{a^2b^2+k^2b^2-4a^2}{a^2b^2+k^2b^2+4a^2} = \frac{1+k^2\alpha^2-4\beta^2}{1+k^2\alpha^2+4\beta^2} = \frac{0{,}00438}{2{,}4719}.$$

Um k und a zu bestimmen, machen wir uns einen kleinen Aufriß in der Medianebene: darin geht vorn $P = c : \infty A : \infty b$, und schneidet Axe c unter dem Winkel 63 . 57, folglich beträgt

$$\alpha = 90^0 - 63^0\ 57' = 26^0\ 3'.$$

Daraus ergibt sich

$$k = A \,.\, \sin 26.3 = 0{,}52 \text{ und } a = A \,.\, \cos 26 \,.\, 3 = 1{,}065$$

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = \alpha : \beta = \sqrt{0{,}882} : \sqrt{0{,}308} = 0{,}939 : 0{,}555.$$

Mit Benutzung der griechischen Axen kommt man durch abgekürzte Multiplication ohne Logarithmen zu dem Zahlenbruch, welcher

$$-l\cos = 7{,}25611 \ldots 89^0\ 53'\ 48'' \text{ gibt,}$$

also etwa 90° 6′ über P.

Verbindet sich eine vordere Fläche $\frac{A}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ mit einer hintern $\frac{A'}{\mu_,} : \frac{b}{\nu_,}$, so muß für Feldspath hinten $-k$ und vorn $+k$ gesetzt werden, wir haben daher

$$-\cos\omega = \frac{1 + (\mu + k)(\mu_{,} - k)\alpha^2 + \nu\nu_{,}\beta^2}{\sqrt{1 + (\mu + k)^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2}\ \sqrt{1 + (\mu_{,} - k)^2\alpha^2 + \nu_{,}^2\beta^2}}.$$

Halbe Winkel liegen in den Diagonalzonen der Schiefendfläche, da die Medianebene M die Kanten sämmtlicher Paare halbiren muß. Für diesen Fall wird die zweite Fläche

$$\infty a : 0b = \frac{a}{0} : \frac{b}{\infty} \text{ d. h. } \mu_{,} = 0,\ \nu_{,} = \infty, \text{ folglich}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega = \frac{a^2b^2 + (\mu \pm k)(0 \pm k)b^2 + \nu\infty a^2}{\sqrt{a^2b^2 + (\mu \pm k)^2b^2 + \nu^2a^2}\ \sqrt{a^2b^2 + (0 \pm k)^2b^2 + \infty^2a^2}}$$

$$= \nu a^2 : \sqrt{a^2b^2 + (\mu \pm k)^2b^2 + \nu^2a^2} \cdot \sqrt{a^2}$$

$$= \nu a\ : \sqrt{a^2b^2 + (\mu \pm k)^2b^2 + \nu^2a^2}$$

$$= \nu\beta\ : \sqrt{1 + (\mu \pm k)^2\alpha^2 + \nu^2\beta^2}.$$

Wollten wir darnach mit Weiß'schen Axen unsern halben Winkel n/n rechnen, so wäre $\cos M/n = 4\beta : \sqrt{1 + (\mu \pm k)^2\alpha^2 + 16\beta^2}$.

Wesentlich ist gegenüber obiger Rechnung der Vortheil nicht. Hätte ich hinten den halben Winkel von o/o, so wäre

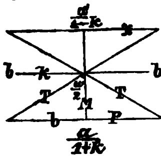
$$\cos M/o = 2\beta : \sqrt{1 + (1 - k)^2\alpha^2 + 4\beta^2} \text{ etc.}$$

Säulen sind von k unabhängig, denn sie gehen der Axe c parallel, und es wird

$$T = A : b : \infty c = a : b : \infty c,$$

da von ihr ja die Länge der Hilfsaxe a abhängt, die senkrecht gegen c steht. Man kann daher alle Säulen auf die Form

$$a : \frac{b}{\nu} : \infty c = \frac{a}{\infty} : \frac{b}{\nu . \infty} : c$$



bringen, ihre Sectionslinie durch den Mittelpunkt legen, und in der Kantenformel des 2gliedrigen Systems pag. 316

$$\mu = \mu_{,} = \infty;\ \nu = \pm\infty\nu,\ \nu_{,} = \mp\infty\nu$$

setzen, um sofort ganz allgemein für alle Säulenwinkel in Axe a zu bekommen:

$$\cos\omega = \frac{a^2b^2 + \infty^2b^2 - \nu^2\infty^2a^2}{\sqrt{a^2b^2 + \infty^2b^2 + \infty^2\nu^2a^2}\ \sqrt{a^2b^2 + \infty^2b^2 + \infty^2\nu^2a^2}}$$

$$= \frac{b^2 - \nu^2a^2}{b^2 + \nu^2a^2} = \frac{\alpha^2 + \nu^2\beta^2}{\alpha^2 + \nu^2\beta^2}.$$

Gibt für $\nu = 1$ d. h. für $T = a : b : \infty c$

$$T/T = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2},$$

worauf wir oben pag. 321 schon hinwiesen. Die Bequemlichkeit dieser Formel hat übrigens schon lange vor Haidinger der scharfsinnige Bernhardi (Gehlen, Journ. Chem. Phys. Min. 1808 Bd. 5 pag. 497) nachgewiesen. Da M auch die Säulenwinkel halbirt, so belassen wir $\mu = \infty$ und $\nu = \pm\infty\nu$, und führen die Werthe der Halbirungsfläche

$$M = \infty a : 0b = \frac{a}{0} : \frac{b}{\infty} \text{ d. h. } \mu_, = 0 \text{ und } \nu_, = \infty$$

ein, so kommt

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega = \frac{a^2b^2 + (\infty \pm k)(0 \pm k)b^2 + \infty^2 \nu a^2}{\sqrt{a^2b^2 + (\infty \pm k)^2 b^2 + \infty^2 \nu^2 a^2} \; \sqrt{a^2b^2 + (0 \pm k)^2 b^2 + \infty^2 a^2}}$$
$$= 0 + 0 + \nu a^2 : \sqrt{0 + b^2 + \nu^2 a^2} \; \sqrt{0 + 0 + a^2}$$
$$= \frac{\nu a}{\sqrt{\nu^2 a^2 + b^2}} = \frac{\nu \beta}{\sqrt{\nu^2 \beta^2 + \alpha^2}} \ldots \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = M/T.$$

Natürlich lassen sich solch einfache Formeln auch unmittelbar aus dem Dreiecke MTb ableiten, da Linie $T = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $M = a = \cos \frac{1}{2}\omega$ ist, so wird

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega = \frac{M}{T} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Eben so leicht ergeben sich die Neigungen der Schiefendfläche $\frac{a}{\mu \pm k} : \infty b$ gegen $c = 1$, nemlich

$$\cos = \frac{\mu \pm k}{\sqrt{a^2 + (\mu \pm k)^2}}.$$

Suche ich dagegen die Neigung zweier Schiefendflächen gegen einander, so scheint es bequemer, sie aus der allgemeinen Formel abzuleiten. Es ist dann, wenn die Flächen auf einer Seite liegen

$$\mu = \mu \pm k,\ \mu_, = \mu_, \pm k;\ \nu = \nu_, = 0, \text{ gibt}$$

$$\cos \omega = \frac{a^2b^2 + (\mu \pm k)(\mu_, \pm k)b^2 + 0}{\sqrt{a^2b^2 + (\mu \pm k)^2 b^2 + 0} \; \sqrt{a^2b^2 + (\mu_, \pm k)^2 b^2 + 0}}$$
$$= a^2 + (\mu \pm k)(\mu_, \pm k) : \sqrt{a^2 + (\mu \pm k)^2} \; \sqrt{a^2 + (\mu_, \pm k)^2}.$$

Gibt für die Neigung $P = a : c : \infty b$ gegen $x = a' : c : \infty b$

$$\cos P/x = \frac{a^2 + (1 + k)(1 - k)}{\sqrt{a^2 + (1 + k)^2} \; \sqrt{a^2 + (1 - k)^2}};$$

für die Neigung der Schiefendfläche gegen

$$k = a : \infty b : \infty c = \frac{a}{\infty} : b : c$$

wird $\mu_, = \infty$, gibt

$$\cos P/k = \frac{1 + k}{\sqrt{a^2 + (1 + k)^2}} \text{ und } \cos x/k = \frac{1 - k}{\sqrt{a^2 + (1 - k)^2}},$$

wie wir vorhin schon fanden.

Für die Neigung der Schiefendflächen $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{0}$ gegen die Säule

$$T = a : b : \infty c = \frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty} : c$$

wird $\nu = 0;\ \mu_, = \nu_, = \infty$, gibt

$$\cos\omega = \frac{a^2b^2 + (\mu \pm k)\infty b^2 + 0.\infty}{\sqrt{a^2b^2 + (\mu \pm k)^2 b^2 + 0}\ \sqrt{a^2b^2 + (\infty \pm k)^2 b^2 + \infty^2 a^2}}$$
$$= (\mu \pm k)b^2 : \sqrt{a^2b^2 + (\mu \pm k)^2 b^2}\ \sqrt{b^2 + a^2}$$
$$= (\mu \pm k)b\ : \sqrt{a^2 + (\mu \pm k)^2}\ \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Daraus folgt dann sofort

vorn $\cos P/T = \dfrac{(1 + k)b}{\sqrt{a^2 + (1 + k)^2}\ \sqrt{a^2 + b^2}}$,

hinten $\cos x/T = \dfrac{(1 - k)b}{\sqrt{a^2 + (1 - k)^2}\ \sqrt{a^2 + b^2}}$.

Für $k = 0$ gelangen wir immer zu den entsprechenden Formeln des zweigliedrigen Systems, so daß man eine Formel durch die andere controliren kann.

Um die Axenelemente abk zu bestimmen, müssen drei Winkel $\omega\ \omega,\ \omega_0$ gemessen sein. Können wir dazu einfache Formeln ermitteln, so lassen sich die Axen bequem finden. Nähmen wir z. B. beim Feldspath

1) $\cos\omega = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 59^0\ 24'$ (halber Säulenwinkel T/T),

2) $\cos\omega_0 = \dfrac{1 + k}{\sqrt{a^2 + (1 + k)^2}} = 63^0\ 53'$ (Supplement von P/k),

3) $\cos\omega, = \dfrac{4a}{\sqrt{a^2b^2 + (1 + k)^2 b^2 + 16a^2}} = 45^0\ 3'$ (halber Winkel M/n),

so findet sich aus (1) $\cos\omega^2(a^2 + b^2) = a^2$

$$b^2 \cos\omega^2 = a^2(1 - \cos\omega^2) = a^2 \sin\omega^2$$
$$a = b \operatorname{ctg}\omega;$$

aus (2) $\cos\omega_0^2\,[a^2 + (1 + k)^2] = (1 + k)^2$

$$\cos\omega_0^2\ a^2 = (1 + k)^2(1 - \cos\omega_0^2) = (1 + k)^2 \sin\omega_0^2$$
$$1 + k = a \operatorname{ctg}\omega_0 = b \operatorname{ctg}\omega \,.\, \operatorname{cotg}\omega_0.$$

Dieses in (3) gesetzt, folgt sofort

$$\cos\omega,^2(a^2b^2 + (1 + k)^2 b^2 + 16a^2) = 16a^2$$
$$b^2 \cos\omega,^2\,[a^2 + (1 + k)^2] = 16a^2(1 - \cos\omega,^2) = 16a^2 \sin\omega,^2$$
$$b^2 \cos\omega,^2\,[a^2 + a^2 \operatorname{ctg}\omega_0^2] = 16a^2 \sin\omega,^2, \text{ oder}$$

$$b = 4 \operatorname{tg}\omega, \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}\omega_0^2}},$$

$$a = \frac{4 \operatorname{tg}\omega,}{\operatorname{tg}\omega} \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}\omega_0^2}} = b \operatorname{ctg}\omega,$$

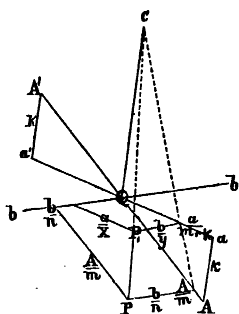
$$1 + k = \frac{4 \operatorname{tg}\omega,}{\operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\omega_0} \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}\omega_0^2}} = a \operatorname{ctg}\omega_0,$$

Ausdrücke, die wegen des gemeinsamen Factors $4 \operatorname{tg}\omega, \sqrt{\dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg}\omega_0^2}}$ sich leicht berechnen lassen.

$$
\begin{aligned}
63\,.\,53 \text{ l ctg } \omega_o^2 &= 9{,}38084 \ldots \text{num. } 0{,}2403\\
\text{l } 1{,}2403 &= 0{,}09354\\
& \ 9{,}90646\\
\text{l } \sqrt{\ } &= 9{,}95323\\
45\,.\,3 \text{ l tg } \omega, &= 0{,}00075\\
\text{l } 4 &= 0{,}60206\\
\hline
\text{l b} &= 10{,}55604 \ldots 3{,}598 = \text{b}\\
59\,.\,24 \text{ l ctg } \omega &= 9{,}77188\\
\hline
\text{l a} &= 10{,}32792 \ldots 2{,}127 = \text{a}\\
63\,.\,53 \text{ l ctg } \omega_0 &= 9{,}69042\\
\hline
\text{l}(1+\text{k}) &= 10{,}01834 \ldots 1{,}043 = 1 + \text{k}
\end{aligned}
$$

Weiß'sche Tangentenformeln.

Hier muß vor allem $\left(\text{außer der Fläche } \frac{a}{\mu \pm k} : \frac{b}{\nu}\right)$ noch der Zonenpunkt zur Sprache kommen, welchen ein Strahl $cP = c; \frac{A}{m} + \frac{b}{n}$ in der gegen c rechtwinklichen Axenebene aQb macht. Um von der einfachen Addition Nutzen ziehen zu können, nennen wir jetzt in der schiefen Ebene den Punkt P nicht $mA + nb$, sondern $\frac{A}{m} + \frac{b}{n}$. Verbinden wir P mit c, so treffe der Strahl die rechtwinkliche Ebene in P, $= \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$. Derselbe muß der Durchschnitt von den Flächen



$$\frac{A}{m} : \infty b : c \text{ und } \frac{b}{n} : \infty A : c$$

sein, welche in der rechtwinklichen Ebene den Ausdruck

$$\frac{a}{m \pm k} : \frac{b}{0} \text{ und } \frac{a}{0 \pm k} : \frac{b}{n}$$

erhalten. Wir dürfen daher in der Zonenpunktformel pag. 188 nur

$$\mu = m \pm k,\ \nu = 0;\ \mu, = \pm k,\ \nu, = n$$

setzen, um sofort zu den Schnitten der rechtwinklichen Axen

$$(n - 0)\, a : [(m \pm k) \mp k]\, b : n(m \pm k)\, c = \frac{a}{m \pm k} : \frac{mb}{n(m \pm k)} : c$$

zu gelangen. Wollen wir jetzt die Divisorenform des Zonenpunktes $\frac{A}{m} + \frac{b}{n}$ beibehalten, so dürfen wir nur in der Tangentenformel (7) pag. 214

$$\mu = \mu \pm k;\ m = m \pm k,\ n = \frac{n(m \pm k)}{m}$$

setzen, und bekommen

$$tg = \frac{ab\sqrt{(m\pm k)^2 \cdot \frac{n^2(m\pm k)^2}{m^2} + \frac{n^2(m\pm k)^2}{m^2} a^2 + (m\pm k)^2 b^2}}{(m\pm k)(\mu\pm k) b^2 - \frac{n(m\pm k)\nu a^2}{m}}.$$

1) $tg = ab\sqrt{(m\pm k)^2 n^2 + n^2 a^2 + m^2 b^2} : m(\mu\pm k)b^2 - n\nu a^2$ (Kante).

Giltig für Fläche $\frac{A}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ und Zonenpunkt $\frac{A}{m} + \frac{b}{n}$.

So habe ich seiner Zeit (Pogg. Ann. 1835 Bd. 34 pag. 658) die Formel zuerst aufgestellt. Um jedoch das Reciproke besser hervorheben zu können, zog ich es später vor, den Zonenpunkt mA + nb zu bezeichnen. Dann müssen wir in derselben Formel (7)

$$\mu = \mu \pm k;\ m = \frac{1}{m \pm k},\ n = \frac{m}{n(m \pm k)}$$

setzen, um

2) $tg = ab\sqrt{\frac{m^2}{(m\pm k)^2} + m^2a^2 + n^2b^2} : (\mu\pm k)nb^2 - \nu ma^2$ (Kante),

giltig für Fläche $\frac{A}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ und Zonenpunkt mA + nb,

zu erhalten. Für k = 0 geht der Ausdruck sofort in Formel (5) pag. 213 über. Der Divisor $m \pm k$ ist in diesem Falle etwas unbequem. Die lexicographische Ordnung der lateinischen Buchstaben zeigt uns sofort die Multiplicatorenform des Zonenpunktes gegenüber der vorigen Formel. Durch Division mit a^2b^2 und Setzen von $\frac{1}{a^2} = \alpha^2$, $\frac{1}{b^2} = \beta^2$, können wir zwar die Form mit griechischen Axen

3) $tg = \sqrt{\frac{m^2\alpha^2\beta^2}{(m\pm k)^2} + m^2\beta^2 + n^2\alpha^2} : (\mu \pm k)n\alpha^2 - \nu m\beta^2$

sofort hinstellen, aber den Divisor bringen wir damit nicht weg. Ebenso wenig wird die Formel (1) durch griechische Axen

4) $tg = \sqrt{(m\pm k)^2 n^2\alpha^2\beta^2 + m^2\alpha^2 + n^2\beta^2} : (\mu \pm k)m\alpha^2 - n\nu\beta^2$

erleichtert.

Bei der Rechnung thun wir ganz, als hätten wir rechtwinkliche Axen, nur sind dabei die Vorzeichen von k vorn und hinten gehörig zu bedenken: + im stumpfen, — im scharfen Axenwinkel a/c.

Feldspath. Diagonalzonen haben vorn + k und hinten — k. Die Kanten aller Paare in der Axe a werden durch die Mittelpunktsebene M halbirt. Suchen wir daher nach Formel (1) auf der Vorderseite die halbe Mediankante der Flächen $\frac{a}{\mu + k} : \frac{b}{\nu}$, die durch den Diagonalzonenpunkt $\frac{A}{m} + \frac{b}{\infty}$ gehen, so haben wir nur $m = \mu$ und $n = \infty$ zu setzen, und erlangen

$$tg = ab\sqrt{\infty^2(\mu + k)^2 + \infty^2 a^2 + \mu^2 b^2} : \mu(\mu + k)b^2 - \infty\nu a^2$$

$$tg = \frac{b}{\nu a}\sqrt{(\mu + k)^2 + a^2} \text{ (Vorderseite)},$$

$$tg = \frac{b}{\nu a}\sqrt{(\mu - k)^2 + a^2} \text{ (Hinterseite)}.$$

Setzen wir darin $k = 0$, so kommen die vordern und hintern Endkanten der Rhombenoktaeder pag. 324, die einander gleich sind. Darnach ist nun:

$$M/n = \frac{b}{4a}\sqrt{(1 + k)^2 + a^2},$$

$$M/o = \frac{b}{2a}\sqrt{(1 - k)^2 + a^2}.$$

In Axe b hat der vordere Theil der Seitenkante $+ k$, der hintere $- k$; für die Flächen gegen die Mittelpunktsebene (Querfläche)

$$k = a : \infty b : \infty c = \frac{a}{\infty} : b : c$$

liegt der Zonenpunkt $\frac{A}{\infty} + \frac{b}{n}$ in der Seitenaxe b, wir haben daher $n = \nu$ und $m = \infty$ zu setzen, gibt

$$tg = ab\sqrt{\nu^2 . \infty^2 + \nu^2 a^2 + \infty^2 b^2} : \infty(\mu \pm k)b^2 - \nu^2 a^2, \text{ also}$$

$$\text{vorn} \quad tg = \frac{a}{(\mu + k)b}\sqrt{\nu^2 + b^2},$$

$$\text{gibt für } k/n = \frac{a}{(1+k)b}\sqrt{16 + b^2} \ldots 108^0\, 8'.$$

$$\text{hinten} \quad tg = \frac{a}{(\mu - k)b}\sqrt{\nu^2 + b^2},$$

$$\text{gibt für } k/o = \frac{a}{(1-k)b}\sqrt{4 + b^2} \ldots 111^0\, 28'.$$

Durch die gemeinsamen Factoren wird auch hier wieder die Doppelrechnung für die einfache Kante wesentlich erleichtert. Das Einführen der reciproken Axen $\alpha\beta$ hat keinen Werth.

Die Neigung einer Fläche gegen Axe c finden wir immer am besten auf die alte Weiß'sche Weise durch Fällen eines Perpendikels auf die Sectionslinie $\frac{a}{\mu \pm k} : \frac{b}{\nu}$, welches

$$\frac{ab}{\sqrt{(\mu \pm k)^2 b^2 + \nu^2 a^2}} = \sin$$

ist, und da $c = 1$ den cos. bildet, so kommt

$$\sin : \cos = tg = ab : \sqrt{(\mu \pm k)^2 b^2 + \nu^2 a^2}.$$

Für die Neigung der **Schiefendflächen** $\frac{A}{\mu} : \frac{b}{0}$ gegen Axe c wird darin nur $\nu = 0$, es kommt dann sogleich

$$\text{vorn tg} = \frac{a}{\mu + k}, \text{ hinten tg} = \frac{a}{\mu - k}.$$

Für die seitlichen Flächen $\frac{b}{\nu} : \frac{A}{0} = \frac{b}{\nu} : \frac{a}{0 \pm k}$, wird $\mu = 0$, es kommt dann die minder einfache Formel

$$\text{tg} = ab : \sqrt{k^2b^2 + \nu^2a^2},$$

wegen des Quadrats ist sie von $\pm$ unabhängig.

Kantenzonen $\frac{A}{m} + \frac{b}{m}$ sind nicht mehr so vortheilhaft, weil zwar n = m wird, also die allgemeine Formel in die einfachere

$$\text{tg} = ab\sqrt{(m \pm k)^2 + a^2 + b^2} : (\mu \pm k)b^2 - \nu a^2$$

übergeht, aber damit das lästige k nicht beseitigt wird. Es liegen darin die Neigungswinkel der Flächen gegen die Säule T. Der einfachste Fall ist die Neigung der Schiefendflächen P und x gegen T, wir haben da

$$m = \mu = 1, \nu = 0$$

zu setzen, und erhalten dann

$$\text{vorn P/T tg} = a\sqrt{(1 + k)^2 + a^2 + b^2} : (1 + k)b,$$
$$\text{hinten x/T tg} = a\sqrt{(1 - k)^2 + a^2 + b^2} : (1 - k)b.$$

Nur die Säulen $a : \frac{b}{\nu} : \infty c$ sind von k unabhängig. Denn ich habe für ihre Neigung gegen $M = b : \infty a : \infty c$

$$\sin : \cos = \frac{b}{\nu} : a, \text{ tg} = \frac{b}{\nu a},$$

das gibt für $T = a : b : \infty c$, $\text{tg} = \frac{b}{a}$.

Tangente des ganzen Winkels ergibt sich zwar leicht. Denn ich darf pag. 212 in Formel (4) nur $\mu = (\mu \pm k)$ und $\mu_, = (\mu_, \pm k)$ setzen, so kommt sofort

$$-\text{ctg} = \frac{(\mu \pm k)(\mu_, \pm k)\alpha^2 + \nu\nu_,\beta^2 + 1}{\sqrt{[(\mu \pm k)\nu_, - (\mu_, \pm k)\nu]^2\alpha^2\beta^2 + (\mu - \mu_,)^2\alpha^2 + (\nu - \nu_,)^2\beta^2}}.$$

Suchen wir damit z. B. den Winkel n/o, so wird für n ... $\mu = -(1 + k)$, $\nu = 4$; für o ... $\mu_, = (1 - k)$, $\nu_, = 2$,

$$-\text{ctg} = -(1 + k)(1 - k)\alpha^2 + 8\beta^2 + 1 : \sqrt{(-6 + 2k)^2\alpha^2\beta^2 + 4(\alpha^2 + \beta^2)}.$$
$$= -0{,}2204 + 0{,}6176 + 1 : \sqrt{0{,}5962 + 1{,}192}, \text{ gibt } 136^0\ 16'.$$

Allein es ist das keineswegs kürzer, als wenn wir uns den Winkel n/o in zwei T/o und T/n zerlegen, die hinten in der Kantenzone m = n = 3 liegen. Daher haben wir in obiger Kantenzonenformel nur

$$m = m - k = 3 - 0{,}043 = 2{,}957$$

zu setzen, um den gemeinsamen

$\sin = ab \sqrt{(2,957)^2 + a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 b^2[(2,957)^2 + a^2 + b^2]}$..$l \sin = 1,59345$ zu bekommen. Für cos haben wir

bei $o \ldots \mu = 1 - k$, $\nu = 2$; bei $n \ldots \mu = -(1-k)$, $\nu = 4$

gibt $\cos o = (1-k)b^2 - 2a^2 = 3,334 \ldots 85 . 8$ $\quad l \cos = 0,52296$

$l \operatorname{tg} T/o = 1,07049$

$\cos n = -(1+k)b^2 + 4a^2 = 31,622 \ldots 51 . 9$ $\quad l \cos = 1,49999$

$n/o \quad 136^0\ 17'$ $\quad l \operatorname{tg} T/n = 0,09346$

Drei Unbekannte abk sind zu bestimmen. Je nachdem man die Winkel beim Messen wählen kann, wird die Sache leichter oder schwerer. Will ich ohne Hilfe von sphärischer Trigonometrie pag. 85 auf algebraischem Wege verfahren, so nehme man zwei möglichst einfache Flächen aus der Kantenzonenlinie, z. B. vorn in der ersten Kantenzone

$$P/T = \operatorname{tg} \omega = ab \sqrt{(1+k)^2 + a^2 + b^2} : (1+k)b^2 \text{ und}$$
$$o/T = \operatorname{tg} \omega, = ab \sqrt{(1+k)^2 + a^2 + b^2} : (1-k)b^2 - 2a^2,$$

dann dividiren sich die Wurzelgrößen weg, und wir bekommen

$$\frac{\operatorname{tg} \omega,}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{(1-k)b^2 - 2a^2}{(1+k)b^2} = \frac{1-k}{1+k} - \frac{2}{1+k} \cdot \frac{a^2}{b^2}.$$

Hätten wir aus der zweiten Kantenzone y/T hinten gewählt, so käme

$$y/T = \operatorname{tg} \omega = ab \sqrt{(3-k)^2 + a^2 + b^2} : (3-k)b^2 \text{ und}$$
$$o/T = \operatorname{tg} \omega, = ab \sqrt{(3-k)^2 + a^2 + b^2} : (1-k)b^2 - 2a^2$$
$$\frac{\operatorname{tg} \omega,}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{(1-k)b^2 - 2a^2}{(3-k)b^2} = \frac{1-k}{3-k} - \frac{2}{3-k} \cdot \frac{a^2}{b^2}.$$

Nennen wir den halben Säulenwinkel $T/M = \omega_0$, $\frac{a}{b_0} = \operatorname{ctg} \omega_0$, so kommen wir in allen Fällen für die Bestimmung von k auf eine Gleichung ersten Grades, im ersten Falle auf

$$\frac{\operatorname{tg} \omega,}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{1-k}{1+k} - \frac{2}{1+k} \operatorname{ctg} \omega_0^2$$
$$(1+k)\frac{\operatorname{tg} \omega,}{\operatorname{tg} \omega} - 1 + k = -2 \operatorname{ctg} \omega_0^2$$
$$\operatorname{tg} \omega, + k \operatorname{tg} \omega, - \operatorname{tg} \omega + k \operatorname{tg} \omega = -2 \operatorname{tg} \omega \operatorname{ctg} \omega_0^2$$
$$k(\operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} \omega,) = \operatorname{tg} \omega - 2 \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \omega_0^2 - \operatorname{tg} \omega,$$
$$k = \frac{\operatorname{tg} \omega (1 - 2 \operatorname{tg} \omega_0^2) - \operatorname{tg} \omega,}{\operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} \omega,}$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{a}{b(1+k)} \sqrt{(1+k)^2 + a^2 + b^2}$$
$$\operatorname{tg} \omega^2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2 . a^2}{b^2(1+k)^2} + \frac{a^2}{(1+k)^2}$$
$$(1+k)^2 (\operatorname{tg} \omega^2 - \operatorname{ctg} \omega_0^2) = a^2(\operatorname{ctg} \omega_0^2 + 1)$$
$$\frac{(1+k)^2 (\operatorname{tg} \omega^2 - \operatorname{ctg} \omega_0^2)}{\operatorname{ctg} \omega_0^2 + 1} = a^2, \quad b^2 = a^2 \operatorname{tg} \omega_0^2.$$

Wählen wir Flächen aus den Diagonalzonen der Schiefendflächen, so nehmen wir am einfachsten gleich die Säule hinzu:

$$1.\ M/T \ldots \operatorname{tg} \omega = \frac{b}{a}.$$

$$2.\ M/n \ldots \operatorname{tg} \omega_{,} = \frac{b}{4a} \sqrt{(1 + k)^2 + a^2}.$$

$$3.\ M/o \ldots \operatorname{tg} \omega_0 = \frac{b}{2a} \sqrt{(1 - k)^2 + a^2}.$$

Zwar könnten wir durch Division von 2 durch 3 sofort

$$a^2 = \frac{(1 + k)^2 \operatorname{tg} \omega_0^2 - 4\,(1 - k)^2 \operatorname{tg} \omega_{,}^2}{4 \operatorname{tg} \omega_{,}^2 - \operatorname{tg} \omega_0^2}$$

finden. Aber es ist besser, wir bestimmen k durch Division von 2 mit 1, und 3 mit 1, dann erhalten wir mit Wegschaffung der Wurzeln

$$2/1\ \frac{\operatorname{tg} \omega_{,}^2}{\operatorname{tg} \omega^2} = \tfrac{1}{16}[(1 + k)^2 + a^2],\ a^2 = \frac{16 \operatorname{tg} \omega_{,}^2}{\operatorname{tg} \omega^2} - (1 + k)^2;$$

$$3/1\ \frac{\operatorname{tg} \omega_0^2}{\operatorname{tg} \omega^2} = \tfrac{1}{4}[(1 - k)^2 + a^2]\ ,\ a^2 = \frac{4 \operatorname{tg} \omega_0^2}{\operatorname{tg} \omega^2} - (1 - k)^2.$$

Woraus sofort durch Subtraction des obern vom untern

$$(1 + k)^2 - (1 - k)^2 = 4\,k = \frac{16 \operatorname{tg} \omega_{,}^2 - 4 \operatorname{tg} \omega_0^2}{\operatorname{tg} \omega^2}$$

$$k = \frac{4 \operatorname{tg} \omega_{,}^2 - \operatorname{tg} \omega_0^2}{\operatorname{tg} \omega^2}$$

folgt (Hdb. Mineral. 1855 pag. 60). Die Wahl der einfachsten Flächenformeln ist Säule

$$M/t \ldots \operatorname{tg} \omega = \frac{b}{a};\ P/k \ldots \operatorname{tg} \omega_{,} = \frac{a}{1 + k};\ x/k \ldots \operatorname{tg} \omega_0 = \frac{a}{1 - k}.$$

Daraus folgt sogleich

$$a = \operatorname{tg} \omega_{,} (1 + k) = \operatorname{tg} \omega_0 (1 - k)$$

$$\operatorname{tg} \omega_{,} + k \operatorname{tg} \omega_{,} = \operatorname{tg} \omega_0 - k \operatorname{tg} \omega_0$$

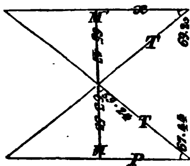
$$k \operatorname{tg} \omega_{,} + k \operatorname{tg} \omega_0 = \operatorname{tg} \omega_0 - \operatorname{tg} \omega_{,}$$

$$k = \frac{\operatorname{tg} \omega_0 - \operatorname{tg} \omega_{,}}{\operatorname{tg} \omega_0 + \operatorname{tg} \omega_{,}}.$$

Der stumpfe Winkel der Axen Ac liegt bei einem + k immer auf der Seite des ersten, bei einem negativen auf der Seite des zweiten Gliedes. Im erstern Falle ist der Ausdruck für k positiv, liegt also wie $\operatorname{tg} \omega_{,}$, d. h. auf der Seite von n; im zweiten Falle ist k negativ, liegt also wie das zweite Glied $\operatorname{tg} \omega_{,}$, d. h. wie P. Alle diese Rechnungen gehen ohne trigonometrische Betrachtungen vor sich, und sind lediglich ein Ausfluß der Formeln.

Da aber die 2 + 1gliedrigen Krystallsysteme bilateral sind, so gibt die Medianebene M = b : ∞a : ∞c rechtwinkliche körperliche Dreiecke, die durch zwei Winkel bestimmt sind. Habe ich daher irgend einen medianen Winkel (T/T, n/n, o/o etc.) gemessen, so kann ich mit Hilfe

eines bilateralen Winkels (P/T, x/T etc.) die Seite der Medianebene M finden. Es ist z. B. beim Feldspath im Dreiecke MPT Kante



$$P/T = 67.44 \text{ und } M/T = 59.24 = \varphi_0, \text{ so folgt}$$

$$\cos M = \frac{\cos 67.44}{\sin 59.24} = 63.53 = \varphi, \text{ d. h.}$$

die Schiefendfläche P ist gegen Axe c 63° 53′ geneigt. Eben so hinten.

$$\cos M' = \frac{\cos 69.20}{\sin 59.24} = 65.47 = \varphi_,, \text{ d. h.}$$

die hintere Gegenfläche x ist gegen Axe c 65° 47′ geneigt. Mittelst der Vierzonenkörper-Formeln pag. 89 folgt dann

$$\mathrm{tg} = \frac{2}{\mathrm{ctg}\,\varphi_, - \mathrm{ctg}\,\varphi} = 91.10 = \omega, \text{ d. h.}$$

Axe A macht vorn gegen c 91° 10′ oder a/c = 1° 10′. Daraus findet sich dann

$$a = \mathrm{tg}\,\varphi, \quad k = a\,\mathrm{tg}\,\omega, \quad b = a\,\mathrm{tg}\,\varphi_0,$$

offenbar der einfachere Weg zur Berechnung. Denn wollten wir mit den drei Winkeln

$$P/T \ldots \mathrm{tg}_, = \frac{a}{b}\sqrt{(1+k)^2 + a^2 + b^2} : (1+k),$$

$$x/T \ldots \mathrm{tg}_0 = \frac{a}{b}\sqrt{(1-k)^2 + a^2 + b^2} : (1-k),$$

$$M/T \ldots \mathrm{ctg} = \frac{a}{b},$$

algebraisch verfahren, so müßten wir, um k zu entwickeln, die dritte in die beiden ersten setzen und quadriren, so käme

$$\mathrm{tg}_,^2(1+k)^2 = \mathrm{ctg}^2[(1+k)^2 + a^2 + b^2]$$

$$\mathrm{tg}_0^2(1-k)^2 = \mathrm{ctg}^2[(1-k)^2 + a^2 + b^2]$$

$$\mathrm{ctg}^2(a^2+b^2) = \mathrm{tg}_,^2(1+k)^2 - \mathrm{ctg}^2(1+k)^2 = \mathrm{tg}_0^2(1-k)^2 - \mathrm{ctg}^2(1-k)^2$$

$$(1+k^2+2k)(\mathrm{tg}_,^2 - \mathrm{ctg}^2) = (1+k^2-2k)(\mathrm{tg}_0^2 - \mathrm{ctg}^2)$$

$$k^2(\mathrm{tg}_,^2 - \mathrm{tg}_0^2) + 2k(\mathrm{tg}_,^2 + \mathrm{tg}_0^2 - 2\mathrm{ctg}^2) = \mathrm{tg}_0^2 - \mathrm{tg}_,^2$$

$$k^2 + 2k\,\frac{\mathrm{tg}_,^2 + \mathrm{tg}_0^2 - 2\mathrm{ctg}^2}{\mathrm{tg}_,^2 - \mathrm{tg}_0^2} + 1 = 0 = k^2 + k2P + 1,$$

$$\text{gibt } k = -P \mp \sqrt{P^2 - 1} = 0{,}043.$$

Man bringt also die Sache auch zu Stande, aber weitläufiger.

Die **Seiten** entwickeln sich ebenfalls elegant aus der Kantenformel, wenn man den Zonenpunkt nicht ma + nb sondern $\frac{a}{m} + \frac{b}{n}$ setzt. Die zweigl. Cosinusformel (1) pag. 316 geht dann über in

$$\pm \cos\omega = 1 + \frac{a^2}{mm_,} + \frac{b^2}{nn_,} : \sqrt{1 + \frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2}}\sqrt{1 + \frac{a^2}{m_,^2} + \frac{b^2}{n_,^2}}.$$

Eine Zonenaxe c; $\frac{A}{m} + \frac{b}{n}$, welche von c nach der schiefen Ebene

geht, macht nach pag. 335 in der rechtwinklichen Ebene den Zonenpunkt $\frac{a}{m \pm k} + \frac{mb}{n(m \pm k)}$. Setzen wir

$$m = m \pm k,\ m, = m, \pm k;\ n = \frac{n(m \pm k)}{m},\ n, = \frac{n,(m, \pm k)}{m,}$$

und schaffen die Brüche weg, so kommt

$$\cos\omega = \frac{(m \pm k)\ (m, \pm k)nn, + mm, b^2 + nn, a^2}{\sqrt{(m \pm k)^2 n^2 + m^2 b^2 + n^2 a^2}\ \sqrt{(m, \pm k)^2 n,^2 + m,^2 b^2 + n,^2 a^2}}.$$

Giltig für die Zonenpunkte $\frac{A}{m} + \frac{b}{n}$ und $\frac{A}{m,} + \frac{b}{n,}$.

Beispiel. Feldspath $y = \frac{A}{3} : \frac{b}{0}$ geht durch die Zonenpunkte

$$\frac{A}{3} + \frac{b}{3} \text{ und } \frac{A}{3} + \frac{b'}{3},$$

zwischen beiden nach diesen Punkten gehenden Zonenaxen liegt der Winkel unten an der Spitze. Daher

$$m = n = m, = 3 \text{ und } n, = -3, \text{ gibt}$$

$$\cos = \frac{-(3-k^2 9 + 9b^2 - 9a^2}{9(3-k)^2 + 9b^2 + 9a^2} = \frac{-(3-k)^2 + b^2 - a^2}{(3-k)^2 + b^2 + a^2}$$

$$= -\frac{0{,}324}{26{,}222} = 89.18.$$

Es ist das der Winkel an der Spitze, welcher sich im Krystall nach unten kehrt. Zur Probe suchen wir die Winkel an der Basis des gleichschenklichen Dreiecks, worin bei gleichen

$$n = m = m, = 3,\ \frac{1}{n,} = \infty = \frac{1}{0} \text{ ist,}$$

folglich n, = 0 gesetzt werden muß, das gibt

$$\cos = \frac{0 + 9b^2 + 0}{\sqrt{9(3-k)^2 + 9b^2 + 9a^2}\ \sqrt{9b^2}} = \sqrt{\frac{b^2}{(3-k)^2 + b^2 + a^2}} = 45.21.15,$$

$$2.45^0\ 21' + 89^0\ 18' = 180^0.$$

Die **Tangentenformeln** machen sich auch hier wieder etwas einfacher. Wir brauchen der zweigliedrigen Formel (1) pag. 323 nur die Form

$$\text{ctg} = \sqrt{a^2b^2 + \nu^2a^2 + \mu^2b^2} : \frac{\nu a^2}{m} - \frac{\mu b^2}{n}$$

$$= mn\ \sqrt{a^2b^2 + \nu^2a^2 + \mu^2b^2} : n\nu a^2 - m\mu b^2 = (8) \text{ pag. } 214$$

zu geben, und darin $\mu = \mu \pm k$, $m = m \pm k$ und $n = \frac{n(m \pm k)}{m}$ zu setzen, und kommt sofort

$$\text{ctg} = (m \pm k)n\ \sqrt{a^2b^2 + \nu^2a^2 + (\mu \pm k)^2 b^2} : n\nu a^2 - m(\mu \pm k)b^2 \text{ (Seite).}$$

Suchen wir jetzt den Seitenwinkel an der untern Spitze von y, so ist

$$m = n = \mu = 3 \text{ und } \nu = 0, \text{ gibt}$$

$$\text{ctg} = \frac{(3-k)\,3\,\sqrt{a^2b^2+0+(3-k)^2b^2}}{0+3(3-k)b^2} = \sqrt{\frac{a^2+(3-k)^2}{b^2}} = 44^0\,39'$$

oder $89^0\,18'$, wie oben; was bedeutend einfacher ist, als mit der Cosinusformel.

Die **Kugelprojection** in der Weiß'schen Stellung des Feldspathes weicht, sofern wir $c : \infty A : \infty b$ als Projectionskreis nehmen, hinten so unwesentlich von vorn ab, daß wir auch hier ganz nach der Regel des Zweigliedrigen pag. 327 die Figur entwerfen können. Wir dürfen uns dabei über einen error insensibilis hinwegsetzen, und die Weiß'schen Axen

$$a : b : c = \sqrt{13} : \sqrt{3\,.\,13} : \sqrt{3} = \sqrt{4\tfrac{1}{3}} : \sqrt{13} : 1 = 2{,}08 : 3{,}6 \;\; : 1.$$

$$\alpha : \beta : c = \sqrt{\tfrac{1}{13}} : \sqrt{\tfrac{1}{3\,.\,13}} : \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sqrt{\tfrac{3}{13}} : \sqrt{\tfrac{1}{13}} : 1 = 0{,}48 : 0{,}28 : 1.$$

zur Grundlage nehmen. Ist, wie immer, der Radius des Projectionskreises = 1, so läßt sich leicht die Größe von a und b construiren, indem wir 13 in 2^2+3^2 zerlegen, ein rechtwinkliches Dreieck mit den Katheten 2 und 3 machen, so gibt die Hypotenuse $= \sqrt{13} =$ b. Da $(0{,}58)^2 = 0{,}33\ldots = \frac{1}{3}$ ist, so darf ich nur weiter an demselben Dreiecke 2 und reichlich $\frac{1}{3}$ machen, um sogleich mit dem Zirkel $a = \sqrt{4\frac{1}{3}}$ abnehmen zu können. Ziehe ich dann vom Mittelpunkte Perpendikel auf die Linie $c : a$ und $c : b$, so geben die mir in der obern Projectionsebene α und β. Doch da es nicht so genau auf die Dimensionen bei der Figuranlage ankommt, so kann ich auch $\alpha = 0{,}48$ knapp $\frac{1}{2}$ und $\beta = 0{,}28$ reichlich $\frac{1}{4}$ nehmen. Will ich blos messen, so ist der Radius unseres Kreises tab. 3 fig. 5 36 mm, folglich

$$\alpha : \beta : c = 48 : 28 : 100 = 17\tfrac{1}{4} : 10 : 36.$$

Ich habe daher für die Sectionskreise blos $\alpha = 17\frac{1}{4}$ mm und $\beta = 10$ mm zu machen, und kann dann sofort mit $r = \sqrt{1+\alpha^2}$ die Kreise P und x, und mit $r = \sqrt{1+\beta^2}$ die Kreise g ziehen. Durch die eingesetzten Zonenpunkte g/P und g/x sind die Radien der Säule T/T bestimmt, welche auf dem Projectionskreise einen Bogen von 120^0 abschneiden, worin zu gleicher Zeit eine Controle für die Richtigkeit der Eintheilung liegt. Radius $r = \sqrt{(3\alpha)^2+1}$ gibt mir Kreis $y = c : \frac{1}{3}a' : \infty b$, und $r = \sqrt{(5\alpha,)^2+1}$ den Kreis $t = c : \frac{1}{5}a : \infty b$. Für das hintere Paar $o = a' : \frac{1}{2}b : c$ muß ich vorn den Mittelpunkt in $\alpha + 2\beta$ suchen, was durch Schlagen von zwei Kreisen sofort ausgeführt ist. Eben so leicht finde ich vorn $n = a : \frac{1}{4}b : c$, indem ich hinten den Mittelpunkt des Kreises in $\alpha' + 4\beta$ suche. Die Kreise der seltenen Flächen $m = \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b$ sind hinten mit $3\alpha + 2\beta$ gegeben. Kurz eine Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ hat für ihren Sectionskreis den Mittelpunkt $\mu\alpha, + \nu\beta$, ganz wie im regulären Systeme pag. 139 gezeigt wurde. Da die Einheiten von α und β klein sind, so lassen sich die Mittelpunkte äußerst bequem finden, und die Kreisprojection ist fast mit derselben Schnelligkeit und Leichtigkeit aus-

geführt, wie eine Linearfigur, und dabei ist sie entschieden compendiöser und abgeschlossener, wie eine Vergleichung mit der Linearfigur pag. 186 zeigt. Namentlich kommen dabei alle Zonen zum Vorschein. So bilden vorn nsg eine Zone, die auf dem Linearbilde nicht steht, weil man sonst die Linien zu weit ausdehnen müßte, da der Punkt 5a + b liegt, wie eine kleine Rechnung sofort ergibt. Denn es ist für den rechten vordern Quadranten:

$$g = \frac{a'}{0} : b,\ n = a : \frac{b'}{4},\ s = a' : \frac{b}{6}.$$

Gibt nach der Zonenpunktformel pag. 188

$$\left.\begin{array}{l} g \ldots \mu = 0,\ \nu = 1 \\ n \ldots \mu_{,} = 1,\ \nu_{,} = -4 \\ s \ldots \mu_2 = -1,\ \nu_2 = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} g/n(-4-1)a : (0-1)b : (0-1)c = 5a + b. \\ g/s(6-1)\,a : (0+1)b : (0+1)c = 5a + b. \end{array}$$

Die Figur gewährt auch insofern Interesse, als das Bild mit einer dreigliedrigen Projection große Aehnlichkeit hat; nehmen wir ynn als Grundrhomboeder, so ist ∞P das nächste stumpfere und vvt das nächste schärfere Rhomboeder ꝛc.

Legen wir dagegen demselben Kreise statt $\alpha\beta$ die längern Achsen ab zu Grunde, tab. 3 fig. 6, so können wir ganz in derselben Weise eine ähnliche Figur entwickeln, deren Zonenpunkte jetzt aber die Flächenorte werden, also die Pole der Sectionskreise sind. Da der Pol 90° von jedem Punkte des Sectionskreises abstehen und im Perpendikel liegen muß, welches auf dem Mittelpunkte der Sehne errichtet wird, pag. 138, so können wir zwar den Ort jedes Kreises finden, doch ist es erfreulich, auch in unserer Methode ein leichtes selbstständiges Verfahren zu besitzen. Wie wir vorhin die kleinen α und β, so legen wir jetzt die großen Axen a und b zu Grunde, welche für c = 1 zwar weit über den Projectionskreis hinausfallen, allein wie wir vorhin die kleinen Axen vermehrten, so müssen wir jetzt die großen Axen umgekehrt durch Theilung vermindern. Theilen ist zwar nicht so bequem, allein da es sich meist um Hälften, Drittel, Viertel ꝛc. handelt, so ist auch das leicht ausgeführt. Ziehen wir zunächst mit der Axeneinheit b, welche freilich weit über den Projectionskreis hinausfällt, die Kreise g, und mit der Axeneinheit a die Kreise P und x, so sind Pxgg die gesuchten Orte der gleichnamigen Flächen. Die vier Durchschnittspunkte bestimmen mir die Orte der Säulenflächen TT, die Linien kehren ihren scharfen Winkel 60° nach vorn, es sind ja die Perpendikel, welche ich im Mittelpunkte auf die gleichnamigen Sectionskreise zu errichten habe. Wie sich diese Säule dreht, so müssen sich auch die übrigen drehen, seitlich bei g und g fällt es zwar nicht auf, aber wohl bei den Flächenpolen P und x, denn wo bei den Sectionskreisen P vorn lag, da liegt jetzt der Pol P hinten, und umgekehrt Sectionskreis x hinten, Pol x dagegen vorn. Auch hier können wir gleich die Probe machen, wir dürfen für Sectionskreis P in

voriger Figur nur den Pol suchen, so werden wir finden, daß der Pol gerade so weit vom Mittelpunkte wegliege, als bei unserer jetzigen Construction.

Zur Bestimmung der Flächenorte bedarf es nur der „Coordinatenkreise“ pag. 158, d. h. solcher, deren Sehne mit der Axe b oder a oder den Sectionslinien der Flächen k oder M zusammenfällt. Haben wir z. B. den Ort von $y = \frac{a'}{3} : \infty b$ zu bestimmen, so dürfen wir nur die Zirkelspitze hinten in $\frac{1}{3}a'$ einsetzen, mit der andern nach M greifen und den Coordinatenkreis MyM ziehen, so liegt vorn im Durchschnitte mit der Axe a der Ort von y; eben so finden wir $t = \frac{a}{5} : \infty b$, wenn wir die Zirkelspitze vorn in $\frac{1}{5}a$ einsetzen und wieder nach demselben M greifen, kurz jeder Flächenorte von $\frac{a}{\mu} : \infty b$, wenn wir den Zirkel in $\frac{a}{\mu}$ einsetzen, und mit der andern nach M greifen. Ganz in derselben Weise wird Axe b behandelt. Liegen dagegen die Orte zwischen den Axen, so bedarf man im Allgemeinen zweier Coordinatenkreise, wo diese sich schneiden, liegt der gesuchte Punkt. Suche ich den Ort von $o = a' : \frac{b}{2}$, so nehme ich hinten a' in die Zirkelspitze und greife nach M, um den Coordinatenkreis MxM zu ziehen; dann nehme ich $\frac{1}{2}b$ links und rechts und greife nach k, um mit diesem Radius den Fleck o auf jenem Coordinatenkreise bemerklich zu machen. Wie in der obern Projectionsebene der Ort sich durch zwei Linien pag. 156 ergab, so ergibt er sich jetzt durch zwei Kreise. Ist nun schon einer der Zonenkreise in der Figur vorhanden, wie z. B. der Diagonalzonenkreis von P, so kann ich darin die Flächen

$$h = a : \tfrac{3}{4}b,\ n = a : \tfrac{1}{4}b,\ i = a : \tfrac{1}{12}b$$

mit den Punkten $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$ in Axe b sofort finden, wenn ich von hier aus mit dem Zirkel nach k greife und zum Zonenkreise hinbewege, ohne den Kreis zu ziehen. Die praktische Regel ist daher, sich die **Diagonalzonenkreise** durch P, x, y zu ziehen, um darin dann die Orte mit einer Zirkelspitze sofort bestimmen zu können. Von den Diagonalzonen schreitet man wegen des Flächenreichthums zu den **Kantenzonen**: die erste Kantenzone I hat in der Linearprojection den Zonenpunkt a+b, ich darf also nur mit der Axe a um b und mit der Axe b um a Kreise schlagen, wo sie sich schneiden, liegt der Mittelpunkt des gesuchten Zonenkreises TPT. Derselbe tritt dem Mittelpunkte nahe, muß daher sehr flach sein. Hätte man die Figur mit Sectionskreisen oder Sectionslinien nicht, so würde man in dieser Lage keine so flächenreiche Zone TuogPmT vermuthen. Die zweite Kantenzone II hinten mit den Zonenpunkten $\frac{a'}{3} + \frac{b}{3}$ muß aus der Parallelogrammecke mit den Seiten $\frac{a'}{3}$ und $\frac{b}{3}$ ge-

zogen werden, der zugehörige Zonenkreis geht durch T y o n d T. Die dritte Kantenzone III hat vorn die Zonenpunkte $\frac{a}{5} + \frac{b}{5}$, dessen Zonenkreis durch den gleichnamigen Mittelpunkt geht, und die Flächenorte T v s n m t T enthält. Natürlich kann man so fort machen, und zu $\frac{a'}{7} + \frac{b}{7}$, $\frac{a'}{11} + \frac{b}{11}$, $\frac{a}{13} + \frac{b}{13}$ schreiten, deren Zonenkreise alle durch T gehen. Da die Kantenzonen in der Säule T liegen, so müssen die Zonenkreise die Axen unter gleichen Factoren schneiden. Kreis I geht durch P und g, d. h. durch $\alpha : \beta$; Kreis II durch $3\alpha : 3\beta$; Kreis III durch $5\alpha : 5\beta$. Wir haben nun aber noch flächenreiche Zonen, die weder Diagonal- noch Kantenzonen sind, wie die beiden Zonenpunkte 3a' + b auf der Hinterseite, wollen wir diesen suchen, so müssen mit 3a' um b und mit b um 3a' Kreise gezogen werden, deren Durchschnitt den Mittelpunkt des gesuchten Zonenkreises z v o q g n z liefert. Gienge uns die Linearprojection nicht an die Hand, so würde man kaum auf solche Zonenlinien verfallen, so aber darf man auch bei der Kugelprojection nur den Zirkel ergreifen, um die Figur sofort lehrreich zu machen, nicht mit Rechnung, sondern mit Darstellungen, wo die Richtigkeit der einen die der andern controlirt. Mit diesen Mitteln ausgerüstet, kann ohne einen größern Apparat von Formeln und Winkelrechnungen eine genaue Figur hingeworfen werden, die dem beschreibenden Mineralogen genügt.

Figuren mit Flächenorten sind bequemer Weise nicht so überladen, als die mit Sectionskreisen.

Die **Projection** auf die **Medianebene** M = b : ∞a : ∞c tab. 8 fig. 1, welche dem zweiten Blätterbruch entspricht, ist für die beste Wahl der Axen von Wichtigkeit. Nach dem Vorgange von Miller stellt man am bequemsten die Orte auf dieser M dar, wobei Axe b in den Mittelpunkt fällt, und a und c den Projectionskreis schneiden. So ärmlich die Fig. 379 pag. 365 (Brooke-Miller, Elem. Intr. Miner. 1852) auch mit Kreisen ausgestattet sein mag, die Mittelpunktsreihen geben doch in aa' die Säulenzone TMT, in cc' die Diagonalzone von P vorn, und hinten in xx' die Diagonalzone von x, in yy' die Diagonalzone von y an. Von den Zonenkreisen ist nur cuc' wichtig, weil er der ersten Kantenzone P/T entspricht, der zweite aoa' hat keine Bedeutung, und man sieht nicht ein, warum er überhaupt gezogen worden ist. Immerhin lohnt aber das geringe Resultat kaum der Mühe, die Flächenorte einzutragen. Ganz anders wird dagegen die Sache an der Hand der Linearprojection. Weiß gab die rechtwinklichen Näherungsaxen:

$$a : b : c = \sqrt{13} : \sqrt{3 \,.\, 13} : \sqrt{3} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} : 1 : \sqrt{\tfrac{1}{13}}$$
$$= 0{,}592 : 1 : 0{,}277 = 59 : 100 : 28.$$
$$\alpha : \beta : \gamma = \sqrt{\tfrac{1}{13}} : \sqrt{\tfrac{1}{3 \cdot 13}} : \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sqrt{3} : 1 : \sqrt{13}.$$

Herr v. Kokscharow gibt die Naumann'schen schiefen Axen, die wir mit großen lateinischen Buchstaben ABC bezeichnen wollen:

$$A : B : C = 1{,}186 : 1{,}8 : 1 = 66 : 100 : 55.$$

Axenwinkel $A'/C = P/k = 63^0\ 56'\ 46'' \ldots 64^0$.

Wollen wir nun die Flächen auf M projiciren, so steht die Queraxe $b = B = 1$ senkrecht darauf. Wir legen daher das senkrechte Axenkreuz ac auf das Papier, machen $a = 59$ mm und $c = 28$ mm, und haben dann das nöthige Verhältniß. Ziehen wir jetzt im Rechteck cA'a'b die Diagonale $bA' = A' = \sqrt{59^2 + 28^2} = 65$ mm, so wird $tg\ A'bc = \frac{a'}{c} = \frac{28}{59} = 64^0\ 30'$, welche kleinen Abweichungen auf die Figur keinen wesentlichen Einfluß haben. Damit ist das Gerüst vollendet, um dasselbe ausfüllen zu können, müssen wir die Weiß'schen oder Naumann'schen Zeichen durch die Einheit von b legen, dann ergibt sich das eine aus dem andern. Bei Weiß hatten

$$g = b : c : \infty a \text{ und } T = a : b : \infty c,$$

das gibt uns die Axenpunkte von a und c. Bei Naumann haben dagegen dieselben Flächen

$$g = b : A' : \tfrac{1}{2}C \text{ und } T = A' : b : \infty C,$$

daraus folgt, daß wenn bei beiden Krystallographen $b = B$ gesetzt wird, $\frac{1}{2}C = c$ sein muß, während a und A auseinander liegen, aber in ihren Einheiten auch durch T gegeben sind.

Ueber die Lage von Axe b ist man allgemein einig, aber über die Wahl von a gehen die Ansichten auseinander. Man verwarf zwar die alte Weiß'sche Axe c nicht, aber statt der fast senkrechten a supponirte man die gänzlich schiefe A, weil diese zu einfachern Axenausdrücken führt, unbekümmert darum, daß sie pädagogisch die unzweckmäßigste ist. Alles das kann aus dieser Projection unmittelbar abgelesen werden. Aber sie läßt uns noch tiefer hineinschauen, wenn man einmal den Blätterbruch P als Geradendfläche der einfachern Axenausdrücke wegen durchaus nehmen wollte, so hätte man auch noch einen Schritt weiter gehen, und auch Axe c mit der Sectionslinie y vertauschen sollen, die wir mit γ bezeichnen. Damit wären nicht blos noch einfachere Axenausdrücke gewonnen, sondern auch die pädagogischen Schwierigkeiten in etwas gehoben. Denn während bei den meisten Feldspathen $m = A : B : C$ nie gesehen wird, bleiben doch die Säule $T = A : B : \gamma$ und das schiefe Paar $o = A' : B : \gamma$ eine gewöhnliche Erscheinung, man kann sie dem Zuhörer hinhalten und sagen, da ist die Form, wenn es auch nicht so gut geht, wie bei dem schiefen Oblongoktaeder TTPx. Alles das und noch mehr lesen wir ohne Rechnung aus unserer Linearprojection ab. Wir wollen sie daher sofort hinschreiben:

Projectionsebene ist

$$M = b : \infty a : \infty c = B : \infty A : \infty C = B : \infty A : \infty\gamma.$$

Darauf steht:

$$P = a : c : \infty b = C : \infty A : \infty B = \gamma : \infty A : \infty B;$$
$$T = a : b : \infty c = A : B : \infty C = A : B : \gamma;$$
$$k = a : \infty b : \infty c = A : \infty B : \infty C = A : \gamma : \infty B;$$
$$o = b : 2a' : 2c = B : A' : C = B : A' : \gamma;$$
$$n = b : 4a : 4c = B : 2C : \infty A = B : \gamma : \infty A;$$
$$y = a' : 3c : \infty b = A' : 2C : \infty B = A : \infty B : \infty\gamma;$$
$$m = b : \tfrac{2}{3}a : 2c = B : A : C = B : A : \tfrac{1}{3}\gamma;$$
$$z = b : 3a : \infty c = B : 3A : \infty C = B : 3A : 3\gamma;$$
$$g = b : c : \infty a = B : A' : \tfrac{1}{2}C = B : A' : \tfrac{1}{3}\gamma;$$
$$x = a' : c : \infty b = A' : C : \infty B = A' : \gamma : \infty B;$$
$$q = 3a' : c : \infty b = 3A' : 2C : \infty B = 2A' : \gamma : \infty B;$$
$$r = 3a' : 5c : \infty b = 3A' : 4C : \infty B = A' : 2\gamma : \infty B;$$
$$t = a' : 5c : \infty b = A : 2C : \infty B = 2A : \gamma : \infty B;$$
$$h = b : \tfrac{4}{5}a : \tfrac{4}{5}c = B : \tfrac{2}{5}C : \infty A = B : \tfrac{1}{5}\gamma : \infty A;$$
$$i = b : 12a : 12c = B : 6C : \infty A = B : 3\gamma : \infty A;$$
$$s = b : 6a' : 6c = B : 3A' : 3C = B : 3A' : 3\gamma;$$
$$u = b : \tfrac{4}{3}a' : 4c = B : A' : 2C = B : A' : \infty\gamma;$$
$$v = b : \tfrac{8}{3}a' : 8c = B : 2A' : 4C = B : 2A' : \infty\gamma.$$

Die **Zonen** haben hier natürlich eine ganz andere Lage, als in der Projection auf die Endfläche der Säule T/T, doch findet man sich sofort zurecht, sobald man nur zwei beliebige Buchstaben wählt. Die jetzige Centralzone P/y entspricht der **Verticalzone**, welche von vorn nach hinten parallel Axe b geht. Die **Säulenzone** T/T, von Weiß Horizontalzone genannt, kommt im Unendlichen zum Schnitt, weil alle Flächen der Axe c parallel gehen. Auch die **Diagonalzonen** fallen ins Unendliche, denn sie müssen sämmtlich in der Projectionsebene M liegen: die vordere in P hat die Parallelen n n h h i i; die hintere in x hat o o s s und in y hat u u s s zu Parallelen. Erst mit den **Kantenzonen** entwickeln sich die Punkte auf der Figur: die **erste** P/T liegt in den Axenpunkten A und A'; die **zweite** y/T in den Axenpunkten γ und γ'; die **dritte** t/T fällt oben in den hintern Quadranten a'c und vordern ac'. Dann bleibt noch die wichtige Zone n/o, woran außerdem noch vier Flächen z g q v Theil nehmen.

Wollen wir die Sectionslinien auf die Kugel bringen, tab. 8 fig. 2, so haben wir für $\beta = 1 =$ Kreisradius blos $\alpha = \sqrt{3}$ und $\gamma = \sqrt{13}$ zu machen, und ganz gleich, wie bei der Projection auf die Geradendfläche zu verfahren. Wir können auch gleich in der Linearprojection mit dem Radius des Projectionskreises eine Kreislinie um den Mittelpunkt b ziehen, dann geben die Radien der Centralzone in ihren Durchschnitten mit der Kreislinie die Strahlenenden für die zu entwerfende Kreisfigur. Suchen wir gleich die Kreisschnitte der Axe a, so sehen wir c als b

an, dann ist $a = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\alpha$: geht nun unter andern n von b nach 4a, so legen wir diese Linie mit dem Winkelkreuz an, rücken sie in den Mittelpunkt, denken das Auge in c', und projiciren den Schnittpunkt im Projectionskreise auf a, so ist das der Punkt, worin der Sectionskreis n den Axenradius treffen muß. So können wir leicht alle Schnittpunkte der Axe a finden. Ganz so behandeln wir c, indem wir a als Axe b ansehen, und $c = \sqrt{\frac{1}{13}} = \frac{1}{13}\sqrt{13} = \frac{1}{13}\gamma$ setzen. Dann geht n wieder von b nach 4c, diese Linienrichtung durch den Mittelpunkt gelegt, das Auge in a' gedacht und auf c projicirt gibt den Punkt in c. Auf diese Weise haben wir das Axenkreuz eingetheilt, und können fast mit tastendem Zirkel die Sache zu Stande bringen. Denn vergleichen wir die Linear- mit der Kreisfigur, so verläuft alles analog.

Die Pole der Sectionskreise liegen in dem Strahle, welcher senkrecht gegen ihre Sehne im Mittelpunkte errichtet wird. Sie können natürlich ganz in derselben Weise wie vorhin pag. 345 mit Hilfe der Axen ac durch Coordinatenkreise ermittelt werden.

6. Eingliedriges System.

Da dasselbe drei schiefe Axen hat, so wird die Axenrechnung ziemlich unpractisch. Man muß sich daher zur Trigonometrie bequemen. Zum Glück giebt es nicht viele Krystalle, welche darunter fallen. Dennoch habe ich schon früher den Weg gezeigt, wie man auf elementare Weise zum Ziele komme (Beitr. rechn. Kryst. 1848. 19). Nur **eine** Linie, die Säulenkante, bleibt Richtschnur, sie wird als die aufrechte Axe c = 1 genommen. Gegen diese stehen nun die Nebenachsen A und B (zugleich auch noch unter sich) schief. Nehmen wir alle Axenwinkel c/A, c/B, A/B im rechten vordern Oktanten stumpf an, und haben die Flächen den Ausdruck $c : \frac{A}{\mu} : \frac{B}{\nu}$, so dürfen wir wie beim 2+1gliedrigen, in der Axenebene cA nur eine Hilfsaxe a senkrecht gegen c errichten, so wird sie in $\frac{a}{\mu + k}$ geschnitten. Legen wir ebenso in der Ebene cB die Linie y senkrecht gegen c, und nennen das Correctionselement λ, so geht der Ausdruck $\frac{B}{\nu}$ in $\frac{y}{\nu + \lambda}$ über. Jetzt steht die untergeschobene Axenebene ay senkrecht gegen c, aber in dieser Ebene ist y noch schief gegen a. Dieses auszugleichen dient nebenstehende Construction in der gegen c senkrecht stehenden Ebene ay. Der Schnitt $\frac{a}{\mu + k} : \frac{y}{\nu + \lambda}$ muß jetzt auf die gegen a senkrechte b zurückgeführt werden mittelst den Correctionselementen ϱa. Denn wie k und λ

Bruchtheile von c = 1 bildeten, so jetzt ϱ Theile von Axe a, der es parallel geht. Die Gleichung

$$\frac{a}{\mu + k} : \frac{\varrho a}{\nu + \lambda} = \frac{b}{x} : \frac{b}{\nu + \lambda} - \frac{b}{x}, \text{ oder}$$

$$\frac{a}{\mu + k} + \frac{\varrho a}{\nu + \lambda} : \frac{b}{\nu + \lambda} = \frac{a}{\mu + k} : \frac{b}{x}, \text{ gibt}$$

$$\frac{b}{x} = \frac{ab}{a(\nu + \lambda) + \varrho a(\mu + k)} = \frac{b}{(\nu + \lambda) + \varrho(\mu + k)}, \text{ d. h. es ist}$$

$$c : \frac{A}{\mu} : \frac{B}{\nu} = c : \frac{a}{\mu \pm k} : \frac{b}{(\nu \pm \lambda) \pm (\mu \pm k)\varrho}.$$

Für $k = \lambda = \varrho = 0$ geht die Ebene in $c : \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ über.

Kennen wir für c = 1 die beiden Axen A,B und die drei Winkel c/A, c/B und Axenebene cA gegen cB, so sind damit die Winkel α zwischen aA, β zwischen yB, und γ zwischen yb gegeben. Ferner ist

$$k = A \,.\, \sin\alpha, \quad a = A \,.\, \cos\alpha;$$
$$\lambda = B \,.\, \sin\beta, \quad y = B \,.\, \cos\beta;$$
$$\varrho a = y \,.\, \sin\gamma, \quad b = y \,.\, \cos\gamma.$$

Der Flächenausdruck, bezogen auf die rechtwinklichen Axen, ist damit bekannt, und wir können die Werthe aller deducirten Ebenen, die ja nur von μ und ν abhängen, finden, ja wir können uns sogar noch eine Erleichterung verschaffen, wenn wir an das **reguläre System** wieder anknüpfend unter $\frac{1}{\mu} : \frac{1}{\nu}$ gleich den Axenwerth mit einbegreifen. Wir bekommen dann zwar irrationale Zahlen, dürfen uns dafür aber der einfachern Formeln des regulären Systems bedienen. Haben wir z. B. beim Albit den Winkel der Flächen

$$P = A : \infty B = \frac{1}{0{,}50022} : \frac{1}{0{,}070728} = \frac{1}{\mu} : \frac{1}{\nu},$$

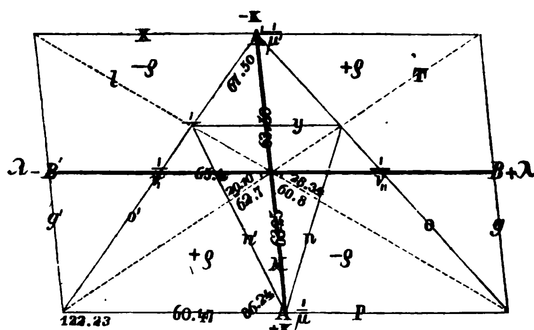
$$o = A' : \tfrac{1}{2}B = \frac{1}{0{,}491399} : \frac{1}{0{,}453933} = \frac{1}{\mu,} : \frac{1}{\nu,},$$

zu bestimmen, so dürfen wir blos in der Cosinusformel des Regulärsystems pag. 221 $\mu, \nu, -\mu$ und $-\nu$ setzen, so kommt

$$-\cos = (1 - \mu\mu, - \nu\nu,) : \sqrt{1 + \mu^2 + \nu^2}\,\sqrt{1 + \mu,^2 + \nu,^2},$$

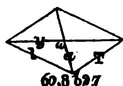
o/P = 122° 23'. Legten wir nur die beiden ersten Stellen zu Grunde, so kämen wir schon dem Winkel bis auf 10 Minuten nahe. Die Tangentenformel wird dadurch etwas unpraktischer, daß häufig erst der Zonenpunkt einer besondern Rechnung bedarf. Kenne ich aber den Zonenpunkt, dann wird die Rechnung auch nicht viel weitläufiger. Aber Halbirungen der Winkel durch die Mittelpunktsebene fallen dabei ganz weg. Als

Beispiel habe ich schon früher den **Albit** nach den alten Messungen von G. Rose (Gilberts Annal. 1823 Bd. 73 pag. 186) durchgeführt. Aus-



gehend von den gemessenen fünf Winkeln 1) P/l = 69.9; 2) P/M = 86.24; 3) M/l = 60.8; 4) M/T = 62.7; 5) P/o = 122.23. Auf die schiefen Axen cAB bezogen bekommen die Flächen ganz den gleichen Ausdruck, wie die analogen des Feldspathes. Wir suchen nun diese Axen und ihre Winkel, zu gleicher Zeit aber auch ein b, welches gegen Axenebene Ac (M) rechtwinklich steht, und ein a und c, welche in M gegeneinander, folglich auch gegen b rechtwinklich sind.

Lassen wir Axe c = 1, welche der Säulenkante T/l parallel geht, unverändert, so liegen Axen a und y in einer gegen c senkrecht gedachten Ebene, worin T/a = 62.7 und l/a = 60.8, daraus folgt schon, daß y/a links stumpf ist. Nebenstehender Querschnitt der Säule macht das klar, denn bei der Entwickelung der Säulen aus ihrer Projectionslage schlagen die Winkel in der gezeichneten Weise um. Nach der Basalformel pag. 89 ist



$$\text{Winkel a/y} \ldots \operatorname{tg} \omega = \frac{2 \,.\, \sin 60\,.\,8 \,.\, \sin 62\,.\,7}{\sin (62\,.\,7 - 60\,.\,8)} = 88.42.24, \text{ und}$$

$$a = \frac{\sin 31\,.\,10}{\sin 60\,.\,8}\, y.$$

Jetzt finden wir im schiefwinklichen körperlichen Dreiecke PMl die Seite M = 63 . 25. Damit läßt sich im Dreiecke PMT die Seite P = 60 . 47 bestimmen, und suchen wir nun noch im Dreiecke PMo' den Winkel M/o' = 67 . 50 und die Seite M = 127 . 15, so ergibt sich hinten im Dreiecke yMo' die Seite M = 127 . 15 — 63 . 25 = 63 . 50. Auf diese Weise gelangen wir zur Neigung der Diagonalen von P und x gegen Axe c: vorn 63 . 25, hinten 63 . 50, daher muß der stumpfe Winkel A/c vorn liegen. Nach der Basalformel

$$\operatorname{tg} A/c = \frac{2 \,.\, \sin 63\,.\,25 \,.\, \sin 63\,.\,50}{\sin 0^0\, 25'} = 89\,.\,45.$$

Die schiefe Axe A neigt sich auf der Vorderseite 90° 15' hinab, weicht

also nur ein Viertelgrad vom rechten Winkel ab. Im Dreiecke B'Mo' findet sich die Seite B' = 65 . 4.

Vorstehende fünf durch Triangulation gefundene Winkel:

88 . 42, 63 . 25, 63 . 15, 89 . 45, 65 . 4,

reichen zur Bestimmung der Elemente rechtwinklicher Axen hin.

Im Aufrisse Ac war der Axenwinkel vorn 90 . 15, A : c gegen Axe c 63 . 25, folglich der dritte Winkel im ebenen Dreiecke 26 . 20. Das gibt

$$A = \frac{\sin 63 . 25}{\sin 26 . 20}, \; a = A . \cos 15', \; k = A . \sin 15'.$$

Im Aufrisse Bc handelt es sich zunächst darum, wohin sich die Hilfsaxe y neige. Es folgt das aus nebenstehenden Winkeleinzeichnungen, die der Projectionsfigur correspondiren. Da der Winkel P/M rechts stumpf ist, 93° 36' beträgt, so muß sich die Doppelschiefendfläche mit ihrer Queraxe B auch dorthin neigen. Da wir nun den Winkel 65 . 4 kennen, welchen die Seite o' = A' : ½B' : c macht, so schneidet sie die Hilfsaxe y in $\frac{y}{2 - \lambda} = \text{tg } 65 . 4$.

Da nun $y = \frac{a . \sin 60 . 8}{\sin 31 . 10}$ war, so folgt

$$\lambda = 2 - \frac{y}{\text{tg } 65 . 4}, \quad \text{tg } \beta = \frac{\lambda}{y}, \quad B' = B = \frac{\lambda}{\sin \beta}.$$

In der gegen c senkrechten Ebene yb ist Winkel $\gamma = 1^0\ 17'\ 36''$, folglich

$$b = y . \cos \gamma, \; \varrho a = y . \sin \gamma, \; \varrho = \frac{y . \sin \gamma}{a}.$$

Das gibt folgende Axenelemente für c = 1:

A = 2,01691; B = 3,66968; a = 2,01689; b = 3,65594.
k = 0,008898; λ = 0,299867; ϱ = 0,040924.

Winkel A/a=α=0° 15' 10''; B/y=β=4° 41' 16''; y/b=γ=1° 17' 36''.

In der körperlichen Ecke der drei aufeinander schiefen Axenebenen ist im vordern rechten Oktanten der

Winkel in c=88° 42' 24''; in B=90° 8' 47''; in A=94° 41'.
Seite A/c=90° 15' 10''; B/c=94° 41' 16''; A/B=88° 41' 25''.

Damit lassen sich am **Albit** alle Flächen, deren μ und ν durch Deduction gegeben ist, außer der Reihe berechnen und bestimmen. In den **beiden vordern** Quadranten gilt μ + k, d. h. in A das + k, in A' das — k; in den **beiden rechten** ν + λ, d. h. in B das + λ, in B' das — λ; im vordern rechten und hintern linken Quadranten gilt dagegen — ϱ, weil der Winkel A/B und A'/B' scharf ist. Die Flächen auf rechtwinkliche Axen abc bezogen, bekommen daher folgende Ausdrücke:

$$P = A : \frac{B}{0} = \frac{a}{1 + k} : \frac{b}{(0 \pm \lambda) \mp \varrho(1 + k)}$$

$$x = A' : \frac{B}{0} = \frac{a'}{1 - k} : \frac{b}{(0 \pm \lambda) \pm \varrho(1 - k)}$$

$$T = 0A : 0B = \frac{0 \,.\, a}{1 \pm k} : \frac{0 \,.\, b}{(1 \pm \lambda) - \varrho(1 \pm k)}$$

$$l = 0A : 0B' = \frac{0 \,.\, a}{1 \pm k} : \frac{0 \,.\, b'}{(1 \mp \lambda) + \varrho(1 \pm k)}$$

$$M = A : 0B = a : 0b$$

$$o' = A' : \frac{B'}{2} = \frac{a'}{1 - k} : \frac{b'}{(2 - \lambda) - \varrho(1 - k)}$$

$$o = A' : \frac{B}{2} = \frac{a'}{1 - k} : \frac{b}{(2 + \lambda) + \varrho(1 - k)}$$

$$n' = A : \frac{B'}{4} = \frac{a}{1 + k} : \frac{b}{(4 - \lambda) + \varrho(1 + k)}$$

$$n = A : \frac{B}{4} = \frac{a}{1 + k} : \frac{b}{(4 + \lambda) - \varrho(1 + k)}$$

$$y = \frac{A'}{3} : \frac{B}{0} = \frac{a'}{3 - k} : \frac{b}{(0 \pm \lambda) \pm \varrho(3 - k)}$$

$$g = \frac{A}{0} : B = \frac{a}{0 \pm k} : \frac{b}{(1 + \lambda) \mp \varrho(0 \pm k)}$$

$$g' = \frac{A}{0} : B' = \frac{a}{0 \pm k} : \frac{b'}{(1 - \lambda) \pm \varrho(0 \pm k)}.$$

Die Zweideutigkeit der Zeichen bei Flächen, die einer schiefen Axe parallel gehen, kommt daher, daß man im Allgemeinen nicht weiß, wo z. B.

$$P = \frac{a}{1 + k} : \frac{b}{\pm \lambda \mp \varrho(1 + k)}$$

schneidet, ob in b oder b′, allein das ergibt sich aus dem Divisor: gälte das untere Zeichen $-\lambda + \varrho(1 + k)$, so wäre der Ausdruck negativ, da $-\lambda$ größer ist als $+\varrho(1+k)$, daher ist das obere $+\lambda - \varrho(1+k)$ zu wählen, welches den Schnitt auf der rechten Seite in b bedingt. Wollen wir nun P auf die Form $\frac{1}{\mu} : \frac{1}{\nu}$ bringen, so ist

$$\mu = \frac{1 + k}{a} = 0{,}500223 \text{ und } \nu = \frac{\lambda - \varrho(1 + k)}{b} = 0{,}070728, \text{ d. h.}$$

$$P = \frac{1}{\mu} : \frac{1}{\nu} = \frac{1}{0{,}500223} : \frac{1}{0{,}070728}.$$

Für $o' = \frac{a'}{1 - k} : \frac{b'}{(2 - \lambda) - \varrho(1 - k)}$ ist $\mu_, = 0{,}491399$ und $\nu_, = 0{,}453933$.

Für $o = \frac{1}{\mu_,} : \frac{1}{\nu_{,,}}$ ist $\nu_{,,} = \frac{(2 + \lambda) + \varrho(1 - k)}{b} = 0{,}640177.$

So könnte man nun mit allen fortmachen. Allein die fünf Werthe $\mu\,\mu_,\,\nu\,\nu_,\,\nu_{,,}$ reichen schon zu einer selbstständigen Entwickelung hin. Denn Fläche l liegt im Zonenpunkte P . o und im Mittelpunkte, hat daher nach pag. 199

$$l = \frac{0}{\mu + \mu_,} : \frac{0}{\nu_{,,} - \nu} = \frac{0}{0{,}991622} : \frac{0}{0{,}569448};$$

$$T = \frac{0}{\mu + \mu_,} : \frac{0}{\nu + \nu_,} = \frac{0}{0{,}991622} : \frac{0}{0{,}524662},$$

denn man darf in Formel l nur $\nu_{,,} = \nu_,$ und $\nu = -\nu$ setzen, um sogleich die Formel T zu haben.

$$y \text{ in } T . o \text{ und } l . o = \frac{1}{2\mu_, + \mu} : -\frac{1}{\nu + \nu_, - \nu_{,,}} = \frac{1}{1{,}483021} : +\frac{1}{0{,}115515}$$

$$n \text{ in } M . P \text{ und } T . o = \frac{1}{\mu} : \frac{1}{\nu_{,,} + \nu_, + \nu} = \frac{1}{0{,}500223} : \frac{1}{1{,}164839}$$

$$n' \text{ in } M . P \text{ und } o'l = \frac{1}{\mu} : \frac{1}{\nu_{,,} + \nu_, - \nu} = \frac{1}{0{,}500223} : \frac{1}{1{,}023382}$$

$$x = \frac{1}{\mu_,} : \frac{2}{\nu_{,,} - \nu_,} \text{ (rechts)}; \; g' = \frac{2}{\mu - \mu_,} : \frac{2}{\nu_{,,} + \nu} \text{ und } g = \frac{2}{\mu - \mu_,} : \frac{2}{\nu_, - \nu}$$

schneiden vorn.

$$z' = \frac{0}{\mu + \mu_,} : \frac{0}{2\nu_{,,} + \nu_, - \nu} \text{ und } z = \frac{0}{\mu + \mu_,} : \frac{0}{\nu_{,,} + 2\nu_, + \nu}.$$

Setzen wir blos die Nenner hin, und das Axenzeichen dazu, um anzudeuten, auf welcher Seite der Schnitt liegt, so gelangen wir zu folgenden Zahlen:

$P = 0{,}5002\ a : 0{,}0707\ b;$
$x = 0{,}4914\ a' : 0{,}09312\ b;$
$T = 0{,}99162\ a : 0{,}52466\ b : \infty c;$
$l = 0{,}99162\ a : 0{,}569448\ b' : \infty c;$
$z = 0{,}99162\ a : 1{,}61877\ b : \infty c;$
$z' = 0{,}99162\ a : 1{,}66350\ b' : \infty c;$
$o = 0{,}491399\ a' : 0{,}640177\ b;$
$o' = 0{,}491399\ a' : 0{,}453933\ b';$
$n = 0{,}500223\ a : 1{,}164839\ b;$
$n' = 0{,}500223\ a : 1{,}023382;$
$g = 0{,}004412\ a : 0{,}355452\ b;$
$g' = 0{,}004412\ a : 0{,}191602\ b'.$

Die Schnitte der Axe a sind den paarigen Flächen gemeinsam, dagegen in b links von rechts verschieden. Wir können daher die Graßmann'sche Formel pag. 61 nicht unmittelbar anwenden, sondern müssen zur Wurzelformel pag. 221 greifen. Wollen wir z. B. n/o berechnen, so ist für

$n \ldots \mu = 0{,}5 \ldots, \; \nu = 1{,}16 \ldots$
$o \ldots \mu_, = -0{,}49 \ldots, \; \nu_, = 0{,}45 \ldots$ gibt

$$-\cos = 1 - 0{,}5 . 0{,}49 + 1{,}16 . 0{,}45 : \sqrt{1 + 0{,}5^2 + 1{,}16^2}\ \sqrt{1 + 0{,}49^2 + 0{,}45^2}.$$

M ist die einzige Fläche, welche bei schief- wie rechtwinklichen Axen ihren gleichen Ausdruck ∞a : b : ∞c behält. Das erleichtert die Rechnung für die medianen Winkel, denn für M/o' ist $tg = \sqrt{1 + \mu,^2} : \nu,$, gibt 67 . 50. So wird der geschickte Rechner bald allerlei kleine Vortheile herausfinden.

Wo die Krystallographen aufhören, da fangen die Mathematiker mit ihren Rechnungen an. Daß sie für schiefe Axen auf bequemere Wege kommen werden, daran ist kein Zweifel, bis jetzt blieben die Rechnungen immerhin noch mühselig genug, man darf nur die Formeln ansehen, wie sie Schrauf (Lehrbuch Krystallographie 1866 Bd. I pag. 108) entwickelt hat. Dr. Junghann in Perleberg (Ztschrift für Mathemat. und Phys. von Schlömilch 1872 XVII pag. 444) glaubt dagegen mit dem „Principe der Tetraedrometrie" die Aufgabe leichter lösen zu können, als mittelst analytischer Geometrie oder sphärischer Trigonometrie. Doch setzt das eine nicht gewöhnliche Vertrautheit mit den Fortschritten der neuern Geometrie voraus, die man bei Mineralogen im Allgemeinen wohl nicht findet. Ich ziehe daher immer den beschaulichern Weg vor. Wenn man sich die Sache gehörig zurecht legt, so scheint mir jene Substitution rechtwinklicher Axen, wobei man die Formeln des regulären Systems anwenden kann, diejenige zu sein, welche dem Nichtmathematiker am leichtesten einleuchtend gemacht werden kann. Man braucht dabei nicht einmal auf obige $k\lambda\varrho$ sich zu stützen, sondern kann mit Hilfe unserer Projection die Sache auf dem aller elementarsten Wege auf nachstehende Weise zu Stande bringen.

Man fällt vom Endpunkte der aufrechten schiefen Axe c ein Perpendikel cQ=C auf die Projectionsebene, und zieht durch Q die zwei rechtwinklichen Axen AB dergestalt, daß eine davon den schiefen ab respective parallel geht. Zur parallelen wählt man von beiden am vortheilhaftesten die Zonenreichere. Ich will zum Schluß am

Anorthit tab. 3 fig. 7 die Ausführung andeuten, und mich dabei auf die Messungen des Herrn v. Rath (Pogg. Ann. 1872 Bd. 147 pag. 22) beziehen. Derselbe fand

a : b : c = 1 : 1,57548 : 0,86663
α = b/c = 93 . 13 . 22; 94 . 10 in Axe a,
β = a/c = 115 . 55 . 30; 116 . 3 . . . . . . b,
γ = a/b = 91 . 11 . 40; 92 . 54 . . . . . . c.

Sämmtliche stumpfe Winkel liegen in dem von der blättrigen Säulenfläche T begrenzten Quadranten, auf die stumpfe Kante gesehen gehört er also nach der Bestimmung von pag. 48 zu den „**jenseitigen**". Das Perpendikel C vom Ende der Axe c auf die Projectionsebene P gefällt muß daher seinen Fußpunkt Q im hintern gegenüberliegenden Quadranten haben, worin mit Ausnahme von γ und c alle Axenwinkel scharf sind. Nennen wir nun die **rechtwinklichen** durch Q gelegten Axen mit großen lateinischen Buchstaben ABC, und legen A der a parallel, so handelt

es sich zunächst um die Schnitte, welche die schiefen Axen a und b an den rechtwinklichen AB machen. Verbinden wir das Centrum c der schiefen mit dem Centrum Q der rechtwinklichen Axen durch die Linie z, so steht die Ebene cCz senkrecht auf P; und heißt der Neigungswinkel, welchen die schiefe Axe c mit der Projectionsebene P macht, ϱ, so können wir in den beiden rechtwinklichen körperlichen Dreiecken des Oktanten bca' mit Leichtigkeit γ_0 γ, ϱ bestimmen. Denn es ist

$$\sin \varrho = \sin \beta \cdot \sin a = \sin \alpha \cdot \sin b \ldots . 63^0\ 45'\ 55''.$$

Da im Aufriß QcC bei Q ein rechter Winkel ist, so wird

$$C = c \cdot \sin \varrho = 0{,}77736,\ lC = 9{,}8906214$$
$$z = c \cdot \cos \varrho = 0{,}38309,\ lz = 9{,}5833089$$
$$\cos \gamma, = \frac{\cos \alpha}{\cos \varrho} \ldots 82^0\ 41'\ 1'' \text{ und } \cos \gamma_0 = \frac{\cos \beta}{\cos \varrho} \ldots . 8^0\ 30'.$$
$$y = z \cdot \sin \gamma_0 \ldots 0{,}05665 \ldots . ly = 8{,}7531952$$
$$x = z \cdot \frac{\sin \gamma,}{\sin \gamma} \ldots 0{,}38006 \ldots . lx = 9{,}5798526.$$

Bezeichnen wir den Schnitt, welchen eine Sectionslinie mit den rechtwinklichen Axen macht, durch ein Anhängsel, so ist B'_k der Punkt, in welchem $k = a : \infty b : \infty c$ die Axe B' schneidet.

$$B'_k = x \cdot \operatorname{tg} \gamma = 18{,}2173,\ lB'_k = 11{,}2607463.$$

Jetzt haben wir die beiden Linien M und k auf die neuen Axen zurückgeführt. Wollen wir nun ihren Winkel mittelst der regulären Formel ausrechnen, so müssen wir sie auf die Bruchformen $\frac{1}{\mu} : \frac{1}{\nu}$ 2c. bringen. Es verhält sich für

$$M \ldots C : B' : A = 0{,}77736 : 0{,}05665 : \infty = 1 : 0{,}07287 : \infty$$
$$k \ \ldots C : B' : A = 0{,}77736 : 18{,}2173 : 0{,}38006$$
$$= 1 : 23{,}449 : 0{,}4889.$$

Um die reciproken Werthe zu erhalten, darf ich die Logarithmen nur von 0 abziehen, so kommt für

$$M \ldots \frac{1}{\mu} : \frac{1}{\nu} = \frac{1}{0} : \frac{1}{13{,}722},$$
$$k \ldots \frac{1}{\mu,} : \frac{1}{\nu,} = \frac{1}{2{,}0453} : \frac{1}{0{,}0426}.$$

Setzen wir nun $\mu\ \nu\ \mu,\ \nu,$ in die Formel des regulären Systems

$$\cos = (1 + \mu\mu, + \nu\nu,) : \sqrt{1 + \mu^2 + \nu^2}\ \sqrt{1 + \mu,^2 + \nu,^2},$$

so kommt M/k = Axenebenen=Winkel c = 92° 54'. Damit ist dann zu gleicher Zeit die Probe für die Richtigkeit der neuen Axenelemente geliefert. Die weitern Rechnungen gehen alle höchst einfach mit ebener Geometrie vor sich, die man leichter in der Gewalt hat, als die sphärische.

Zum m = a : b und m, = a : b' schreitend machen wir von der Vierzonenkörper=Rechnung Gebrauch. In dem Vierzonenkörper Mmm,k suchen wir die Winkel M/m = φ und M/m, = $\varphi,$, wobei die Seiten

$a = 1$, $b = 1{,}57548$ und $\gamma = 88.48.20$ gegeben sind. Im Dreiecke mit dem scharfen Winkel γ ist

$$b : \sin\varphi = a : \sin[180^0 - (\gamma + \varphi)] = a : \sin(\gamma + \varphi)$$
$$a . \sin\varphi = b(\sin\gamma . \cos\varphi + \cos\gamma . \sin\varphi),$$
$$a = b \sin\gamma \operatorname{ctg}\varphi + b\cos\gamma,\ a = 1$$
$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 - b . \cos\gamma}{b . \sin\gamma}, \text{ folglich } \operatorname{ctg}\varphi_{,} = \frac{1 + b . \cos\gamma}{b . \sin\gamma},$$

denn φ muß größer sein als $\varphi_{,}$. Hätten wir den Winkel ω bei b gesucht, so wäre

$$\operatorname{ctg}\omega = \frac{b - \cos\gamma}{\sin\gamma}, \text{ folglich } \operatorname{ctg}\omega_{,} = \frac{b + \cos\gamma}{\sin\gamma},$$

etwas einfacher; auch hier muß der Winkel ω im scharfen γ größer sein, als $\omega_{,}$ im stumpfen. Wir können daher allgemein unbekümmert um $\varphi_{,}$ und $\omega_{,}$ schreiben:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 \mp b . \cos\gamma}{b . \sin\gamma}, \varphi = 32 . 44 . 41, \varphi_{,} = 32 . \ 3 . 33$$
$$\operatorname{ctg}\omega = \frac{b \mp \cos\gamma}{\sin\gamma}, \omega = 58 . 26 . 58, \omega_{,} = 56 . 44 . 47$$
$$\varphi + \varphi_{,} + \omega + \omega_{,} = 179 . 59 . 59 = 180^0.$$

Diese Winkel genügen zu einer ganzen Reihe von Flächenbestimmungen, wenn wir dazu die Mittelpunktdistanz

$$p = \sqrt{z^2 - y^2} = y . \operatorname{ctg}\gamma_0 = 0{,}378886$$

nehmen. Denn es verhält sich

$$B_m + y : \sin\varphi = 1 + p : \cos\varphi,\ B_m = (1 + p) \operatorname{tg}\varphi - y;$$
$$A_m : \cos\varphi = B_m : \sin\varphi \ \ldots\ldots\ldots\ A_m = B_m . \operatorname{ctg}\varphi.$$

Ganz auf dieselbe Weise findet sich:

$$B_{m,} = (1 + p) \operatorname{tg}\varphi_{,} + y \text{ und } A_{m,} = B_{m,} \operatorname{ctg}\varphi_{,}.$$
$$B_o = (1 - p) \operatorname{tg}\varphi_{,} - y \text{ und } A_o = B_o \operatorname{ctg}\varphi_{,}.$$
$$B_{o,} = (1 - p) \operatorname{tg}\varphi + y \text{ und } A_{o,} = B_{o,}^{!} \operatorname{ctg}\varphi.$$
$$B_T + y : \sin\varphi = p : \cos\varphi,\ B_T = p \operatorname{ctg}\varphi - y \text{ und } A_T = B_T . \operatorname{ctg} . \varphi.$$
$$B_1 = p \operatorname{ctg}\varphi_{,} + y \text{ und } A_1 = B_1 . \operatorname{ctg}\varphi_{,}.$$

Die Verticalzonen $x = a' : c : \infty b$, $y = \frac{1}{2}a' : c : \infty b$, $t = \frac{1}{2}a : c : \infty b$ kann man ablesen, da die Axe A der a parallel geht.

Fläche $x = 1 - A_k$, $y = \frac{1}{2} - A_k$, $t = \frac{1}{2} + A_k$,

$A_k = x$, doch darf man dieses x nicht mit der Sectionslinie x verwechseln.

Für Fläche $n = \frac{1}{2}b : c : \infty a$ muß man die Sectionslinie k zu Hilfe nehmen, so findet sich

$$B_n = \sin\gamma\left(\frac{b}{2} + \frac{p}{\cos\gamma}\right) - B_k.$$

Dann lassen sich aber auch alle Flächen der Diagonalzone von P desto leichter bestimmen. Denn die Sectionslinie M halbirt das Axenstück

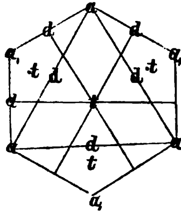
zwischen B_n und $B_{n''}$, daher ist $B_n + y = B_{n'} - y$ oder $B_{n'} = B_n + 2y$. Hätten wir nun eine Fläche $r = \frac{1}{6}b : c : \infty a$ zu suchen, so würde ihre Sectionslinie $B_n + y$ dritteln, wir haben also

$$\frac{B_n + y}{3} = B_r + y \text{ oder } B_r = \frac{B_n - 2y}{3}.$$

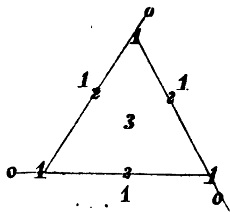
So geht die Sache fort.

Anwendung der Kantenzonenschnitte.

Das oben entwickelte Kantenzonengesetz pag. 191 findet besonders im regulären Systeme eine sehr vortheilhafte Anwendung, wie das schon Weiß (Abh. Berl. Akad. 1818 pag. 270) darthat. Wir machen uns das an nebenstehendem von der Fläche her gezeichnetem Oktaeder klar: in den Ecken aaa liegen die Hauptaxen, die ihr Gegenende in a'a'a' haben; die Trigonalaxen tttt treffen den Schwerpunkt der Flächen; die Digonalaxen dddddd gehen durch die Mittelpunkte der Kanten. Dieß vorausgeschickt, werden die nebenstehenden Bezeichnungen leicht verstanden.

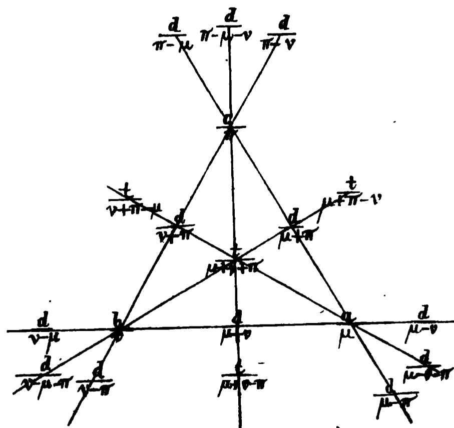


1. Oktaeder

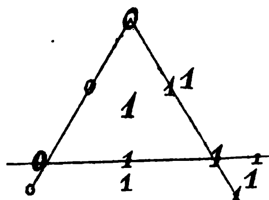


$$111 = a : a : a$$
$$3111 = \tfrac{1}{3}t : t : t : t$$
$$222000 = \tfrac{1}{2}d : \tfrac{1}{2}d : \tfrac{1}{2}d : \infty d : \infty d : \infty d.$$

Der Kürze wegen sind die Axenausdrücke auf reine Bruchform gebracht, und die Nenner hingesetzt. Die Einheit gibt der Würfel, dessen Axen sich $a : d : t = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ verhalten. Im Centrum der obern Fläche wird d in $\frac{1}{3}$ geschnitten, weil $1 + 1 + 1 = 3$ ist; die digonale Axe in $\frac{1}{2}$, weil $1 + 1 = 2$ ist, oder allgemein, wie im nachfolgenden Weiß'schen Schema, das der Erklärung weiter nicht bedarf. Der Schnitt trifft allemal da die Axe, wo die Zahl positiv wird.



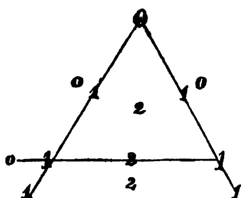
2. **Würfel**



$100 = a : \infty a : \infty a;$
$1111 = t : t : t : t;$
$111100 = d : d : d : d : \infty d : \infty d.$

Die Hauptaxen treffen die Mittelpunkte der Flächen; die digonalen die Mitte der Kanten; die trigonalen laufen von Ecke zur Gegenecke.

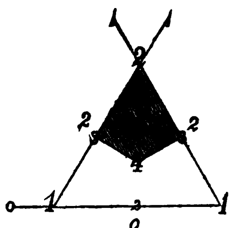
3. **Granatoeder**



$110 = a : a : \infty a;$
$2200 = \frac{1}{2}t : \frac{1}{2}t : \infty t : \infty t;$
$211110 = \frac{1}{2}d : d : d : d : d : \infty d.$

Um sich die Sache klar zu machen, zeichne man das Oktaeder in das Granatoeder ein. Die Hauptaxen verbinden die vierkantigen, die trigonalen die dreikantigen Ecken. Die digonalen gehen durch die Mittelpunkte der Flächen.

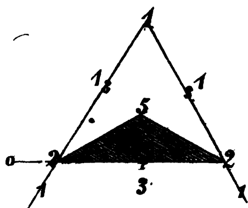
4. **Leucitoeder**



$112 = a : a : \frac{1}{2}a = 2a : 2a : a.$
$4220 = \frac{1}{4}t : \frac{1}{2}t : \frac{1}{2}t : \infty t = \frac{1}{2}t : t : t : \infty t.$
$332110 = \frac{1}{3}d : \frac{1}{3}d : \frac{1}{2}d : d : d : \infty d$
$= \frac{2}{3}d : \frac{2}{3}d : d : 2d : 2d : \infty d.$

Die Hauptaxen gehen durch die vierkantigen, die trigonalen durch die dreikantigen, die digonalen durch die 2 + 2kantigen Ecken. Da jede Fläche stets an der kürzesten Axe zum Schnitt kommt, aber die Hauptaxe als Einheit genommen wird, so muß man die Ausdrücke mit 2 multipliciren. Man sieht dann, daß $\frac{1}{2}t$ mit $\frac{1}{2}t$ am Granatoeder zusammenfällt.

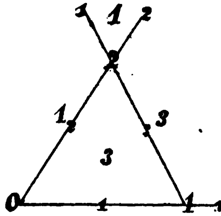
5. **Pyramidenoktaeder**

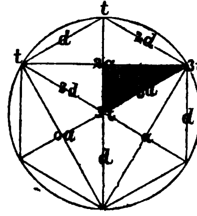


$221 = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : 1 = a : a : 2a.$
$5311 = \frac{1}{5}t : \frac{1}{3}t : t : t = \frac{2}{5}t : \frac{2}{3}t : 2t : 2t.$
$433110 = \frac{1}{4}d : \frac{1}{3}d : \frac{1}{3}d : d : d : \infty d$
$= \frac{1}{2}d : \frac{2}{3}d : \frac{2}{3}d : 2d : 2d : \infty d.$

Das kleinste Ende des Schnittes liegt hier in $22 = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$, daher muß wieder mit 2 multiplicirt werden, damit die richtige Einheit herauskommt. Die trigonalen Axen gehen durch die dreikantigen Ecken, die digonalen durch die Mitte der Oktaederkante.

6. **Pyramidenwürfel**

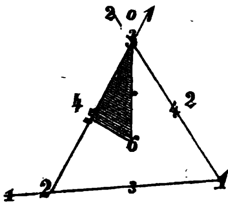




$$210 = \tfrac{1}{2}a : a : \infty a = a : 2a : \infty a;$$
$$3311 = \tfrac{1}{3}t : \tfrac{1}{3}t : t : t = \tfrac{2}{3}t : \tfrac{2}{3}t : 2t : 2t;$$
$$322111 = \tfrac{1}{3}d : \tfrac{1}{2}d : \tfrac{1}{2}d : d : d : d = \tfrac{2}{3}d : d : d : 2d : 2d : 2d.$$

Wem die Sache für die Vorstellung schwer wird, der darf sich nur in einen Kreis schnell nebenstehende Linien eintragen, welche den Pyramidenwürfel in seiner dreigliedrigen Stellung mit einer trigonalen Axe in der Mitte darstellen. Kommt die gestreifte Fläche 210 zum Schnitt, so erzeugt sie die eingeschriebenen Ausdrücke.

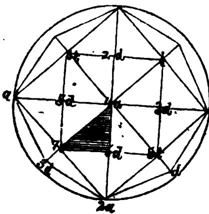
7. **Pyramidengranatoeder**



$$123 = a : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}a = 3a : \tfrac{3}{2}a : a;$$
$$6420 = \tfrac{1}{6}t : \tfrac{1}{4}t : \tfrac{1}{2}t : \infty t = \tfrac{1}{2}t : \tfrac{3}{4}t : \tfrac{3}{2}t : \infty t;$$
$$543211 = \tfrac{1}{5}d : \tfrac{1}{4}d : \tfrac{1}{3}d : \tfrac{1}{2}d : d : d$$
$$= \tfrac{3}{5}d : \tfrac{3}{4}d : d : \tfrac{3}{2}d : 3d : 3d.$$

Schon die kleine Andeutung der Fläche genügt, um das Verständniß zu erleichtern. Hier muß der Ausdruck mit 3 multiplicirt werden, um das richtige Verhältniß zu geben. Immer die kleinste Zahl in der Hauptaxe gibt den Maßstab. Daher ist bei dem

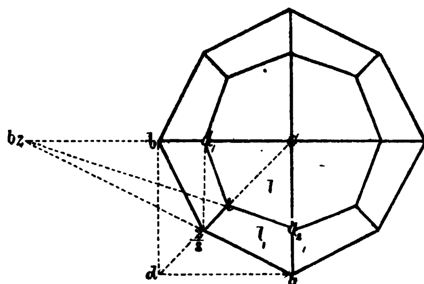
Achtundvierzigflächner $124 = a : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{4}a$ die 4 Multiplicator. Die kleinste Zeichnung in dem Kreis genügt, um sich das sofort vor Augen zu legen. Das Maximum der Zahl ist natürlich $\mu + \nu + \pi = 1 + 2 + 4 = 7$. Das Pyramidengranatoeder 123 bringt es daher zu 6, der Pyramidenwürfel 122 zu 5, das Leucitoeder 112 zu 4, das Oktaeder 111 zu 3. Würfel kann blos $1 + 0 + 0 = 1$ und Granatoeder $1 + 1 + 0 = 2$ haben.



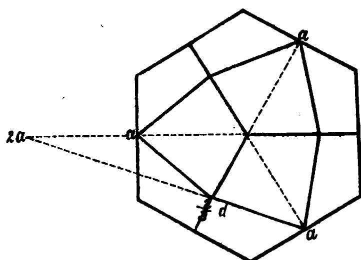
Die **Zeichnung** der Krystalle macht zwar einige mechanische Schwierigkeit, allein mit den Resultanten und den Projectionen vertraut kommen wir leicht zu Stande. Man denkt sich dabei das Auge im Unendlichen, d. h. fällt Perpendikel von den Ecken auf die Zeichnungsebene. Ich will die Sache am

Leucitoeder $112 = a : a : \tfrac{1}{2}a$ klar machen.

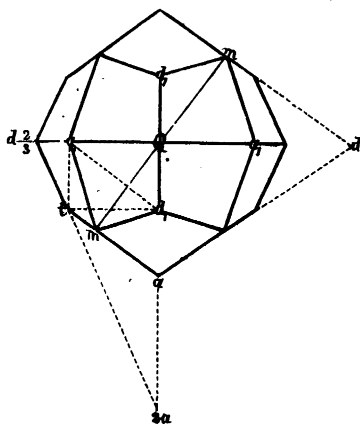
1. Auf die **Würfelfläche** zeichnet man das Axenkreuz $a = b$, dann fällt c in den Mittelpunkt. Die Resultante d der Axen ab wird von $a : 2b$ in $\frac{2}{3}$ geschnitten. Denn zwischen a und $2b = \frac{b}{(\frac{1}{2})}$ liegt $\frac{d}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}d$. Damit ist das äußere Achteck fixirt, denn alle Quadranten verhalten sich gleich. Dreieck abc ist Aufriß in der Würfelfläche, das Perpendikel von $\frac{2}{3}d$ auf Axe b gibt daher den Punkt des innern Achtecks. Zur Bestimmung der Trigonalaxe t benutze ich die Projection: da $l = c : 2a : 2b$ und $l_{,} = a : 2b$ ist, so läuft beider Schnittlinie l/l, von d_2 nach 2b, wodurch Punkt t sofort erlangt wird; oder da die Leucitoederflächen die trigonale Axe in $\frac{1}{2}t$ schneiden, so muß Punkt t in die Mitte von cd fallen.



2. Auf die **Oktaederfläche** zieht man sich einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{3}\sqrt{8}$, weil für $a = 1$ die Resultante $d = \sqrt{2}$ und der Schnitt $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ beträgt. In diesen Kreis trage ich die sechsseitige Säule ein. Die Rhomboederkanten gehen vom Mittelpunkte der Mitte der einen Säulenhälfte zu, während in der andern die Axen a liegen. Ich darf daher nur $a : 2a$ ziehen, um den Punkt $\frac{2}{3}d$ zu bestimmen, womit die Elemente des ganzen Bildes gegeben sind.

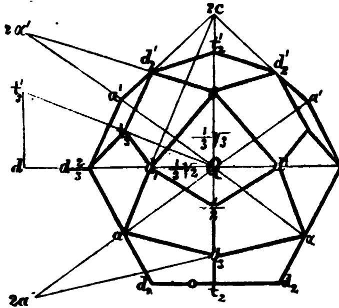


3. Auf die **Granatoederfläche** mache $Qa : Qd = a : d = 1 : \sqrt{2}$, ziehe von a nach d, so haben wir vorn bei a den Oktaederwinkel. Da ferner die Digonalaxe $\frac{2}{3}d : 2a$ geht, so ist damit das äußere Achteck at$\frac{2}{3}$d construirt. Das Perpendikel Qm auf mt zeigt uns die Richtung der sechsseitigen Säule an; ein Perpendikel td, auf Qa bestimmt den Ort d, in der Mitte der Axe a, wie Axenpunkt a, durch Perpendikel ta, bestimmt in der Mitte von Qd liegt. Damit ist die Aufgabe gelöst. Ein Blick in die Projection auf die Granatoederfläche



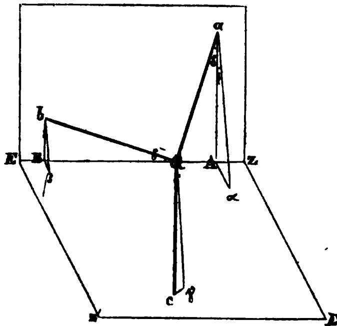
zeigt, daß d, der Ort des Oktaeders a, der Würfelfläche sei, daher geht eine Linie d, a, der at parallel, was sich auch benützen läßt.

4. Auf die **Leucitoederfläche** 112 = a : a : $\frac{1}{2}$a. Zeichne zuerst die Leucitoederfläche im bekannten Verhältniß von $\sqrt{2} : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Für die Axe a = 1 muß das gedrittelt werden, wie aus der Betrachtung einer sechsseitigen Säule folgt, welche quer über Qd, $\frac{2}{3}$d geht. Nach der 2+1gliedrigen Ordnung ergibt sich, daß der Krystall links wie rechts sein muß. Die Ecken der Fläche ergeben die Axenpunkte cd,d,t. Die Linearprojection ergibt, daß die Oktaederfläche o senkrecht gegen die Leucitoederfläche liegt.



Daher ist $d_2 d_2$ gleich und parallel der d,d,, und $t'_2 t_2$ die in der Mitte durch Q halbirte Linie einer Trigonalaxe. Die beiden andern Axenpunkte aa ergeben sich durch die Linie d, : 2c, und da sie über Fläche $d_2 \frac{2}{3}$d steht, die senkrecht gegen die Projectionsebene Q liegt, so fallen die Gegenenden a' und a' noch ins Gesicht. Damit sind alle nöthigen Vorbereitungen getroffen. Digonalaxenpunkt d_2 wird durch Linie a : 2a gefunden, Trigonalaxe t'_2 bildet die Resultante von cd, und der Eckpunkt t_2 liegt in deren Hälfte. Endlich d'_2 ergiebt sich durch die Kreuzung der Linien c : 2a' und a' : 2c.

5. Die **schiefe Projection** in irgend einer Stellung kann nicht unmittelbar ausgeführt, sondern dabei muß vor allem die Lage der drei Hauptaxen abc bestimmt werden, die wir der Einfachheit wegen a = b = c = 1 setzen wollen (Hdb. Mineral. 1863 pag. 34). Wir legen Axe c in die Zeichnungsebene ZZ' und drehen um dieselbe a und b so lange, bis die Projection von b = QB um r mal länger ist, als die von a = QA. Heißt der Drehungswinkel δ, so ist



$$QA = \sin\delta,\ QB = \cos\delta = r\ .\ \sin\delta.$$

Jetzt drehen wir alle drei Axen um die Horizontale ZE, so tritt nicht blos die Axenebene aQb aus der senkrechten Lage, sondern auch c begibt sich unter die Zeichnungsebene, ihr Ort $Q\gamma$ bleibt jedoch senkrecht gegen ZZ'. Alle drei Dreiecke haben natürlich denselben Drehungswinkel s und in $\alpha\beta\gamma$, den Orten der Axenpunkte abc, Rechte Winkel, sie sind daher ähnlich. Wir drehen so lange, bis $A\alpha = \frac{1}{s}$ QA wird, dann folgt:

$$A\alpha = \frac{\sin\delta}{s};\ B\beta = \frac{\sin\delta}{rs};\ c\gamma = \frac{1}{rs}.$$

$$(Q\alpha)^2 = (QA)^2 + (A\alpha)^2 = \sin\delta^2 + \frac{\sin\delta^2}{s^2} = \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\sin\delta^2;$$

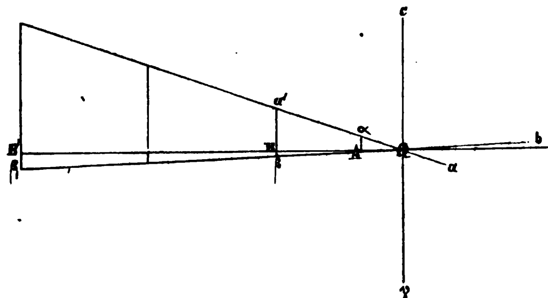
$$(Q\beta)^2 = (QB)^2 + (B\beta)^2 = r^2\sin\delta^2 + \frac{\sin\delta^2}{r^2s^2} = \left(r^2 + \frac{1}{r^2s^2}\right)\sin\delta^2;$$

$$(Q\gamma)^2 = (QC)^2 - (c\gamma)^2 = 1 - \frac{1}{r^2s^2},$$

da $Qc : c\gamma = Bb : B\beta = \sin\delta : \frac{\sin\delta}{rs}$.

1. **Beispiel.** Es sei $r = s = 3$, so verhält sich $\sin : \cos = 1 : 3$, folglich wird
$(Q\alpha)^2 = a^2 = (1 + \frac{1}{9})\sin\delta^2$; $(Q\beta)^2 = b^2 = (9 + \frac{1}{81})\sin\delta^2$;
$(Q\gamma)^2 = c^2 = 1 - \frac{1}{81}$.
Mit Worten: $Q\alpha$ die Projection von a ist die Hypotenuse von den Katheten $\sin + \frac{1}{3}\sin$ und $Q\beta = b$ von $3\sin + \frac{1}{9}\sin$; $Q\gamma = c = \sqrt{1 - \frac{1}{81}}$.

Ziehe die Horizontale QB, die Verticale Qc. Theile $QB = \cos$ in

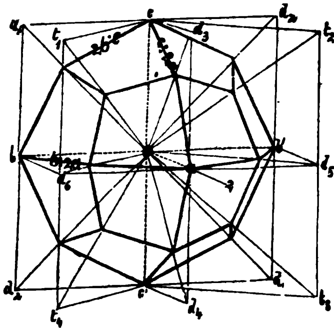


drei Theile, und mache $a'B = \frac{1}{3}\cos$, so ist $\frac{1}{3}Qa' = \alpha$. Mache

$$B\beta = \frac{1}{rs} = \frac{1}{9}A\alpha,$$

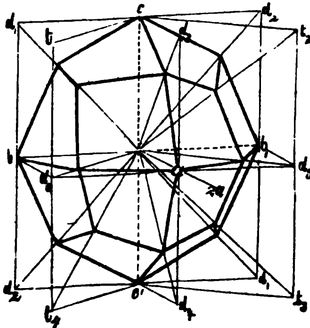
so ist $Q\beta = \beta$; da $Q\gamma = c$ nur $\frac{1}{81}$ von der Einheit a abweicht, und senkrecht auf $Q\beta$ bleibt, so kann man das vernachlässigen. Um die Messungen gut zu machen, trage man in der dreifachen Entfernung links die dreifachen Größen ab, wie Figur zeigt, und wenn Qa' gleich dem a bei den obigen Zeichnungen, so haben wir den gleichen Maßstab beibehalten.

Jetzt stechen wir die gefundenen Punkte abb'cc' durch, und suchen die Resultanten. Das Parallelogramm der Axen bc gibt uns die durchgehenden Digonalen $d_1 d_1$ und $d_2 d_2$; das der ac die Digonalen d_3 und d_4; das der ab die Digonalen d_5 und d_6. Axe c und Digonale d_6 geben die Trigonalen t_1 und t_4; c und d_5 die t_2 und t_3. Damit sind die Hauptpunkte für alle regulären Formen construirt, ich darf in Zukunft die Cardinalpunkte abc, d_1 — d_6 und t_1 — t_4 nur durchstechen.



Durch die Linien c : 2b, b : 2a, c : 2a sind die nothwendigen Punkte für die gebrochenen Oktaederkanten, durch Halbirung der t, was mittelst der Diagonalen der entsprechenden Parallelogramme geschieht, die trigonalen Eckpunkte gegeben. Wollen wir auch die hintere Hälfte eintragen, so dürfen wir durch die gestrichelten Gegenpunkte nur mit den bereits vorhandenen Flächen Parallelen ziehen. Doch pflegt dadurch das Bild nicht zu gewinnen.

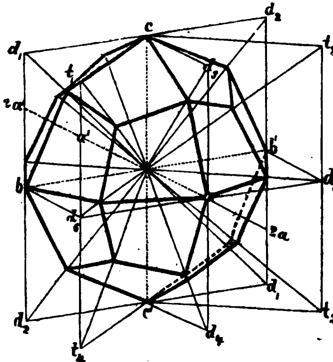
2. **Beispiel.** Es sei r = 3, s = 2, so bleibt das Verhältniß von sin : cos = 1 : 3, aber es wird



$(Q\alpha)^2 = a^2 = (1 + \frac{1}{4}) \sin \delta^2;$
$(Q\beta)^2 = b^2 = (9 + \frac{1}{36}) \sin \delta^2;$
$(Q\gamma)^2 = c^2 = 1 - \frac{1}{36}.$

Wenn man dieses construirt, so verkürzt sich, wie vorhin, Axe a wieder auf ein Drittheil, aber der Winkel aQb wird wegen des $s = \frac{1}{2}$ sin noch vergrößert, b und c nur unwesentlich verändert. Die Hilfslinien führt man zum zweiten Male schon leichter aus: drei parallel c durch b'ab; drei parallel b durch cac'; vier parallel a durch b'cc'b; so sind die Digonalen d bestimmt. Zwei durch d_5 und d_6 parallel cc' und durch c und c' je zwei parallel d_5 und d_5 liefern uns die Punkte t. Das Bild selbst bleibt dem vorigen sehr ähnlich, ist aber verzerrter und minder schön.

3. **Beispiel.** Es sei r = s = 2, so verändert sich das Verhältniß von sin : cos = 1 : 2, es wird

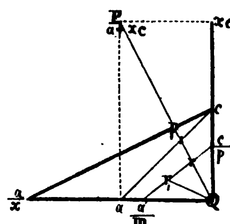


$(Q\alpha)^2 = a^2 = (1 + \frac{1}{4}) \sin \delta^2;$
$(Q\beta)^2 = b^2 = (4 + \frac{1}{16}) \sin \delta^2;$
$(Q\gamma)^2 = c^2 = 1 - \frac{1}{16}.$

Construiren wir diese neuen Axen, so weichen die Winkel zwar nur wenig vom zweiten Beispiel ab, allein die Achse a verkürzt sich nur um die Hälfte. Das bringt den Uebelstand mit sich, daß die Linie 2a nicht mehr innerhalb des Bildrandes fällt, der rechte untere Quadrant kann nicht mehr vollständig ins Auge treten, wie die beiden hintern punktirten

Linien c' : 2b' und b' : 2c' zeigen, die statt dessen oben links hervortreten. Denn bei dieser Projectionsweise muß immer die Hälfte der Flächen auf der Vorderseite zum Vorschein kommen, die andere Hälfte liegt auf der Hinterseite; wir haben sie der Klarheit des Bildes wegen weggelassen. Wegen dieser unangenehmen Verzerrung bleibt das erste Beispiel das empfehlenswerthere.

Das **Kantenzonengesetz** gilt noch viel allgemeiner, wie ebenfalls schon Weiß (Abh. Berl. Akad. 1824 pag. 247) freilich auf mühsame Weise dargethan hat, während wir bei einiger Uebung den Beweis ablesen können. Um zunächst beispielsweise vorzugehen, verzeichnen wir uns im regulären Systeme eine Oktaederkante c : a, ziehen ferner die Diagonale eines beliebigen Pyramidenwürfels $\frac{c}{1} : \frac{a}{x}$, so muß das Perpendikel Qp, vom Mittelpunkte des Oktaeders Q auf diese Diagonale gefällt, in der obern Projectionsebene den Ort



$$\frac{1}{c} : \frac{x}{a} = a : cx$$

erzeugen. Beschreiben wir damit das punktirte Oblongum, so ist die

$$\text{Zonenaxe } PQ = \sqrt{a^2 + x^2 c^2} = l,$$

gibt für $c = a = 1$ die Einheit der Zonenaxe $l = \sqrt{x^2 + 1}$.

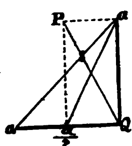
Soll diese Zonenaxe zur Kantenzonenlinie werden, so haben wir statt c die Kante $xc = x$ einzuführen. Denn der Buchstaben a und c bedienen wir uns blos zur Orientirung. Suchen wir jetzt das Stück Qs, welches die Oktaederkante c : a von der Zonenaxe $l = \sqrt{x^2 + 1}$ abschneidet, so bekommt die Oktaederkante jetzt für die neue Axe x den Ausdruck $\frac{1}{x}$, weil $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ ist. Die Oktaederkante läuft also $\frac{1}{x} : \frac{1}{1}$, daher sind die Coordinaten von s nun $\frac{l}{x + 1}$, oder

$$Qs = \frac{l}{x + 1} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}.$$

Ein allgemeiner Achtundvierzigflächner $\frac{c}{p} : \frac{a}{m} : \frac{b}{n}$ bekäme in der Linie $\frac{c}{p} : \frac{a}{m}$ den Ausdruck $\frac{c}{xp} : \frac{a}{m}$, folglich schnitte diese in $r = \frac{l}{xp + m}$. Nähme man mit Weiß $Qs = \delta$ als Einheit, d. h. das Stück, welches die Oktaederkante von der Diagonale $PQ = 1 = \sqrt{x^2 + 1}$ abschneidet, so wäre $Qr = \frac{x + 1}{xp + m}\delta$. Für $x = 2$ ist $Qs = \delta = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{1}{3}l$; für $x = 1$ ist

$\delta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Für $p = 1$ ist $Qr = \frac{x + 1}{x + m}\,\delta$. Was für Qr gilt, gilt auch für den analogen Strahl $Qr_{,}$. Hier wird $Qr_{,} = \frac{x + 1}{xm + p}$ etc. Wir können dabei die Schnitte stets mit den Augen verfolgen. Weiß hat die Sache weitläufiger hauptsächlich mittelst der Theilung des Dreiecks behandelt. Natürlich gilt die Formel $\frac{x + y}{xm + yp}$ auch allgemein für schiefe Winkel.

Wir können die Sache jedoch noch schematischer entwickeln: ein Pyramidenwürfel $a : \frac{1}{2}a$ ist gegeben. Wir machen das Parallelogramm der Kantenzone, so ist die Diagonale



$$PQ = l = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Setzen wir $\frac{1}{2}a = b$, so hat die Oktaederkante $a : a$ in der neuen Axeneinheit $a : 2b = a : \frac{b}{\frac{1}{2}}$, folglich schneidet sie l in

$$Qs = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}\,l = \tfrac{2}{3}l = \tfrac{1}{3}\sqrt{5} = \delta,$$

wie vorhin.

Jetzt denken wir uns eine allgemeine Fläche $F = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : 1$, und fällen vom Mittelpunkte Q darauf ein Perpendikel, so ist in der obern Projectionsebene der Ort $l = x + y + 1$. Aus letztern drei Linien construiren wir uns das Hexaid, dann wird Zonenaxe

$$Ql = l = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$$

Beziehen wir jetzt die andern Flächen auf diese neuen Axen xyl, so hat das Oktaeder $1 : 1 : 1$ den Ausdruck $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : 1$, weil

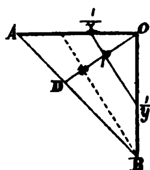
$$\frac{1}{x} \cdot x = \frac{1}{y} \cdot y = 1$$

sein muß, folglich schneidet das Oktaeder von der Zonenaxe l das Stück $\frac{l}{x + y + 1} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}{x + y + 1}$ ab. Jede andere allgemeine Fläche $G = \frac{1}{m} : \frac{1}{n} : 1$ erhält in den neuen Axen den Ausdruck $\frac{1}{mx} : \frac{1}{ny} : 1$, vorausgesetzt daß $x > y > 1$ und $m > n > 1$ sind, weil immer die größte Zahl der größten, die mittlere der mittlern und die kleinste der kleinsten correspondiren muß. Fläche G nimmt daher von der auf F senkrecht stehenden Zonenaxe das Stück $\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}{mx + ny + 1}$ weg. Es verhält sich:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}{x + y + 1} : \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}{mx + ny + 1} = 1 : \frac{x + y + 1}{mx + ny + 1},$$ allgemein:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x+y+z} : \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{mx+ny+pz} = 1 : \frac{x+y+z}{mx+ny+pz}.$$

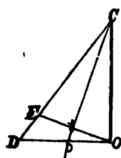
Was wir hier mit ein Paar Zügen hinschreiben, mußte Weiß mittelst „der Theilung des Dreiecks" auf mühsamem Wege erringen. Um zum Perpendikel auf die Fläche F zu kommen, zeichnete er sich in das seitliche



Axenkreuz AO = OB = a, trug die Schnitte $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ ein, verband die Punkte, und fällte auf die Verbindungslinie das Perpendikel

$$op = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} : \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}} = 1 : \sqrt{y^2 + x^2},$$

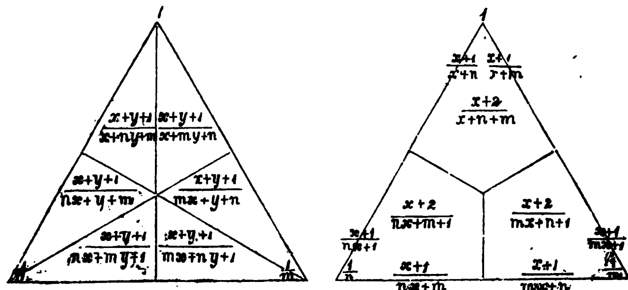
welches in D die Oktaederkante AB schneidet. Auf weiten Umwegen findet er dann mit der punktirten parallelen Hilfslinie $oD = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}$. Dann wird ein Aufriß gemacht in der aufrechten Axe C durch die Linie



oD, worin die Buchstaben opD sich entsprechen, folglich ot senkrecht auf Cp dem Perpendikel vom Mittelpunkt o auf die Ebene F entspricht. Da

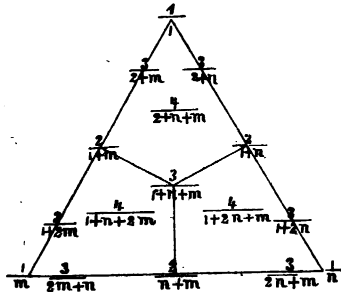
$$ot = op \cdot oC : \sqrt{(op)^2 + (oC)^2}$$
$$= 1 \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}} : \sqrt{1 + \frac{1}{x^2+y^2}} = 1 : \sqrt{x^2+y^2+1},$$

so ist das Perpendikel zwar sehr leicht gefunden, aber für $OF = \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}}{x+y+1}$ mußten mehrere breite Sätze aus der Theilung des Dreiecks pag. 131 zu Hilfe genommen werden, in deren Anwendung Weiß eine merkwürdige Fertigkeit bewies. Von dem breiten Schema setze ich nur einen Oktanten hin, da die andern sich von selbst aus den negativen Zeichen



nach pag. 226 ergeben. Links ist das allgemeinste, der 48flächner, das Perpendikel ist auf die untere Fläche rechts $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : 1\right)$ gefällt, daher bei allen der Zähler x + y + 1, weil dieß für x > y > 1 die Indices der Fläche sind. Hätten wir das Perpendikel auf die Fläche unten links

gewählt, so müßten wir die Indices nach $y + x + 1$ umstellen, und in dieser Ordnung rc. die Buchstaben $m + n + 1$ multipliciren. Die Ordnung letzterer stimmt mit dem Bilde pag. 368 vollständig. Wird $y = 1$, so geht der Ausdruck in $\frac{x+2}{mx+n+1}$ über. Für $x > 1$ sind das Leucitoide, für $x < 1$ Pyramidenoktaeder. Für $y = 0$ erscheinen die Pyramidenwürfel $\frac{x+1}{mx+1}$ rc., wie das besondere Bild rechts zeigt, worin innen drei Leucitoide, in den Linien sechs Pyramidenwürfelflächen eingezeichnet sind. Für $x = 2$ haben wir das gewöhnliche Leucitoeder $a : 2a : 2a$ und den gewöhnlichen Pyramidenwürfel $a : 2a : \infty a$ im Sinne, auf welche das Perpendikel gefällt ist. Die besondere Figur geht dann über in nebenstehende, welche Weiß schon 1818 (Abh. Berl. Akad. pag. 300) entwickelte. Ich habe noch drei Digonalen und eine Trigonale hinzugefügt, um klar zu machen, wie die Ausdrücke durch einfache Addition entstehen, so ist



$$\frac{4}{1+n+2m} = \frac{3}{1+n+m} + \frac{1}{m}$$
$$= \frac{2}{1+m} + \frac{2}{n+m}.$$

$$\frac{3}{1+2m} = \frac{2}{1+m} + \frac{1}{m}; \quad \frac{1}{m} = \frac{3}{1+n+m} - \frac{2}{1+n} \text{ etc.}$$

Für $m = n = 1$ werden alle Ausdrücke $= 1$, weil für die Digonalen $\frac{2}{2}$ das Perpendikel auf die Oktaederkante, für die Trigonalen $\frac{3}{3}$ das Perpendikel auf die Oktaederfläche genommen ist, während die Hauptaxen $\frac{1}{1}$ werden. Da für $a = 1$ das Perpendikel auf die Oktaederkante

$$= \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

und auf die Oktaederfläche

$$= \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

ist; da ferner 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ die dreierlei Dimensionen des Würfels sind, so kann man diese als Einheiten ansehen, und blos die Nenner setzen, über denen man sich ein für allemal eine 1 denkt. Als Einheit der Zonenaxen wird dann immer die Entfernung des Ortes einer beliebigen Fläche vom Mittelpunkte gedacht, welche $\sqrt{x^2+y^2+1}$ für eine Fläche $\frac{a}{x} : \frac{a}{y} : 1$ beträgt. Das

$$\text{Leucitoeder } \frac{a}{2} : a : a = a : 2a : 2a = a : \frac{a}{(\frac{1}{2})} : \frac{a}{(\frac{1}{2})}$$

hat dann Zonenaxe

$$= \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \text{ oder } \sqrt{1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{6},$$

je nachdem man den kleinsten Axenschnitt $\frac{1}{2}$a oder a setzt. Das Oktaeder schneidet davon $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}}{x+y+1}$ ab, das gibt in beiden Fällen

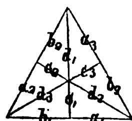
$$\frac{\sqrt{2^2+1+1}}{2+1+1} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{6}.$$

Will man die Formel noch weiter auf $\frac{a}{x}:\frac{b}{y}:\frac{c}{z}$ und $\frac{a}{m}:\frac{b}{n}:\frac{c}{p}$ verallgemeinern, so geht sie augenfällig in $\dfrac{x+y+z}{mx+ny+pz}$ über, für $a = b = c = 1$. Wären dagegen alle drei Axen verschieden, so erhielten wir

$$\frac{\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}}{\frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b^2}+\frac{pz}{c^2}}.$$

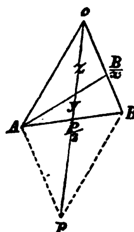
Auch diese Formel hat Weiß schon aufgestellt, und beruht darauf, daß eine Fläche $\frac{a}{x}:\frac{b}{y}:\frac{c}{z}$ durch Umkehrung $\frac{x}{a}:\frac{y}{b}:\frac{z}{c}$ pag. 154 wird.

Für die **Theilung des Dreiecks** pag. 131 kann das Kantenzonengesetz ebenfalls nützlich sein. Es ist oft wünschenswerth, zu wissen, wie in dem Basalschnitt eines Oktaides die zwischenliegende Axe geschnitten werde, wenn man von der Ecke des Parallelogramms nach der gegenüberliegenden Seite zieht: **also das Stück** $c_{,}$ **zu finden, wenn** b_2 **bekannt ist.** Da in diesem Falle auch a_2, $a_{,}$ und $d_{,} = 1 - c_{,}$ gegeben sind, so folgt nach dem ersten Satze



$$1 - c_{,} : c_{,} = b_2(a_{,} + b_{,}) : a_{,}a_2, \text{ oder}$$
$$1 : b_2(a_{,} + b_{,}) + a_{,}a_2 = c_{,} : a_{,}a_2$$
$$c_{,} = \frac{a_{,}a_2}{b_2(a_{,}+b_{,}) + a_{,}a_2} = \frac{a_2}{2b_2 + a_2},$$

denn man kann $a_{,} = b_{,} = 1$ setzen. Ist $b_2 = a_2 = 1$, d. h. die Oktaederkante halbirt, so ist $c_{,} = \frac{1}{3}$; ist $b_2 = 1$ und $a_2 = 2$, d. h. die Kante gedrittelt, so ist $c_{,} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ halbirt ꝛc.



Im Hdb. Miner. 1855 pag. 65 wurde auseinandergesetzt, wie einfach das aus den Kantenzonen folge. Denn ist das Parallelogramm oApB der Basalschnitt eines beliebigen Oktaides, so ist Diagonale op = p die Resultante der Axenkräfte oA = A und oB = B. Eine beliebige Linie $A : \frac{B}{x}$ muß daher von p das Stück $z = \frac{p}{1+x}$ abschneiden, und die Linie A : B muß p halbiren, da

$\frac{p}{1+1} = \frac{p}{2}$ ist. Daher

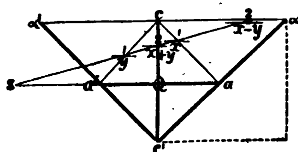
$y = \frac{p}{2} - \frac{p}{1+x} = \frac{p(x-1)}{2(x+1)}$. Da man $\frac{p}{2} = C$ setzen kann, so

ist $$y = \frac{x-1}{x+1} C \text{ und } \frac{1}{x} = \frac{1-y}{1+y} B.$$

Gibt für $x = 2 \ldots \frac{1}{3}$, für $x = 3 \ldots \frac{1}{2}$, für $x = 4 \ldots \frac{3}{5}$ &c. und umgekehrt.

In dieser einfachen Begründung liegt zugleich der Schlüssel für **Bernhardi's Symbole** pag. 28. Denn je zwei Basalschnitte eines Oktaides haben dieselbe Resultante, z. B. o p. Lege ich nun durch Linie $A : \frac{B}{x}$ eine Ebene, so mag diese die beiden andern Oktaidkanten beliebig in $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ schneiden, immer muß $z = \frac{p}{m+n}$ werden. Es findet daher zwischen den vier Kantenschnitten die Gleichung $m+n = 1+x$ statt: aus dreien kann ich die vierten bestimmen.

Die Axenschnitte stehen wieder zu den Kantenschnitten im Kantenzonenverhältniß, denn ich darf nur durch eines der gegenüberliegenden Kantenpaare, z. B. ac, einen Aufriß legen, so bildet die doppelte Hauptaxe cc' die Resultante des Parallelogrammes cac'a'. Legen wir dann die aa' nach αα' durch Punkt c, so sieht



man, daß ein Kantenschnitt $\frac{1}{x} : \frac{1}{y}$ nach der Zwischenkantenzonenformel pag. 199 in den Axen cc' und cα die Stücke $\frac{2}{x+y} c$ und $\frac{2}{x-y} \alpha$ wegnimmt. Ebenso muß im zweiten Aufriß cbc'b' ein Schnitt $\frac{1}{m} : \frac{1}{n}$ wieder durch $\frac{2}{x+y}$ gehen, da $x + y = m + n$ ist, wir haben daher auch hier $\frac{2}{m+n} c$ und $\frac{2}{m-n} \beta$. Da in den beiden Axenkreuzen c gemeinschaftlich, ferner α mit a und β mit b parallel gehen, so sind aus den Kantenschnitten $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ durch einfache Addition der Zähler nebst Addition der Nenner für die zwischen- und Subtraction für die außenliegenden die

$$\text{Axenschnitte } \frac{2c}{x+y} : \frac{2a}{x-y} : \frac{2b}{m-n}$$

gefunden. Ein Bernhardi'sches Zeichen

$$\begin{matrix} 2 \\ 3A5 \\ 6 \end{matrix} = \begin{matrix} x \\ mAn \\ y \end{matrix}$$

hat also für die

zwischenliegende Hauptaxe $\frac{2c}{3+5} = \frac{2c}{6+2} = \frac{c}{4}$;

vordere außenliegende $\frac{2a}{6-2} = \frac{a}{2}$;

seitliche außenliegende $\frac{2b}{5-3} = b$; d. h. $\frac{c}{4} : \frac{a}{2} : b$.

Aber auch eben so leicht lassen sich **umgekehrt aus den Axen die Kantenschnitte** finden, denn es ist

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{(x-y)+(x+y)} \text{ und } \frac{1}{y} = \frac{2}{(x+y)-(x-y)}.$$

Jetzt bildet ca die Resultante in dem Parallelogramme c'cα. Bringe ich nun $\frac{2}{x+y}$ auf die Form $\frac{1}{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}$ und $\frac{2}{x-y}$ auf $\frac{1}{\frac{x}{2}-\frac{y}{2}}$, so ist

$\frac{1}{x} = \frac{1}{\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)}$ ꝛc. Habe ich also eine Fläche $\frac{c}{4} : \frac{a}{2} : \frac{b}{1}$, so ist

$$\begin{matrix} 4-2 \\ 4-1\,A\,4+1 \\ 4+2 \end{matrix} = \begin{matrix} 2 \\ 3A5, \\ 6 \end{matrix}$$

wie oben. Wir können das Zeichen durch Weglassung des Buchstaben A noch verkürzen. Hätten wir den 48flächner $\frac{a}{1} : \frac{a}{3} : \frac{a}{5}$, so gibt das

$$5+1\begin{matrix} 5+3 \\ 5-3 \end{matrix}5-1 = 6\begin{matrix} 8 \\ + \\ 2 \end{matrix}4,$$

woraus wir umgekehrt dann wieder $\frac{2a}{6-4} : \frac{2a}{8-2} : \frac{2a}{8+2}$ reproduciren. Statt $6\begin{matrix} 8 \\ + \\ 2 \end{matrix}4$ können wir auch $3\begin{matrix} 4 \\ + \\ 1 \end{matrix}2$ schreiben, dann kommt bei der Ableitung der Axen

$$\frac{2a}{3-2} : \frac{2a}{4-1} : \frac{2a}{4+1} = 2a : \tfrac{2}{3}a : \tfrac{2}{5}a = a : \frac{a}{3} : \frac{a}{5},$$

wie vorhin.

Bernhardi pag. 29 zog die Kantenbezeichnung den Weiß'schen Axen vor, weil diese aus jenen abgelesen werden könnten. Er merkte also das Umgekehrte, was sich noch leichter bewerkstelligen läßt, gar nicht. Auch mir ist es lange entgangen. Bei Verfertigung von Modellen, wenn ich

die Oktaederecken durch 48flächner ꝛc. zuschärfen will, hat das Gesetz seine Wichtigkeit, Hdb. Mineral. 1863 pag. 71.

Graßmann pag. 61 hat in Poggendorfs Annalen 1836 (Bd. 30 pag. 28) die Anwendung des Kantenzonengesetzes freilich in sehr verhüllter Weise zur größten Allgemeinheit erhoben. Für die

Kugeldarstellung tab. 8 fig. 3 ist diese Anschauung ganz vorzüglich: jetzt schneiden die Zonenaxen unserer Linearmethode die Kugelfläche, und jede Zonenaxe ma+nb+pc wird zum Träger einer Fläche $\frac{1}{ma}:\frac{1}{nb}:\frac{1}{pc}$. Wir dürfen demnach nur die Sectionskreise unserer drei Körper, Oktaeder o, Granatoeder d und Pyramidenwürfel h ziehen. Ihre Centra sind vom Centrum des Tafelkreises in den Axen a = 1 der Reihe nach $\frac{1}{2}$, 1, 2 und in der Zwischenaxe für das Oktaeder $\sqrt{2}$ entfernt, so daß die Figur so schnell und leicht als irgend eine entworfen ist. Jetzt geht das Addiren an. Im Axenkreuze den

Würfel 100, 010, 001

gesetzt, kommt das

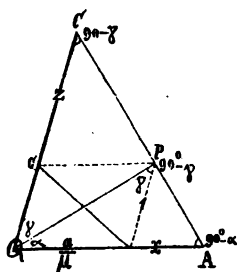
Dodecaeder 110=100+010; 101=100+001; 011=001+010 ꝛc.;
Oktaeder 111=100+011=001+110 = 100 + 011
= 100 + 010+001 ꝛc.;
Pyramidenwürfel 201 = 100 + 101, 102 = 001+101,
210 = 100 + 110, 021 = 010+011 ꝛc.;
Leucitoeder 112=101+011=001+111, 211 = 100+111
= 101+110, 121=111+010 = 011+110 ꝛc.;
Pyramidenoktaeder 212=111+101=211+001 ꝛc.;
Pyramidengranatoeder 123=112+011=122+001 ꝛc.;
Achtundvierzigflächner 124=112+012=123+001 ꝛc.

Bis jetzt habe ich blos die Beispiele aus dem positiven Quadranten gewählt, in den andern gilt dasselbe. Verbinde ich dagegen gestrichelte mit ungestrichelten, so müssen die gestrichelten negativ in Rechnung gebracht, d. h. abgezogen werden. So liegt hinten die Dodecaederfläche 1′01 zwischen 001 und 1′00, aber auch zwischen 1′1′1+1′11=2′02, in der Mitte kommt 1′+1=0, und 2′02 kann 1′01 gesetzt, d. h. durch 2 dividirt werden. Es spricht sich darin unser Zwischenkantenzonengesetz pag. 199 aus. Alle correspondirenden Punkte in der Granatoederkantenzone geben in der Mitte 0, außen aber Multipla von eins:

101 = 21′2 + 212 = 404 = 4 . 101;
101 = 12′1 + 121 = 202 = 2 . 101;
101 = 01′0 + 010 = 000 = ∞ . 101.

Auch **schiefaxige** Systeme lassen sich in gleicher Weise behandeln. Hier verhält sich

$$x : \sin(90^0 - \gamma) = 1 : \sin(90^0 - \alpha), \text{ oder}$$



$$x : \cos\gamma = 1 : \cos\alpha,\ x = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha};$$

$$\frac{\alpha}{\mu} : \sin\gamma = 1 : \sin\alpha,\ \frac{\alpha}{\mu} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

$$x : \frac{a}{\mu} = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} : \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} : \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \operatorname{ctg}\gamma : \operatorname{ctg}\alpha.$$

Sind die Axen rechtwinklich, so wird $\alpha+\gamma=90^0$; dann ist $90^0-\gamma=\alpha$ und $90^0-\alpha=\gamma$, folglich $x = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$, wie oben bei der Invertirung. Eben so findet sich $y : \cos\gamma_{,} = 1 : \cos\beta$, $y = \frac{\cos\gamma_{,}}{\cos\beta}$ und

$$\frac{\beta}{\nu} : \sin\gamma_{,} = 1 : \sin\beta,\ \frac{\beta}{\nu} = \frac{\sin\gamma_{,}}{\cos\beta},$$

wobei Winkel $\gamma_{,}$ an der Axe c, und β an der Axe b liegen. Also Fläche

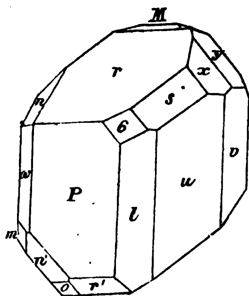
$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : 1 = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} : \frac{\sin\gamma_{,}}{\cos\beta} : 1 \text{ und}$$

$$x : y : 1 = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} : \frac{\cos\gamma_{,}}{\cos\beta} : 1,$$

so daß wir auch hier das Eine aus dem Andern ablesen können. Zugleich verhält sich $x : 1 = \frac{a}{\mu} : z$, $xz = \frac{a}{\mu}$, und jedenfalls ist PQ die Richtung der Resultante von CQ und AQ. Wir können daher die Sache unabhängig von den Winkelgrößen behandeln, und wählen als Beispiel mit Graßmann den schiefsten von allen, den

Axinit tab. 8 fig. 6. Neumann (Pogg. Ann. 1825 Bd. 4 pag. 67) hat den Zonenzusammenhang der Flächen gegeben. Gehen wir von den gewöhnlich größten

$$u = 100,\ P = 010,\ r = 001$$



als Hexaid aus, so müssen wir, um zur Deduction schreiten zu können, **entweder** einen Punkt außerhalb der Sectionskreise uP, ur, Pr nehmen, etwa $\sigma = 111$; oder zwei Punkte in den Sectionskreisen, z. B. $l = 110$ und $s = 101$. Denn hätten wir blos einen, so wäre das ein Vierzonenkörper uPrl oder uPrs, mit dem wir nicht fortkämen; mit beiden ls geht es dagegen. Da l und s gewöhnlich sich als Abstumpfungsflächen der Hexaidkanten P/u und r/u zeigen, so setzen wir

$$l = u + P = 100 + 010 = 110 = a : b : \infty c$$
$$s = u + r = 100 + 001 = 101 = a : \infty b : c.$$

Fünf Messungen müssen dieses feststellen, aber dann folgt alles ohne Messung.

σ in r/l, P/s = 001 + 110 = 010 + 101 = 111 = a : b : c.
Wir haben hier blos die Zahlen an den Orten rl und Ps mit einander zu addiren, und geben beide denselben Ausdruck, so ist das Beweis für die Richtigkeit. Es ist nun gut, gleich die Gegenpunkte von P und r mit P' = 01'0 und r' = 001' hinzuschreiben, dann folgt sofort
M in P'/r und s/l' = 01'0 + 001 = 101 + 1'1'0 = 01'1 = ∞a : b' : c; l' steht zwar auf dem unsichtbaren Gegenpol, allein wir können es aus l = 110 durch entgegengesetzte Bezeichnung (Strichelung) sofort ableiten, und da bei der Addition entgegengesetzte Zeichen subtractiv in Rechnung gebracht werden müssen, es bedeutet ja Kräfte, die nach entgegengesetzten Enden ziehen, so muß 1 + 1' = 0 sein. Mit M = 01'1 ist auch M' = 011' gegeben, es liegt zwischen r' = 001' und P = 010, so wie zwischen l = 110 und s' = 1'01'.

x in M/u, P'/s = 01'1 + 100 = 01'0 + 101 = 11'1 = a : b' : c
v in u/P', r'/x = 100 + 01'0 = 001' + 11'1 = 11'0 = a : b' : ∞c
y in M/v, P'/x = 01'1 + 11'0 = 01'0 + 11'1 = 12'1 = a : $\frac{1}{2}$b' : c
ω in P'/v, r'/y = 01'0 + 11'0 = 001' + 12'1 = 12'0 = a : $\frac{1}{2}$b' : ∞c
n in r'/ν, M'/ω = 001' + 11'0 = 011' + 12'0 = 11'1' = a : b' : c'
ϱ in M'/P, u/y' = 011' + 010 = 100 + 1'21' = 021' = ∞a : $\frac{1}{2}$b : c'
γ in P'/y, M/ω = 01'0 + 12'1 = 01'1 + 12'0 = 13'1 = a : $\frac{1}{3}$b' : c
m in ν/γ, ω/y = 11'0 + 13'1 = 12'0 + 12'1 = 24'1 = $\frac{1}{2}$a : $\frac{1}{4}$b' : c
o in M/γ, ϱ/y = 01'1 + 13'1 = 02'1 + 12'1 = 14'2 = a : $\frac{1}{4}$b : $\frac{1}{2}$c
z in M/r, n/y' = 011' + 001' = 11'1' + 1'21' = 012' = ∞a : b : $\frac{1}{2}$c'.

Wenn man einmal die Zonenentwickelung kennt, so ist das ganze Werk kaum mehr als ein Hinschreiben.

Wollten wir jetzt nun von einem andern Hexaid, etwa von

ν = 100, ω = 010, M = 001

ausgehen, so müssen wir zunächst die bisherigen alten Elemente durch diese drei neuen ausdrücken. Nach den **alten** war

ν = u + P' = 100 + 01'0 = 11'0 oder P = u + ν'
u = 2ν + ω' = 22'0 + 120 = 100.

Drücken wir dieß in die **neuen** aus, so wird

u = 2ν + ω' = 200 + 01'0 = 21'0
P = u + ν' = 21'0 + 1'00 = 11'0.

Diese fünf neuen Ausdrücke νωMuP genügen nun wieder zu einer vollständigen Entwickelung.

r = M + P = 001 + 11'0 = 11'1
l = u + P = 21'0 + 11'0 = 32'0
s = u + r = 21'0 + 11'1 = 32'1'
x in ν/r, u/M = 100 + 11'1 = 21'0 + 001 = 21'1.
y in M/ν, P'/x = 001 + 100 = 1'10 + 21'1 = 101 ꝛc.

Besonders einladend scheint das Hexaid MPν zum Ausgange, weil seine

Winkel P/ν 77.16, M/ν 82.10, P/M 90.4 sich nicht zu weit vom Rechten entfernen, und im Bilde das Hexaid als Würfel gezeichnet werden kann, ohne zu stark von der Natur abzuweichen. Da nun

$$\nu + P = u;\ \nu + M = y;\ P + M = r,$$

so dürfen wir nur das

Hexaid tab. 8 fig. 5

$$M = 100,\ P = 010,\ \nu = 001$$

hinsetzen, dann kommt in diesen neuen Elementen sofort das

Dodekaid

$u = \nu + P = 001 + 010 = 011,$
$y = \nu + M' = 001 + 1'00 = 1'01,$
$r = M + P' = 100 + 01'0 = 11'0,$
$\varrho = M + P = 100 + 010 = 110,$
$\omega = \nu + P' = 001 + 01'0 = 01'1,$
$b = \nu + M = 001 + 100 = 101.$

Letztere Fläche b hat Herr v. Rath (Pogg. Ann. 1866 Bd. 128 pag. 20), der uns mit beneidenswerther Gewandtheit eine Reihe neuer Flächen namentlich aus dem Diorit von Botallak in Cornwallis bestimmt hat, nachgewiesen. Vom

Oktaide

$x = M' + u = 1'00 + 011 = 1'11,$
$\gamma = M' + \omega = 1'00 + 01'1 = 1'1'1,$
$n = M + \omega = 100 + 01'1 = 11'1,$

fehlt uns die vierte 111 noch, sie wird aber auch wohl noch gefunden werden. Vom gewöhnlichen

Icositetraide (Leucitoide)

$m = \omega + y = 01'1 + 1'01 = 1'1'2,$
$o = M' + \gamma = 1'00 + 1'1'1 = 2'1'1,$
$s = u + r' = 011 + 1'10 = 1'21,$
$d = P' + n = 01'0 + 11'1 = 12'1,$
$\delta = M + n = 100 + 11'1 = 21'1,$

sind vorstehende fünf vorhanden. Wozu noch ein anderes

$\sigma = s + P = 1'21 + 010 = 1'31$ kommt.

Pyramidenhexaide

$z = \delta + \nu' = 21'1 + 001' = 21'0,$
$l = P + u = 010 + 011 = 021,$
$f = M' + y = 1'00 + 1'01 = 2'01,$
$g = f + M' = 2'01 + 1'00 = 3'01,$
$h = l + P = 021 + 010 = 031,$
$h_2 = u + l = 011 + 021 = 032,$
$\beta = h_2 + l = 032 + 021 = 053.$

Die übrigen vertheilen sich auf

$k = \omega + n = 01'1 + 11'1 = 12'2$ Pyramidenoktaid.
$t = \omega + d = 01'1 + 12'1 = 13'2$ Pyramidendodekaid.

Die Hauptpunkte construirten wir durch die Dodecaeder- d und Oktaederkreise o. Die Pyramidenhexaidkreise h gaben dann noch z, f, l, t, k, kurz alles, was zu den gewöhnlichen sieben Körpern gehört, kann durch die Sectionslinien des Würfels 100, Granatoeders 110, **Oktaeders** 111, Pyramidenwürfels 120 gefunden werden. Wer mit der Kugel zu arbeiten gewohnt ist, sieht das Alles sogleich. Aber die Sache leuchtet unmittelbarer ein, wenn man zur Fläche schreitet. Ich füge daher

die **Flächenprojection** tab. 8 fig. 4 auf $\nu = 001$ zur weitern Orientirung noch hinzu. Jetzt wird uns mit einem Blicke die ganze Addition klar. Was Graßmann combinatorisch ermittelt hatte, lag schon längst in anderer Weise vor. Die Orte der Flächen kann man ablesen, denn so wie die hintere Stelle, welche sich auf Axe bezieht, mehr als 1 ist, darf man nur dividiren, also $t = 13'2 = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}'\,1$ setzen, um sofort die Richtigkeit der Zahl zu erkennen. Alles, was zu den sieben Körpern 110, 120, 111, 112, 122, 123, 124 gehört, wird durch die Sectionslinien des Granatoeders, Oktaeders und Pyramidenwürfels 120 bestimmt. Nur wenige Flächen σ 1'31, h 031, g 3'01, h_2 032, β 053 gehen darüber hinaus: σ 1'31 bedarf der Leucitoedersectionslinie $l = 2a : 2b$; g 3'01, h 031, h_2 032 erreichen wir durch die Pyramidengranatoeder $p = \frac{3}{2}a' : 3b$ und $3a' : \frac{3}{2}b$. Aber die Orte reihen sich vortrefflich ein, denn z. B. $h_2 = 032 = u + l = 011 + 021$; selbst

$$\beta = 053 = h_2 + l = 032 + 021$$

ergibt sich durch bloße Addition, muß aber durch einen Achtundvierzigflächner $\pi = \frac{5}{4}a : \frac{5}{3}b$ eingesetzt werden, der den Zonenpunkt σ 1'31 mit δ 21'1 verbindet.

Zonenaxenschnittformel.

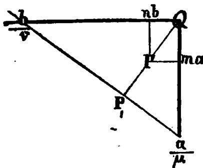
Sollen drei beliebige Zonenaxen

$$\alpha = c + ma + nb;\ \beta = c + m_,a + n_,b;\ \gamma = c + m_0a + n_0b,$$

welche nicht in einer Ebene liegen, an die Stelle der alten Axen abc treten, so wird Fläche

$$c : \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} = \frac{\alpha}{1+m\mu+n\nu} : \frac{\beta}{1+m_,\mu+n_,\nu} : \frac{\gamma}{1+m_0\mu+n_0\nu}.$$

Gegeben Zonenpunkt $P = ma + nb$ und Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$. Ziehen wir PQ, so ist nach der Zonenpunktformel pag. 188 für den Schnittpunkt $P_,$ zu setzen:



$$\mu_, = \frac{0}{m} \text{ und } \nu_, = -\frac{0}{n}, \text{ gibt}$$

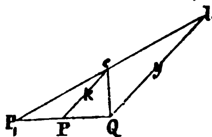
$$P_, = \left(\nu + \frac{0}{n}\right)a + \left(\frac{0}{m} - \mu\right)b + \left(\frac{\nu}{m}0 + \frac{\mu}{n}0\right)c,$$

$$= (mn\nu + m0)a + (n0 - mn\mu)b + 0(n\nu + m\mu)c$$

$$= ma + nb + (m\mu + n\nu)c$$

$$= \frac{ma}{m\mu + n\nu} + \frac{nb}{m\mu + n\nu} + c.$$

Setzen wir $QP = p = \sqrt{m^2a^2 + n^2b^2}$, so ist



$$QP, = p, = \frac{p}{m\mu + n\nu}.$$

Im Aufrisse PQlc ist Zonenaxe k, welche von c nach P strahlt, durch den Mittelpunkt Q gelegt, muß also die verlängerte P,c in l schneiden, folglich

$$y : k = QP, : PP, = p, : p, - p$$

$$y = \frac{kp,}{p, - p} = Ql = l.$$

$$l = \frac{pk}{m\mu + n\nu} : \left(\frac{1}{m\mu + n\nu} - 1\right) p = \frac{k}{1 - m\mu - n\nu}.$$

$k = \sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2}$ ist die Einheit der neuen Axe α. Was im hintern Quadranten negativ, ist im vordern positiv, also $\frac{k}{1 + m\mu + n\nu}$, wie oben angenommen wurde. Es wird dieses klar werden durch den

allgemeinen Beweis. Gegeben eine beliebige Zonenaxe $ma + nb + pc$, die von einer Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi}$ geschnitten wird. Die Zonenaxe durch den Mittelpunkt gelegt bekommt die drei Gleichungen:

$$1)\ x = \frac{ma}{nb} y. \quad 2)\ y = \frac{nb}{pc} z. \quad 3)\ z = \frac{pc}{ma} x.$$

Die Ebene 4) $\frac{\mu x}{a} + \frac{\nu y}{b} + \frac{\pi z}{c} = 1.$

Für den Durchschnittspunkt der Axe mit der Fläche sind xyz identisch, ich finde daher

$y = \frac{nbx}{ma}$ und $z = \frac{pc}{ma} x$ in Gleichung (4) gesetzt

$$\frac{\mu x}{a} + \frac{n\nu x}{ma} + \frac{p\pi x}{ma} = 1,$$

$$x = \frac{ma}{m\mu + n\nu + p\pi}.$$ Gerade so findet sich

$$y = \frac{nb}{m\mu + n\nu + p\pi}$$

$$z = \frac{pc}{m\mu + n\nu + p\pi}.$$

Die Länge der Zonenaxe l vom Mittelpunkte bis zum Durchschnitte der Ebene beträgt $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, folglich

$$l = \frac{\sqrt{m^2a^2 + n^2b^2 + p^2c^2}}{m\mu + n\nu + p\pi} = \frac{k}{m\mu + n\nu + p\pi}.$$

Da diese Allgemeinheit gewöhnlich unnöthig ist, so setzen wir

$$pc = \frac{c}{\pi} = 1,$$

und erhalten sofort

$$l = \frac{\sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2}}{1 + m\mu + n\nu}.$$

Hier erscheint nun + statt obigen —, weil die Zonenaxe nach vorn gegen die Fläche durch den Mittelpunkt gelegt ist. Es sind immer wieder dieselben Gründe, wie oben bei den Resultanten pag. 194. Man sieht leicht ein, daß der rechte Winkel nur auf die Bestimmung von l Einfluß hat, die übrigen Größen gelten auch für schiefwinkliche Axen. Die Formel selbst stimmt mit der allgemeinen Kantenzonenformel pag. 368, und wurde dort ohne Rechnung blos mit der Kantenzone bewiesen. Zugleich ist es der Satz, welchen Miller (Treat. on Crystallogr. 1839 pag. 15), zwar originel, aber doch nicht sonderlich einfach beweist. Philos. Magazin May 1857 kommt er nochmals darauf zurück, wird aber auch nicht viel klarer. Wir haben dagegen einen beliebigen vom Nullpunkte ausgehenden Strahl $\frac{a}{\mu} + \frac{b}{\nu} + \frac{c}{\pi}$, legen senkrecht dagegen eine Fläche, so geht dieselbe $\frac{\mu}{a} : \frac{\nu}{b} : \frac{\pi}{c}$. Soll jener Strahl l neue Axe sein, so erhält eine beliebige Fläche $\frac{a}{\mu,} : \frac{b}{\nu,} : \frac{c}{\pi,}$ auf die Kanten des Parallelepipeds $\frac{\mu}{a}, \frac{\nu}{b}, \frac{\pi}{c}$ bezogen, den neuen Ausdruck

$$\frac{\mu\mu,}{a} : \frac{\nu\nu,}{b} : \frac{\pi\pi,}{c}, \text{ folglich wird } l \text{ in}$$

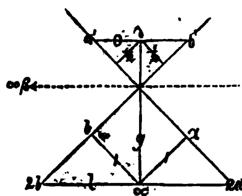
$l : (\mu\mu, + \nu\nu, + \pi\pi,)$ geschnitten.

Die Wurzelgröße bezeichnet die Länge einer Zonenaxe von c bis zum Zonenpunkte ma + nb in der Projectionsebene. Dieselbe eignet sich am besten für die neue Axeneinheit, und bildet das bekannte irrationale Grundverhältniß, von welchem die krystallonomischen Flächen ein rationales Multiplum $\frac{1}{1 + m\mu + n\nu}$ abschneiden. Für $c = \pi = 0$ geht die allgemeine Formel in

$$qp, = \frac{\sqrt{m^2a^2 + n^2b^2}}{m\mu + n\nu}$$

über, was wir oben durch Anwendung der Zonenpunktformel fanden.

Beispiel. Durch Projection auf die Leucitoederfläche 112 pag. 175 konnten wir die Axenausdrücke unmittelbar ablesen, welche sie auf $\alpha\beta\gamma$



machten. Axe α ist der Durchschnitt des Leucitoeders l mit Granatoeder g, d. h. Granatoederkante von c nach 1 + 1; γ der Durchschnitt von Oktaeder o mit Granatoeder, d. h. Diagonalzone von c nach $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$; β im Schnitte von Oktaeder- und Leucitoederfläche strahlt von c zum Unendlichen, es ist also $m, = \pm\infty$ und $n, = \mp\infty$, gibt

$$\frac{\beta\infty}{1 + \mu\infty - \nu\infty} = \frac{\beta}{\mu - \nu}.$$

Es ist nun ganz gleichgültig, welchen Quadranten, ob den vordern oder den hintern, wir für das Flächenzeichen positiv oder negativ setzen. Nur das eine ist zu beachten, daß wenn wir ein Mal gesetzt haben, so müssen die Flächenzeichen in den rechtwinklichen Axen abc mit entgegengesetzten Zeichen in Rechnung gebracht werden. Wir wollen vorn mn positiv nehmen, also ab vorn negativ.

$$\frac{\alpha}{1 + \mu + \nu} : \frac{\beta}{\mu - \nu} : \frac{2\gamma}{2 - \mu - \nu}.$$

Alte Axen. **Neue Axen.**

ω Würfel c : ∞b gibt $\mu = \nu = 0$ $\quad \frac{\alpha}{1} : \frac{\beta}{0} : \gamma = a : \infty b : c$

$\omega,$ a : ∞b gibt $\mu = -\infty, \nu = 1$ $\quad \frac{\alpha}{-\infty} : \frac{\beta}{-\infty} : \frac{2\gamma}{\infty} = \frac{a'}{2} : \frac{b}{2} : c.$

Da auf der Projection $\omega,$ den Ausdruck $\frac{a'}{2} : \frac{b}{3} : c$ hat, so muß $\frac{\beta}{2} = \frac{b}{3}$ d. h. $\beta = \frac{2}{3}b$ sein, während die Längen von a und c übereinstimmen. Um also auch in b auf die gleichen Ausdrücke zu kommen, müssen wir die Coefficienten von β mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, und darnach die Länge der Axe einrichten.

o_2 Okt. a' : b' gibt $\mu = \nu = 1$ $\quad \frac{\alpha}{3} : \frac{\beta}{0} : \frac{2\gamma}{0} = a : \infty b : \infty c$

o, Okt. a : b gibt $\mu = \nu = -1$ $\quad -\alpha : \frac{\beta}{0} : \frac{\gamma}{2} = 2a' : \infty b : c$

o Okt. a : b' gibt $\mu = 1, \nu = -1$ $\quad \alpha : \frac{\beta}{2} : \gamma = a : \frac{\beta}{2} : c = a : \frac{b}{3} : c$

g Grn. a' : ∞b gibt $\mu = 1, \nu = 0$ $\quad \frac{\alpha}{2} : \beta : 2c = \frac{a}{4} : \frac{\beta}{2} : c = \frac{a}{4} : \frac{b}{3} : c$

g, Grn. a : ∞b gibt $\mu = -1, \nu = 0$ $\quad \frac{\alpha}{0} : \beta : \frac{2}{3}\gamma = \infty a : \frac{3}{2}\beta : c = \infty a : b : c$

g_2 Grn. a' : b' gibt $\mu = \nu = \infty$ $\quad \frac{\alpha}{2\infty} : \frac{\beta}{0} : \frac{2\gamma'}{2\infty} = \frac{a'}{2} : \infty b : c$

g3 Grn. a : b' gibt $\mu = \infty$, $\nu = -\infty$ $\quad \frac{\alpha}{0} : \frac{\beta}{2\infty} : \frac{2\gamma}{0} = \infty a : b : \infty c$

π Pw. 2a' : ∞b gibt $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = 0$ $\quad \frac{2}{3}\alpha : 2\beta : \frac{4}{3}\gamma = \frac{1}{2}a : \frac{3}{2}\beta : \gamma = \frac{1}{2}a : b : c$

l5 Lct. 2a' : 2b' gibt $\mu = \nu = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{\alpha}{2} : \frac{\beta}{0} : 2\gamma = \frac{a}{4} : \infty b : c$

l4 Lct. a' : ½b gibt $\mu = 1$, $\nu = -2$ $\quad \frac{\alpha}{0} : \frac{\beta}{3} : \frac{2\gamma}{3} = \infty a : \frac{\beta}{2} : \gamma = \infty a : \frac{b}{3} : c$

p3 Pmok. a' : 2b gibt $\mu = 1$, $\nu = -\frac{1}{2}$ $\quad \frac{2}{3}\alpha : \frac{2}{3}\beta : \frac{4\gamma}{3} = \frac{a}{2} : \frac{\beta}{2} : c = \frac{a}{2} : \frac{b}{3} : c$

x7 Pmgr. ½a' : ⅓b' gibt $\mu = 2$, $\nu = 3$ $\quad \frac{\alpha}{6} : -\beta : -\frac{2}{3}\gamma = \frac{a'}{4} : \frac{2}{3}\beta : \gamma = \frac{a'}{4} : b : c$

Da die Zonenaxe $\alpha = \sqrt{3}$, und $\gamma = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ist, so verhält sich

$$\alpha : \gamma = \sqrt{3} : \sqrt{\tfrac{3}{2}} = \sqrt{2} : 1 = a : c.$$

Daher bekamen wir für α und γ die gleichen Ausdrücke, als in der Projection a und c, nur β mußte regulirt werden, wozu ein einziger Flächenausdruck genügte. Axe b geht auf der Leucitoederprojection von l_0 nach l_4, das gibt auf der Würfelprojection in der Sectionslinie $3\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}}$. Nehmen wir dieß als Einheit, so kann man die Ausdrücke von b ablesen, denn es ist $\alpha : \beta : \gamma = \sqrt{3} : \sqrt{\frac{9}{2}} : \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{2} : \sqrt{3} : 1$.

Wenn man unsern Gang mit dem von Miller (Treat. Cryst. 1839 pag. 15) vergleicht, so scheint er mir nicht blos anschaulicher, sondern auch überraschend einfacher. Dabei sind die Coefficienten $mn\mu\nu$ unabhängig vom rechten Winkel, denn der Pythagoras wurde blos zur Bestimmung der irrationalen Axenverhältnisse benützt. Wir können daher den Satz unmittelbar auf schiefe Axen anwenden, auf

Kalkspath.

Hauy, und nach ihm die Engländer, pflegen beim rhomboedrischen Systeme von drei gleich langen Rhomboederkanten, die sich unter gleichen schiefen Winkeln schneiden, statt der 3 + 1 Axe, auszugehen. Es gibt das zwar einfache Verhältnisse, allein die Anschauung leidet darunter Noth, wenn man nicht mit der Kugelfläche zu arbeiten gewohnt ist.

Nehmen wir zwei schiefe Axen Qa = a und Qb = b, die sich unter 60° schneiden, und denken uns c im Mittelpunkte Q senkrecht auf beide, so genügen diese zur Bezeichnung in dreigliedriger Stellung. Die $\alpha\beta\gamma$ mögen dann die Kantenzonenpunkte der Würfelflächen sein. Dieselben werden jetzt nicht durch Rechtecke, sondern durch die Resultanten αQ, βQ, γQ bestimmt. Nehmen wir α hinten für m und n als positive Gabel, so ist $\alpha b' = \alpha a' = 1 = m = n$; $\beta b' = 2a = 2 = m_,$, $\beta a_2 = b' = -1 = n_,$; $\gamma a' = 2b = 2 = n_0$, $\gamma b_2 = a' = -1 = m_0$. Das gibt die schematische Formel

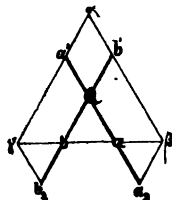
$$\frac{\alpha}{1 + \mu + \nu} : \frac{\beta}{1 - 2\mu + \nu} : \frac{\gamma}{1 + \mu - 2\nu}.$$

ω Würfel a : b, $\mu=\nu=1$ $\frac{\alpha}{3} : \frac{\beta}{0} : \frac{\gamma}{0}$ = a : ∞b : ∞c = 100

o Oktaeder $\frac{a}{2}$: ∞b, $\mu=2$, $\nu=0$ $\frac{\alpha}{3} : -\frac{\beta}{3} : \frac{\gamma}{3}$ = a : b′ : c = 111

$\frac{a'}{2} : \frac{b'}{2}$, $\mu=\nu=-2$ $-\frac{\alpha}{3} : \frac{\beta}{3} : \frac{\gamma}{3}$ = a′ : b : c = 111

g Granat. 2a : ∞b, $\mu=\frac{1}{2}$, $\nu=0$ $\frac{2\alpha}{3} : \frac{\beta}{0} : \frac{2}{3}\gamma$ = a : ∞b : c = 101



2a′ : 2b′, $\mu=\nu=-\frac{1}{2}$

$\frac{\alpha}{0} : \frac{2}{3}\beta : \frac{2}{3}\gamma$ = ∞a : b : c = 011

g, $\frac{a'}{\infty} : \frac{b}{\infty}$, $\mu=-\infty$, $\nu=\infty$

$\alpha : -\frac{\beta}{3.\infty} : \frac{\gamma}{3.\infty}$ = ∞a : b′ : c = 011

π Pmw. 3a : $\frac{3}{2}$b, $\mu=\frac{1}{3}$, $\nu=\frac{2}{3}$ $\frac{\alpha}{2} : \beta : \frac{\gamma}{0}$ = $\frac{1}{2}$a : b : ∞c = 210

— 3a′ : $\frac{3}{2}$b′, $\mu=-\frac{1}{3}$, $\nu=\frac{2}{3}$ $\frac{\alpha}{0} : \beta : \frac{\gamma}{2}$ = ∞a : 2b : c = 012

π, — $\frac{1}{2}$a : $\frac{1}{3}$b, $\mu=2$, $\nu=3$ $\frac{\alpha}{6} : \frac{\beta}{0} : \frac{\gamma}{3}$ = $\frac{a}{2}$: ∞b : c = 201

l Leucit. 4a : 4b, $\mu=\nu=\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}\alpha : \frac{4}{3}\beta : \frac{4}{3}\gamma$ = $\frac{1}{2}$a : b : c = 211

p Pyrok. 5a : ∞b, $\mu=\frac{1}{5}$, $\nu=0$ $\frac{5}{6}\alpha : \frac{5}{3}\beta : \frac{5}{6}\gamma$ = a : 2b : c = 212

x 48fl. $\frac{4}{3}$b : 4a′, $\mu=-\frac{1}{4}$, $\nu=\frac{3}{4}$ $\frac{2\alpha}{3} : \frac{4}{9}\beta : -\frac{4}{3}\gamma$ = $\frac{a}{2} : \frac{b}{3}$: c′ = 231

Die Beispiele aus dem regulären Systeme sind sehr passend, weil man aus den Resultaten gleich auf die Richtigkeit der Rechnung schließen kann.

Nur auf + und — der Punkte und Flächen muß ich nochmals kurz zurück kommen. Wenn die Fläche c : $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ nach der Linearmethode dasteht, und es strahlen die Zonenaxen ihr vom Mittelpunkte entgegen, dann sind m und n ebenfalls +, d. h. die positiven und negativen Vorzeichen correspondiren denen von μ und ν. Die Fußpunkte der Axen $\alpha\beta\gamma$ müssen dann aber in der obern Projectionsebene gedacht werden. Denken wir uns dagegen dieselben in der untern, d. h. die Zonenaxen von c ausstrahlend, so müssen wir die Ebene + c : $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ durch den Mittelpunkt gelegt denken, wo sie natürlich das Vorzeichen — c : $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ annimmt. Im Handb. Mineral. 1863 pag. 71 habe ich den Beweis auf diese Weise geführt, es wurde die Fläche durch den Mittelpunkt gelegt, wo dann der Schnitt l aus der Proportion x : p = k : p, — p sich ergab, mit derselben Formel aber für den

vordern Quadranten, was oben für den hintern gilt. Bei dieser Anschauung strahlen die Axen $\alpha\beta\gamma$ dann von c zur untern Ebene.

Beim Kalkspath setzten wir α positiv $1+\mu+\nu$, wir gaben damit der Anschauung Raum, daß der Punkt in der obern Ebene liegt, die Flächen $\frac{c}{1}:\frac{a}{\mu}:\frac{b}{\nu}$ behalten dann ihre gewöhnlichen Vorzeichen, und hätten wir allgemein $\frac{c}{\pi}$, so verwandelte sich der Ausdruck in $\pi+\mu+\nu$. Der Würfel wird dann richtig $\omega = 100$. Wollten wir α negativ $1-\mu-\nu$ setzen, so muß die Fläche auch ihre Zeichen vertauschen. Also

	$\omega_{,} = \overset{\mu}{+1}\overset{\nu}{+1}$	$\omega = \overset{\mu}{-1}\overset{\nu}{-1}$	$o = \overset{\mu}{-2}\overset{\nu}{+0}$	$o = \overset{\mu}{+2}\overset{\nu}{+2}$
$1-\mu-\nu$ gibt	-1	$+1$	$+3$	-3,
$1+2\mu-\nu$ ...	$+2$	0	-3	$+3$,
$1-\mu+2\nu$ ...	$+2$	0	$+3$	$+3$.

Fläche $\omega_{,}$ würde fehlerhaft sein; dagegen ωoo mit entgegengesetzten Zeichen richtig. Denken wir uns daher blos in die Linearmethode, so müssen $\frac{a}{\mu}$ und $\frac{b}{\nu}$ die entgegengesetzten Vorzeichen von ma und nb bekommen.

Zonenaxenschnitte.

Sämmtliche Zonenaxen werden von gleichwerthigen Flächen in gleichem Verhältniß geschnitten. Es ist das eigentlich nichts weiter, als die erweiterte Regel der Kantenzonenschnitte.

Fixiren wir zunächst einmal die Fußpunkte der **Granatoederkanten** g, so haben wir dafür folgende allgemeine Formeln:

$\mu\ \nu\quad \frac{g}{1+\mu+\nu}, \frac{g}{1+\mu-\nu}, \frac{g}{1-\mu+\nu}, \frac{g}{1-\mu-\nu}$. Fläche $a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a$ gibt

$2\ 3\quad \frac{g}{6}, \frac{g}{0}, \frac{g}{2}, -\frac{g}{4}$; Fläche $2a : a : \frac{2}{3}a$ gibt

$\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\quad \frac{g}{3}, \frac{g}{0}, \frac{g}{2}, -g$; Fläche $3a : \frac{3}{2}a : a$ gibt

$\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\quad \frac{g}{2}, \frac{3}{2}g, \frac{3}{4}g, \frac{g}{0}$. Es verhält sich

$$\infty : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{6} = \infty : 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{3} = \infty : \tfrac{3}{2} : \tfrac{3}{4} : \tfrac{1}{2} = \infty : 6 : 3 : 2.$$

Für **Oktaederkanten** o ist Formel

$\mu\ \nu\quad \frac{o}{1+\mu}, \frac{o}{1+\nu}, \frac{o}{1-\mu}, \frac{o}{1-\nu}, \frac{o}{\mu+\nu}, \frac{o}{\mu-\nu}$ gibt für

$2\ 3\quad \frac{o}{3}, \frac{o}{4}, -o, -\frac{o}{2}, \frac{o}{5}, -o$, für

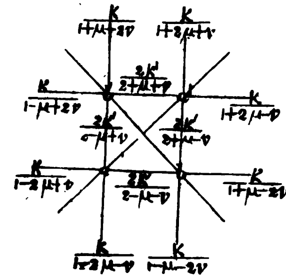
$\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\quad \frac{3}{4}o, \frac{3}{5}o, \frac{3}{2}o, 3o, o, -3o$. Es verhält sich

$$1 : 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{5} = 3 : 3 : \tfrac{3}{2} : 1 : \tfrac{3}{4} : \tfrac{3}{5}.$$

Es sind ganz die gleichen Zahlen, wie oben pag. 361. Ein neuer Be-

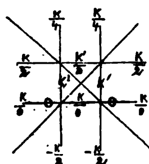
weis für das Gesetz der Kantenzonen, was wir hier unter allgemeinerem Gesichtspunkte auffassen. So lange wir nur Digonalen (Oktaederkanten) und Trigonalen (Granatoederkanten) haben, reichen wir mit dem Kantenzonengesetz. Aber schreiten wir nun zu den

Zwölf Diagonalzonen des Oktaeders, so reicht die Kantenzonenformel nicht mehr aus. Wir müssen die Fußpunkte dieser gleichwerthigen Zonenaxen nach der Zonenaxenschnittformel hinschreiben, was flugs geschehen kann. Denn fixirt man z. B. die hintere rechts, so ist der Zonenpunkt 2a′ + b′, folglich in der allgemeinen Formel pag. 379 m = 2, n = 1, und daraus folgen dann alle acht äußern sofort. Für die hintere innere ist der Zonenpunkt $\frac{1}{2}$a′ + $\frac{1}{2}$b′, also m = n = $\frac{1}{2}$, daher kommt mit 2 wegmultiplicirt vorn im Zähler und Nenner die 2. Daraus lassen sich dann für jede beliebige Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ in nachfolgender Weise finden:



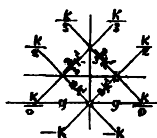
	Oktaeder. $\mu=\nu=1$	Granat. $\mu=1, \nu=0$	Pyramidw. $\mu=0, \nu=2$	Leucit. $\mu=\nu=1/2$	Pyrokt. $\mu=\nu=2$	Pyrmgr. $\mu=2, \nu=3$
$\frac{2k'}{2+\mu+\nu}$	$\frac{k'}{2}$	$\frac{2k'}{3}$	$\frac{k'}{2}$	$\frac{2}{3}k'$	$\frac{k'}{3}$	$\frac{2}{7}k'$
$\frac{2k'}{2+\mu-\nu}$	k'	$\frac{2k'}{3}$	$\frac{2k'}{0}$	k'	k'	$2k'$
$\frac{2k'}{2-\mu+\nu}$	k'	$2k'$	$\frac{k'}{2}$	k'	k'	$\frac{2}{3}k'$
$\frac{2k'}{2-\mu-\nu}$	$\frac{2k'}{0}$	$2k'$	$\frac{2k'}{0}$	$2k'$	$-k'$	$-\frac{2}{3}k'$
$\frac{k}{1+\mu+2\nu}$	$\frac{k}{4}$	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{5}$	$\frac{2}{5}k$	$\frac{k}{7}$	$\frac{k}{9}$
$\frac{k}{1+2\mu+\nu}$	$\frac{k}{4}$	$\frac{k}{3}$	$\frac{k}{3}$	$\frac{2}{5}k$	$\frac{k}{7}$	$\frac{k}{8}$
$\frac{k}{1+2\mu-\nu}$	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{3}$	$-k$	$\frac{2}{3}k$	$\frac{k}{3}$	$\frac{k}{2}$
$\frac{k}{1+\mu-2\nu}$	$\frac{k}{0}$	$\frac{k}{2}$	$-\frac{k}{3}$	$2k$	$-k$	$-\frac{k}{3}$
$\frac{k}{1-\mu+2\nu}$	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{0}$	$\frac{k}{5}$	$\frac{2}{3}k$	$\frac{k}{3}$	$\frac{k}{5}$
$\frac{k}{1-2\mu+\nu}$	$\frac{k}{0}$	$-k$	$\frac{k}{3}$	$2k$	$-k$	$\frac{k}{0}$
$\frac{k}{1-\mu-2\nu}$	$-\frac{k}{2}$	$\frac{k}{0}$	$-\frac{k}{3}$	$-2k$	$-\frac{k}{5}$	$-\frac{k}{7}$
$\frac{k}{1-2\mu-\nu}$	$-\frac{k}{2}$	$-k$	$-k$	$-2k$	$-\frac{k}{5}$	$-\frac{k}{6}$.

Machen wir uns den Schnitt der **Oktaederfläche** $o = a : b$ in



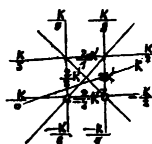
einer Figur anschaulich, so muß sie $\frac{k}{0} = \infty k$ in denjenigen drei Diagonalzonen haben, die in ihr selbst liegen. Darnach ordnen sich die übrigen von selbst, und man sieht den Zeichen an, ob man einen Fehler gemacht habe oder nicht. Die kleine Figur macht das klar, wo oo die Lage der Oktaederfläche bezeichnet, die man, um die volle Anschauung zu haben, durch den Mittelpunkt legen muß. Alle Ausdrücke sind symmetrisch gegen die Oktaederfläche nach links und rechts geordnet.

Das **Granatoeder** $g = a : \infty b$ zeigt dagegen die Symmetrie der



Ausdrücke gegen die mediane Axe. Es sind daher nur noch zwei Nullen darin, mit welchen sie links und rechts unendlich geht. Die negativen und positiven Vorzeichen werden sogleich verständlich, wenn man die Granatoederfläche g aus dem gemeinsamen Punkte herausrückt. In unserm Falle liegt sie vorn in $\frac{k}{0} = \infty k$, diesen bleibt sie bei allen Verrückungen parallel. Rücke ich nach hinten, so werden alle der Hinterseite unterhalb des Punktes also positiv, die vordern dagegen in ihrer Verlängerung über den gemeinsamen Punkt hinaus also negativ geschnitten. Bewegte ich dagegen die g nach vorn, so wäre die Sache entgegengesetzt, hinten negativ und vorn positiv. Nur der Pyramidenwürfel schließt sich dieser Symmetrie an. Leucitoeder und Pyramidenoktaeder folgen dagegen wieder dem Oktaeder. Erst das

Pyramidengranatoeder entbehrt aller Symmetrie, wie schon die



Lage der vereinzelten Null zeigt. Das negative Vorzeichen bedeutet, daß die Zonenaxen jenseits des gemeinsamen Punktes getroffen werden. Der gefundene Faktor bezieht sich immer auf die Einheit

$$k = \sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2}.$$

Da nun für k' $m = n = \frac{1}{2}$ und für k $m = 2$ und 1 und $n = 1$ und 2 wird, so haben wir im regulären System $k' = \sqrt{\frac{3}{2}}$ und $k = \sqrt{6} = 2\sqrt{\frac{3}{2}}$, also zweierlei Zonenaxenlängen in den Diagonalzonen, die sich wie 1 : 2 verhalten.

Der Satz findet besonders bei Verfertigen von Modellen und Zeichnungen Anwendung. Zu dem Ende ist es practisch, sich ein für allemal ein Blatt mit den Formeln anzulegen, wie sie zu den Kantenfußpunkten der gewöhnlichen Körper $\omega o g l \pi p x$ gehören, indem wir die Buchstaben für die Kantenlängen k setzen. Dann darf ich nur hinblicken. Mit 0 und ∞ muß man etwas vorsichtig sein. In den Axen a ist $n = \nu = 0$,

in b dagegen $m = \mu = 0$. Im Mittelpunkte daher $m = n = \mu = \nu = 0$, folglich bleibt $\frac{\omega}{1}$. Die 1 deutet Axe c an. Das ist in allen vier Quadranten die einzige Constante $+ 1$; unter der Projectionsebene würde sie erst $- 1$ werden. In der allgemeinsten Formel würde sie $p\pi$ sein. Vorn in Axe a verwandelt sich $1 - m\mu - n\nu$ in $1 - m\mu$; hier ist für den Würfel $m = \infty$, also $1 - m\mu = 1 - \infty\mu = -\infty\mu$, weil 1 gegen Unendlich verschwindet. Die Zonenkante $k = \omega$ ist aber selbst unendlich lang, also haben wir $\frac{\infty k}{-\infty\mu} = \frac{k}{-\mu} = \frac{\omega}{-\mu}$, denn durch die Buchstaben soll blos angedeutet werden, zu welchem Körper die Kante gehöre. Daher gibt die Granatoederfläche im positiven Quadranten $m = n = \infty$, und da die Zonenaxe selbst unendlich ist $\frac{g}{\mu + \nu}$.

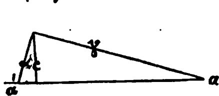
Das Oktaeder stumpft die drei Kanten der rhomboedrischen Ecke des Leucitoeders $l = a : a : \frac{1}{3}a$ gerade ab. Wir haben also die Fußpunkte dieser Kanten aufzusuchen, und $\mu = \nu = 1$ zu setzen, gibt

$$\frac{l'}{1 + \mu - 3\nu} : \frac{3l}{3 - \mu - \nu} : \frac{l'}{1 - 3\mu + \nu} = -l' : 3l : -l' = 1 : 3 : 1.$$

Hier ist nun in Erwägung zu ziehen, daß die Länge von $l' = \sqrt{11}$ und $l = \frac{1}{3}\sqrt{11}$, wodurch die Gleichheit erwiesen ist. Die Rechnung der Kantenzonenlängen im gegebenen Falle ist so leicht zu ersehen, daß ich es nicht für nöthig halte, sie hinzusetzen.

Bei zweiundeingliedrigen Systemen wird es oft wünschenswerth, irgend eines der augitartigen Paare als Säule zu nehmen. Wir dürfen zu dem Ende nur die Punkte der drei neugewählten Axen auf der Projectionsebene fixiren, und die Ausdrücke der alten Axen darein setzen.

Beispiel. Augit. Wir wünschen das hintere Paar $o = a' : c : \frac{1}{2}b$ zur Säule, dann würde Kante o/o uns die Richtung der neuen Axe γ geben. Senkrecht dagegen, also in der Geradendfläche dieser neuen Säule würden die beiden andern Axen α und β liegen. Die neue β behält ihre Richtung mit der alten b bei: es wäre also die Richtung von α noch zu bestimmen. Wir gehen von den alten Weiß'schen Näherungswerthen $a : b : c = \sqrt{13} : \sqrt{12} : 1$ aus, machen einen Aufriß in ac, so ist $\gamma = \sqrt{1 + 13} = \sqrt{14}$. Da α als neue Säulenaxe senkrecht gegen

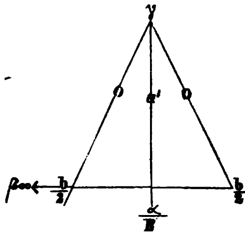


γ stehen muß, so geht α von $c : \frac{1}{a}$, denn es muß $c^2 = a \cdot \frac{1}{a} = 1$ sein. Es ist das bekannte Invertirungsgesetz. Folglich $\alpha = \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{\frac{14}{13}}$.

Das Verhältniß der neuen Axen wird also:

$\alpha : \beta : \gamma = \sqrt{\tfrac{14}{13}} : \sqrt{12} : \sqrt{14} = \sqrt{\tfrac{1}{13}} : \sqrt{\tfrac{12}{14}} : 1 = \tfrac{1}{13}\sqrt{13} : \sqrt{\tfrac{6}{7}} : 1.$

Da die Figur bilateral nach den Axen $a\alpha\gamma$ ist, so handelt es sich blos um das Vorzeichen der Axen a und α.



Wir wollen, wie oben, hinten die positive Form $1 + m\mu + n\nu$ nehmen, damit für μ und ν wie gewöhnlich vorn das + bleibt. Dann ist für γ hinten $n = 0$, $m = 1$, folglich $\frac{\gamma}{1+\mu}$; für α vorn $n = 0$, $m = \tfrac{1}{13}$, folglich $\frac{13\alpha}{13-\mu}$; für β haben wir, wie beim Würfel, $\frac{\beta}{\nu}$. Um einfachere Ausdrücke zu bekommen, setzen wir $13\alpha = A$, so entsteht folgendes einfache Schema:

		$\mu,\ \nu$			
			$\frac{A}{13-\mu}$:	$\frac{\beta}{\nu}$:	$\frac{\gamma}{1+\mu}$	
P	$a : \infty b$	$1,\ 0$	$\frac{A}{12} : \frac{\beta}{0} : \frac{\gamma}{2}$	$= \tfrac{1}{6}A : \infty\beta : \gamma.$
x	$a' : \infty b$	$-1,\ 0$	$\frac{A}{14} : \frac{\beta}{0} : \frac{\gamma}{0}$	$= A : \infty\beta : \infty\gamma.$
o	$a' : \tfrac{1}{2}b$	$-1,\ 2$	$\frac{A}{14} : \frac{\beta}{2} : \frac{\gamma}{0}$	$= \tfrac{1}{7}A : \beta : \infty\gamma.$
	$a : \tfrac{1}{2}b$	$1,\ 2$	$\frac{A}{12} : \frac{\beta}{2} : \frac{\gamma}{2}$	$= \tfrac{1}{6}A : \beta : \gamma.$
T	$\frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty}$	$\infty,\ \infty$	$\frac{A}{-\infty} : \frac{\beta}{\infty} : \frac{\gamma}{\infty}$	$= A' : \beta : \gamma.$
z	$\frac{a}{\infty} : \frac{b}{3\infty}$	$\infty,\ 3\infty$	$\frac{A}{-\infty} : \frac{\beta}{3\infty} : \frac{\gamma}{\infty}$	$= A' : \tfrac{1}{3}\beta : \gamma.$
z'	$\frac{a'}{3\infty} : \frac{b}{\infty}$	$3\infty,\ \infty$	$\frac{A}{-3\infty} : \frac{\beta}{\infty} : \frac{\gamma}{3\infty}$	$= A : 3\beta : \gamma.$
k	$\frac{a}{\infty} : b$	$\infty,\ 1$	$\frac{A}{-\infty} : \beta : \frac{\gamma}{\infty}$	$= A' : \infty\beta : \gamma.$
M	$a : \frac{b}{\infty}$	$1,\ \infty$	$\frac{A}{12} : \frac{\beta}{\infty} : \frac{\gamma}{2}$	$= \infty A : \beta : \infty\gamma.$
n	$a : \frac{b}{4}$	$1,\ 4$	$\frac{A}{12} : \frac{\beta}{4} : \frac{\gamma}{2}$	$= \tfrac{1}{6}A : \tfrac{1}{2}\beta : \gamma.$
n,	$a' : \frac{b}{4}$	$-1,\ 4$	$\frac{A}{14} : \frac{\beta}{4} : \frac{\gamma}{0}$	$= \tfrac{1}{7}A : \tfrac{1}{2}\beta : \infty\gamma.$
c	$\frac{a}{0} : \frac{b}{0}$	$0,\ 0$	$\frac{A}{13} : \frac{\beta}{0} : \gamma$	$= \tfrac{1}{13}A : \infty\beta : \gamma.$

m	$\frac{a}{3} : \frac{b}{2}$	3,	2	$\frac{A}{10} : \frac{\beta}{2} : \frac{\gamma}{4} = \frac{2}{5}A : 2\beta : \gamma.$
	$a' : \frac{b}{6}$	—1,	6	$\frac{A}{14} : \frac{\beta}{6} : \frac{\gamma}{0} = \frac{1}{7}A : \frac{1}{3}\beta : \infty\gamma.$
u	$\frac{a}{3} : \frac{b}{4}$	3,	4	$\frac{A}{10} : \frac{\beta}{4} : \frac{\gamma}{4} = \frac{2}{5}A : \beta : \gamma.$
u,	$\frac{a'}{3} : \frac{b}{4}$	—3,	4	$\frac{A}{16} : \frac{\beta}{4} : \frac{\gamma}{-2} = \frac{1}{8}A' : \frac{1}{2}\beta : \gamma.$
λ	$\frac{a'}{5} : \frac{b}{6}$	—5,	6	$\frac{A}{18} : \frac{\beta}{6} : \frac{\gamma}{-4} = \frac{2}{9}A' : \frac{2}{3}\beta : \gamma.$
e	$\frac{a}{3} : \frac{b}{6}$	3,	6	$\frac{A}{10} : \frac{\beta}{6} : \frac{\gamma}{4} = \frac{2}{5}A : \frac{2}{3}\beta : \gamma.$

Das sind also die Ausdrücke für die neuen Axen $A : \beta : \gamma = \sqrt{13} : \sqrt{\frac{6}{7}} : 1$. Suchen wir zur Controle den halben Säulenwinkel T/T, welcher tg = $b : a = \sqrt{\frac{12}{13}}$ beträgt, so haben wir für $T = A' : \beta : \gamma$ in der Formel

$$tg = ab\sqrt{1 + m^2a^2 + n^2b^2} : n\mu b^2 - m\nu a^2$$

$m = 1, n = 0; \mu = \nu = 1$ zu setzen, das gibt

$$tg = \sqrt{\frac{13 . 6}{7}}\sqrt{1 + 13} : 13 = \sqrt{\frac{12}{13}}.$$

Da alle diese Flächen in einem Zonenzusammenhange stehen, so dürfen wir nur ein passendes Oktaid auf die neue Geradendfläche projiciren, um dann das Uebrige durch Linien zu deduciren.

Neumann (Beitr. Krystallon. 1823 pag. 78) behandelt dasselbe Problem mit Coordinaten, wobei er den bekannten Satz der Mechanik anwendet, eine Kraft p in drei auf einander senkrecht wirkende Kräfte p cos α, p cos β, p cos γ zu zerlegen. Wir verfolgen das, als den weitläufigeren Weg, nicht, sondern wollen nur kurz andeuten, wie das dortige Beispiel vom

Schwerspath auf unsere Weise anzugreifen wäre: Derselbe soll auf die Geradendfläche einer Säule projicirt werden, welche durch die Flächen $a' : b : c$ und $b' : c : \infty a$ gebildet wird. Näherungsweise werden die Schwerspathaxen

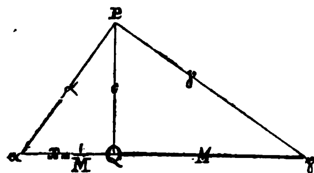
$$a : b : c = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{\frac{21}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{8}{21}} : \sqrt{\frac{12}{21}} : 1 = 0,62 : 0,76 : 1$$

angenommen. Ein Paar Linien orientiren uns sofort in der Lage der neuen Axenpunkte $\alpha\beta\gamma$. Der Fußpunkt von Axe γ ist durch den Schnitt $3 = a' : b : c$ und $5 = b' : \infty a : c$ gegeben, Punkt $\gamma = 2m + n$. Folg-

lich wird $\gamma Q = M = \sqrt{4a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{44}{21}}$. Da nun die neue Fläche G senkrecht gegen Axe γ stehen muß, so ist damit der Fußpunkt von Axe α in der verlängerten Linie M gefunden, denn es muß

$$Q\alpha = \frac{1}{M} = \sqrt{\frac{21}{44}}$$

sein, wie nebenstehender Aufriß sofort beweist, worin $c^2 = 1 = M . x$,



$x = \frac{1}{M}$ beträgt. Da sich ferner

$b' : M = \frac{1}{M} : QB$ und $2a' : M = \frac{1}{M} : QA$

verhält, so geht die gesuchte Geradendfläche

$$G = A : B = \frac{1}{2a} : \frac{1}{b} : c = \frac{a}{2a^2} : \frac{b}{b^2} : c = \tfrac{21}{16}a : \tfrac{21}{12}b : c.$$

Auf dieselbe Weise finden wir die Coordinaten mn des Fußpunktes α, denn es ist

$$2a : ma = b : nb = M : \frac{1}{M},\ ma = \frac{2a}{M^2} = \tfrac{21}{22}a \text{ und } nb = \frac{b}{M^2} = \tfrac{21}{44}b.$$

Während Axe γ vom gemeinsamen außerhalb der Projectionsebene liegenden Punkt P nach Punkt γ, und Axe α nach Punkt α gehen, so muß β senkrecht gegen die Ebene $\gamma P \alpha$ stehen, und von P aus parallel der Sectionslinie G ins Unendliche strahlen. Der Geübte übersieht alle diese einfachen Verhältnisse mit einem Blicke, und darf die Flächenformel nur hinschreiben:

$$\frac{\gamma}{1+2\mu+\nu} : \frac{44\alpha}{44-42\mu-21\nu} : \frac{16\beta}{21\mu-28\nu}.$$

$a : b\ \mu = \nu = 1$	$\frac{\gamma}{4} : \frac{44\alpha}{-19} : \frac{16\beta}{-7}$	(1)
$a : b'\ \mu = 1,\ \nu = -1$	$\frac{\gamma}{2} : \frac{44\alpha}{23} : \frac{16}{49}$	(2)
$a' : b\ \mu = -1,\ \nu = 1$	$\frac{\gamma}{0} : \frac{44\alpha}{65} : \frac{16\beta}{-49}$	(3)
$a' : b'\ \mu = \nu = -1$	$\frac{\gamma}{-2} : \frac{44\alpha}{107} : \frac{16\beta}{7}$	(4)
$\infty a : b'\ \mu = 0,\ \nu = -1$	$\frac{\gamma}{0} : \frac{44\alpha}{65} : \frac{16\beta}{28}$	(5)

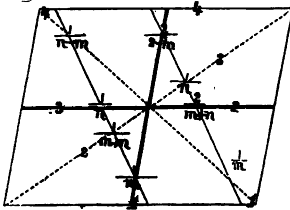
$\gamma = \sqrt{1 + M^2} = \sqrt{\frac{65}{21}}$; $\alpha = \sqrt{1 + \frac{1}{M^2}} = \sqrt{\frac{65}{44}}$. Blos β schneidet die Projectionsebene nicht, wir müssen daher irgend eine Einheit wählen: dazu bietet sich auf Sectionslinie G das Stück $\alpha\beta$ oder $\alpha\beta'$. Eine leichte Rechnung gibt Linie

$$\alpha\beta = \beta = \tfrac{65}{88}\sqrt{\tfrac{44}{11}} = \tfrac{65}{7}\sqrt{\tfrac{1}{7 \cdot 22}} \text{ und } \alpha\beta' = \beta' = \tfrac{65}{4}\sqrt{\tfrac{1}{7 \cdot 22}}.$$

Folglich verhält sich $\beta : \beta' = \frac{1}{7} : \frac{1}{4} = 4 : 7$. Dasselbe Verhältniß findet

zwischen $\frac{1}{4}\frac{6}{8}\beta : \frac{1}{3}\frac{6}{8}\beta = \frac{1}{7} : \frac{1}{4}$ statt, bei gleichem α ($\frac{4}{8}\frac{4}{3}\alpha$). Ein Beweis für die Richtigkeit unserer allgemeinen Formel. Da die Sache wohl nur selten practische Wichtigkeit bekommt, so will ich sie nicht weiter verfolgen. Aber sie dient als Beweis, mit wie wenigen Mitteln man die allgemeinsten Probleme lösen kann.

Einige Anwendungen der entwickelten Sätze werden hier noch am Platze sein. Ich knüpfe an den **Euklas** von Weiß (Abh. Berl. Akad. Nov. 1841) an, und werde, um die Einfachheit unserer Methode zu zeigen, abgesehen von allen Zahlen, wie dort, die Buchstabenformeln entwickeln, und zwar einzig und allein mit Hilfe des Kantenzonengesetzes. Vor allem muß man sich den nebenverzeichneten Satz wieder ins Gedächtniß rufen.



Gehen wir dabei von den Kantenzonen $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ aus, so ist nach pag. 199 die zwischenliegende Axe $b = \frac{1+1}{m+n}$, die außenliegende $a = \frac{1+1}{n-m}$. Suchen wir dann umgekehrt aus den Axenschnitten $\frac{2}{m+n}$ und $\frac{2}{n-m}$ die Kantenzonen, so ist $\frac{1}{n} = \frac{2}{(m+n)+(n-m)} = \frac{2}{2n}$; und $\frac{1}{m} = \frac{2}{(m+n)-(n-m)} = \frac{2}{2m}$. Oder besser bringen wir es auf die Form $\frac{1}{\frac{m+n}{2}}$ und $\frac{1}{\frac{n-m}{2}}$, so hat die zwischenliegende Axe

$$b \text{ im Nenner } \frac{m+n}{2} + \frac{n-m}{2} = n, \text{ und die außenliegende}$$

$$a \;.\;.\;.\;.\; \frac{m+n}{2} - \frac{n-m}{2} = m.$$

Dies haben wir immer im Gedächtniß gegenwärtig. Dagegen unterscheiden wir **rechts** folgende vier Fälle:

Gegeben 1 und 2, gesucht $4 = 2 - 1 = \frac{m+n}{2} - m = \frac{n-m}{2}$;

— 1 und 4, — $2 = 1 + 4 = m + \frac{n-m}{2} = \frac{m+n}{2}$;

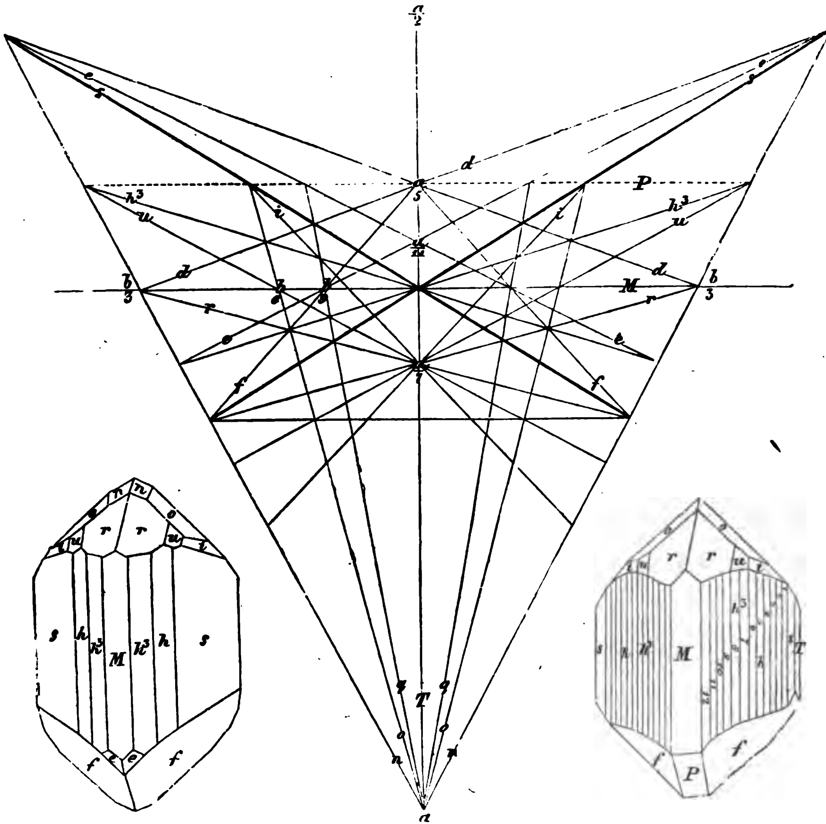
— 3 und 2, — $4 = 3 - 2 = n - \frac{m+n}{2} = \frac{n-m}{2}$;

— 3 und 4, — $2 = 3 - 4 = n - \frac{n-m}{2} = \frac{m+n}{2}$.

Links sind die Axen mit $\frac{a}{m} : \frac{b}{n}$ bezeichnet, da ergeben sich außer den Kantenzonen wieder vier Fälle:

Gegeben 1 und 2, gesucht $3 = 2 - 1 = (m + n) - m = n$;
— 1 und 4, — $3 = 1 + 4 = m + (n - m) = n$;
— 3 und 2, — $1 = 2 - 3 = (m + n) - n = m$;
— 3 und 4, — $1 = 3 - 4 = n - (n - m) = m$.

Gehen wir nun beim Euklas von der Säule s/s aus, fixiren darin zwei beliebige Punkte als Kantenzonen: vorn $\frac{1}{m}$ und hinten $\frac{1}{n}$, so muß Fläche



$$n = \frac{2a}{m - n} : \frac{2b}{m + n}$$

sein, denn das ist unmittelbare Folge des Kantenzonengesetzes, da n in $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ fällt.

$$d = \frac{2a'}{m + 3n} : \frac{2b}{m + n}.$$

Den Ausdruck in b hat sie mit n gemein. Da sie nun außerdem in

die Kantenzone $\frac{1}{n}$ fällt, so muß ich den Ausdruck von b auf die Form $\frac{b}{\frac{m+n}{2}}$ bringen und $n + \frac{m+n}{2} = \frac{3n+n}{2}$ addiren, um den Divisor von a' zu erhalten.

$$r = \frac{2a}{3m+n} : \frac{2b}{m+n}$$

in $\frac{1}{m}$ und $\frac{2b}{m+n}$ ergibt sich ganz auf die vorige Weise.

$$f = \frac{2a'}{m+3n} : \frac{2b}{3(m+n)}$$

hat mit d den Ausdruck in a' gemein, und da sie weiter in die Kantenzone $\frac{1}{m}$ fällt, so ist eben auch wieder $\frac{m+3n}{2} + m = \frac{3m+3n}{2}$ zu machen, um den Divisor von b zu erlangen.

$$u = \frac{2a}{3m+n} : \frac{b}{m+n}$$

liegt mit r in gleicher Diagonalzone, und fällt dabei zugleich in die Kantenzone $\frac{1}{\frac{m-n}{2}}$, welche eine angenommene Schiefendfläche

$$\frac{2a}{m-n} : c : \infty b$$

mit der Säule s machen würde. Wir haben daher für den Divisor von b wieder nur $\frac{3m+n}{2} - \frac{m-n}{2} = m + n$ zu machen.

$$o = \frac{2a}{m-n} : \frac{b}{m+n}$$

$$q = \frac{2a}{m-n} : \frac{2b}{3(m+n)}$$

$$i = \frac{2a}{3m+n} : \frac{b}{2(m+n)}.$$

o und q kann man unmittelbar ablesen; für i ist dagegen noch die hintere Kantenzone $\frac{1}{\frac{m+3n}{2}}$, worin auch o fällt, maßgebend, ich habe also blos zu addiren

$$\frac{3m+n}{2} + \frac{m+3n}{2} = \frac{4m+4n}{2} = 2(m+n).$$

$$c = \frac{2a'}{3m+5n} : \frac{2b}{3(m+n)}$$

hat mit f und q den Ausdruck in b gemein, und liegt außerdem noch in der Kantenzone $\frac{1}{n}$, woraus durch Addition $\frac{1}{2}(m+n)+n=\frac{1}{2}m+\frac{3}{2}n$ folgt.

Wir haben also durch leichte Addition und Subtraction das scheinbar schwere Problem gelöst. Die allgemeinen Ausdrücke gewähren den Vortheil, daß sie uns lediglich nur den Zonenzusammenhang aufdecken, in der Wahl der Zahl können wir für m und n noch jeden beliebigen Ausdruck setzen.

Nützlicher wird es, von allgemeinen Axenzeichen auszugehen, und darnach erst die Kantenzonen zu bestimmen. Feldspath, Hornblende, Augit, Epidot, Gyps 2c. scheinen nach alter Weiß'scher Darstellung in einem gewissen innern Verbande zu stehen. Gehen wir dabei von einer Säule $T = a : b : \infty c$ aus, setzen die Schiefendfläche

$$m = n = 1 \qquad\qquad m = 0,\ n = 1$$

$$P = a : \infty b = \frac{a}{m} : \infty b = \infty a : \infty b : c$$

$$x = a' : \infty b = \frac{a'}{n} : \infty b = a' : \infty b : c, \text{ so ist}$$

$$o = a' : \frac{b}{2} = \frac{a'}{n} : \frac{b}{m+n} = a' : b : c,$$

denn sie fällt in die Diagonalzone von x und in die erste Kantenzone $\frac{1}{m}$, folglich (Formel links pag. 390) n (1) und m (4) gegeben und $3 = 1 + 4 = m + n$ gesucht.

$$n = a : \frac{b}{4} = \frac{a}{m} : \frac{b}{2(m+n)} = \infty a : \frac{b}{2} : c,$$

denn sie fällt in die Diagonalzone von P und in die Kantenzone $\frac{1}{m+2n}$ zwischen $\frac{a}{n}$ und $\frac{b}{m+n}$; daher wieder 1 und 4 gegeben, und $3 = m + (m + 2n) = 2m + 2n$ gesucht.

$$y = \frac{a'}{3} : \infty b = \frac{a'}{m+2n} : \infty b = \frac{a'}{2} : \infty b : c$$

ist durch die zweite Kantenzone zwischen $\frac{a}{n}$ und $\frac{b}{m+n}$ bestimmt.

$$u' = \frac{a'}{3} : \frac{b}{4} = \frac{a'}{m+2n} : \frac{b}{2(m+n)} = \frac{a'}{2} : \frac{b}{2} : c$$

ist unmittelbar aus der Projection zu ersehen, wie jede folgende Fläche, die einen bereits aufgeführten Ausdruck hat.

$$m = \frac{a}{3} : \frac{b}{2} = \frac{a}{2m+n} : \frac{b}{m+n} = a : b : c$$

1 und 4 gegeben $2 = 1 + 4 = m + (m + n) = 2m + n$ gesucht.

$$e = \frac{a}{3} : \frac{b}{6} = \frac{a}{2m + n} : \frac{b}{3(m + n)} = a : \frac{b}{3} : c$$

1 und 4 (zweite Kantenzone) gegeben

$$3 = 1 + 4 = 2m + n + (m + 2n) = 3m + 3n$$

gesucht.

$$s = a' : \frac{b}{6} = \frac{a'}{n} : \frac{b}{3(m + n)} = a' : \frac{b}{3} : c$$

$$t = \frac{a}{5} : \infty b = \frac{a}{3m + 2n} : \infty b = \frac{a}{2} : \infty b : c$$

durch die dritte Kantenzone zwischen $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{2(m + n)}$ gegeben.

$$u = \frac{a}{5} : \frac{b}{4} = \frac{a}{3m + 2n} : \frac{b}{2(m + n)} = \frac{a}{2} : \frac{b}{2}$$

$$g = \infty a : b = \frac{2a}{n - m} : \frac{2b}{m + n} = 2a : 2b : c$$

$$q = 3a' : \infty b = \frac{3a'}{2n - m} : \infty b = \tfrac{3}{2} a' : \infty b : c$$

$$z = 3a : b : \infty c = \frac{3a}{2n - m} : \frac{b}{(2n - m)} : \infty c$$
$$= 3a : b : \infty c$$

q und z fallen weder in Kantenzonen noch Axenschnitte, müssen daher aus dem Schnitte von o und n bestimmt werden.

o gibt $\mu = n$, $\nu = -(m+n)$; n gibt $\mu_{,} = -m$, $\nu_{,} = 2\ (m+n)$

$3(m+n)a : (n+m)b : [2(m+n)\ n - m(m+n)]c$

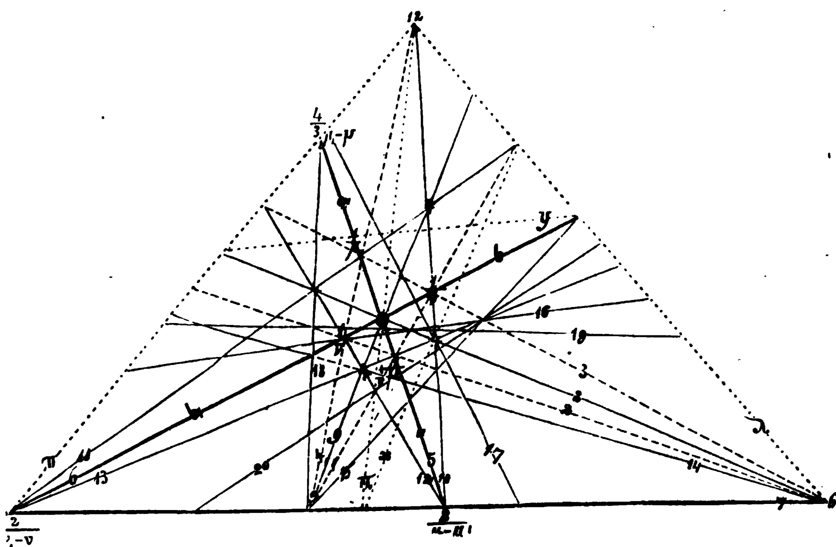
$$\frac{3a}{2n - m} : \frac{b}{2n - m}$$

für $z = \frac{3a}{2n-m} : \frac{b}{2n-m} : \infty c$ multiplicirt sich der Nenner weg, daher werden die Säulen unabhängig von m und n.

Setzen wir in dieser Formel $m = n = 1$, so kommen die Weiß'schen Axenausdrücke; setzen wir dagegen $m = 0$ und $n = 1$, so kommen die Naumann'schen, wie aus der hintern Columne ersehen werden kann. Aus der Null folgt eben die einfachere Zahl, allein auf das Zonenverhältniß übt das weiter keinen Einfluß.

Die vollständigste Anwendung der Zonenpunkt- und Sectionslinienformeln findet statt, wenn wir von der allgemeinen Projection des Oktaides, dem sogenannten vollständigen Viereck, ausgehen, und die aus den Endkanten abgeleiteten Hexaidlinien als Axen nehmen, wie ich das seiner Zeit (Beiträge zur rechn. Krystall. 1848 Progr. pag. 6) nachwies. Wir setzen

$$1 = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu};\ 2 = \frac{a}{\mu} : \frac{b'}{\nu_{,}};\ 3 = \frac{a'}{\mu_{,}} : \frac{b}{\nu};\ 4 = \frac{a'}{\mu_{,}} : \frac{b'}{\nu_{,}}.$$



Nur um die Quadranten zu unterscheiden, fügen wir a und b hinzu. Sonst bedarf es dieses Beisatzes nicht, denn man kann den ganzen Axenwerth in die griechischen Buchstaben $\mu\mu,$ $\nu\nu,$ legen, wie wir das schon oben pag. 354 bei den Flächenausdrücken des Albites thaten. Die Linien 5 und 6 bilden die Axen, auf welchen die Flächenwerthe abgetragen sind. Dann sind die Zonenpunkte der Oktaederseitenkanten, worin die dritte Hexaidfläche 7 liegt:

$$2\,.\,3\ \begin{matrix}\mu & -\nu_,\\ -\mu_, & \nu\end{matrix}\ \text{gibt}\ (\nu+\nu_,)\,a+(\mu+\mu_,)\,b+(\mu\nu-\mu_,\nu_,)\,c=\frac{Na}{P}+\frac{Mb}{P}+c.$$

$$1\,.\,4\ \begin{matrix}\mu & -\nu\\ -\mu_, & \nu_,\end{matrix}\ \text{gibt}\ (\nu_,+\nu)\,a+(\mu+\mu_,)\,b'+(\mu\nu_,-\mu_,\nu)\,c=\frac{Na}{P_,}+\frac{Mb'}{P_,}+c.$$

$$\begin{matrix}\frac{N}{P} & \cdots & \frac{M}{P}\\ \frac{N}{P_,} & \cdots & \frac{-M}{P_,}\end{matrix}\ \text{gibt}\ -\left(\frac{M}{P_,}+\frac{M}{P}\right)a:\left(\frac{N}{P}-\frac{N}{P_,}\right)b:-\left(\frac{M}{P_,}\cdot\frac{N}{P}+\frac{M}{P}\cdot\frac{N}{P_,}\right)c$$

$$=\frac{P+P_,}{2N}a:-\frac{P_,-P}{2M}:c$$

$$=\frac{\mu(\nu+\nu_,)-\mu_,(\nu+\nu_,)}{2(\nu+\nu_,)}:-\frac{\nu_,(\mu+\mu_,)-\nu(\mu+\mu_,)}{2(\mu+\mu_,)}b$$

$$=\frac{\mu-\mu_,}{2}a:\frac{\nu_,-\nu}{2}b'.$$

7. **Hexaidfläche** $=\frac{2}{\mu-\mu_,}a:\frac{2}{\nu_,-\nu}b'=\frac{2}{\mu_,-\mu}a:\frac{2}{\nu-\nu_,}b'.$

Es kommt nur darauf an, daß die Nenner in a und b' entgegengesetztes Zeichen haben, wie die Rechnung ergibt, je nachdem wir in der

Ecke oben anfangen und rechts herum, oder in der Ecke unten und links herum gehen, wie pag. 188 schon gezeigt wurde. Natürlich müssen, um die Coefficienten der Sectionslinien zu bekommen, die Bruchformen umgekehrt werden.

8. **Dodecaidfläche** zwischen ab liegt im Mittelpunkte (0 + 0) und im Punkte $2 . 3 = \frac{N}{P} + \frac{M}{P}$, folglich

$$\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \frac{N}{P} & \dots & \frac{M}{P} \end{matrix} \text{ gibt } \left(\frac{M}{P} - 0\right) a : \left(0 - \frac{N}{P}\right) b : 0c = \frac{M}{P} a : -\frac{N}{P} b : 0c$$

$$= Ma : -Nb : 0c = \frac{\mu + \mu_,}{0} a : -\frac{\nu + \nu_,}{0} b.$$

$$\text{Dodecaidfläche } 8 = \frac{0}{\pm(\mu + \mu_,)} a : \frac{0}{\mp(\nu + \nu_,)} b.$$

9. **Dodecaidfläche** zwischen ab′ findet sich ganz auf dieselbe Weise, sie liegt im Punkt $1 . 4 = \frac{N}{P_,} + \frac{M}{P_,}$, folglich

$$\begin{matrix} \frac{N}{P_,} & \dots & \frac{M}{P_,} \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} \text{ gibt } \left(0 - \frac{M}{P_,}\right) a : \left(\frac{N}{P_,} - 0\right) b' : 0c = -Ma : Nb' : 0c$$

$$= -\frac{\mu + \mu_,}{0} a : \frac{\nu + \nu_,}{0} b,$$

$$\text{Dodecaidfläche } 9 = \frac{0}{\mp(\mu + \mu_,)} a : \frac{0}{\pm(\nu + \nu_,)} b'.$$

Dodecaidflächen 8 und 9 unterscheiden sich blos durch die Lage b und b′. Das ± kommt, je nachdem ich 0 . . . 0 oben oder unten hinsetze, oder je nachdem ich rechts in der untern Ecke anfange und links, oder in der obern und rechts herumgehe. Die übrigen vier Dodecaidflächen 10—13 kann ich unmittelbar ablesen.

$$10 = \frac{2}{\mu - \mu_,} a : \frac{b}{\nu}; \quad 11 = \frac{a'}{\mu} : \frac{2}{\nu_, - \nu};$$

$$12 = \frac{2}{\mu - \mu_,} a : \frac{b'}{\nu_,}; \quad 13 = \frac{a}{\mu} : \frac{2}{\nu_, - \nu} b'.$$

Um die weitern Flächen zu bestimmen, suchen wir zunächst die Zonenpunkte der Würfel-, Oktaeder-, Granatoederkante, und die 12 Diagonalzonen, um damit Einsicht in die Gesetzmäßigkeit der Buchstaben zu gewinnen. Es haben die

Hexaidkanten: $5 . 6 = 0 + 0$; $5 . 7 = \frac{2}{\mu - \mu_,} a$; $6 . 7 = \frac{2}{\nu_, - \nu} b'$.

Oktaidkanten: Endkanten $\frac{a}{\mu}, \frac{b}{\nu}, \frac{a'}{\mu_,}, \frac{b'}{\nu_,}$.

Seitenkanten: $2 . 3 = (\nu + \nu_,)a + (\mu + \mu_,)b + (\mu\nu - \mu_,\nu_,)c$;
$1 . 4 = (\nu + \nu_,)a + (\mu + \mu_,)b' + (\mu\nu_, - \mu_,\nu)c$.

Dodecaidkanten kann ich entweder mit den Mittelpunktsebenen 8 und 9 oder ohne dieselben mit 10—13 finden. Wegen der 0 wird die Rechnung mit den erstern einfacher. Für Punkt 8 . 13

$$8 \ldots \frac{\mu+\mu_{,}}{0} \ldots \frac{-(\nu+\nu_{,})}{0}$$

$$13 \ldots \mu \ldots \frac{(\nu-\nu_{,})}{2}, \text{ kommt}$$

$$\left(\frac{\nu-\nu_{,}}{2}+\frac{\nu+\nu_{,}}{0}\right)a+\left(\frac{\mu+\mu_{,}}{0}-\mu\right)b+\left(\frac{\nu-\nu_{,}}{2}\cdot\frac{\mu+\mu_{,}}{0}+\mu\cdot\frac{\nu+\nu_{,}}{0}\right)c,$$

$$= 2(\nu+\nu_{,})a + 2(\mu+\mu_{,})b + [(\nu-\nu_{,})(\mu+\mu_{,}) + 2\mu(\nu+\nu_{,})]\,c,$$

denn wenn ich mit 0 multiplicire, fallen die Glieder ohne Null weg. Suche ich dagegen Punkt 12 . 13 im linken vordern Quadranten ab′, so ist

$$12 \ldots \frac{\mu-\mu_{,}}{2} \ldots \nu_{,}$$

$$13 \ldots \mu \ldots \frac{\nu_{,}-\nu}{2}, \text{ kommt}$$

$$\left(\frac{\nu_{,}-\nu}{2}-\nu_{,}\right)a+\left(\frac{\mu-\mu_{,}}{2}-\mu\right)b'+\left(\frac{\nu_{,}-\nu}{2}\cdot\frac{\mu-\mu_{,}}{2}-\mu\nu_{,}\right)c$$

$$= -2(\nu+\nu_{,})a - 2(\mu+\mu_{,})b' - [-4\mu\nu_{,} - (\nu_{,}-\nu)(\mu-\mu_{,})]\,c$$

$$= 2(\nu+\nu_{,})a + 2(\mu+\mu_{,})b' + [\nu(\mu-\mu_{,}) + \nu_{,}(3\mu+\mu_{,})]\,c.$$

So erhalten wir die vier Kantenzonenpunkte des **Dodecaides**:

1) 8 . 13 im Quadrant ab
$= 2(\nu+\nu_{,})a + 2(\mu+\mu_{,})b + [\nu_{,}(\mu-\mu_{,}) + \nu(3\mu+\mu_{,})]c,$

2) 12 . 13 im Quadrant ab′
$= 2(\nu+\nu_{,})a + 2(\mu+\mu_{,})b' + [\nu(\mu-\mu_{,}) + \nu_{,}(3\mu+\mu_{,})]c,$

3) 10 . 11 im Quadrant a′b
$= 2(\nu+\nu_{,})a' + 2(\mu+\mu_{,})b + [\nu_{,}(\mu_{,}-\mu) + \nu(3\mu_{,}+\mu)]c,$

4) 8 . 12 im Quadrant a′b′
$= 2(\nu+\nu_{,})a' + 2(\mu+\mu_{,})b' + [\nu(\mu_{,}-\mu) + \nu_{,}(3\mu_{,}+\mu)]c.$

Die Coefficienten von den Axen a und b sind alle gleich, und die von c unterscheiden sich nur durch die Strichelungen: im entgegengesetzten Quadranten 1 und 4 oder 2 und 3 finden durchweg die entgegengesetzten Strichelungen statt, im anliegenden gilt das nur für ν. Die Formeln controliren sich daher gegenseitig.

Die 12 **Diagonalzonen**, durch den Schnitt der Oktaid- mit den Dodecaidflächen eingesetzt, finden sich eben so leicht. Nur bekommen wir hier zwei Klassen 4 + 8 = 12.

Wählen wir beispielsweise im rechten Quadranten ab die drei Punkte 1 . 8, 10 . 2, 13 . 3, so ist

$$1 \ldots \mu \ldots \nu$$

$$8 \ldots \frac{\mu+\mu_{,}}{0} \ldots \frac{\nu+\nu_{,}}{0}, \text{ kommt}$$

$$\left(\frac{\nu + \nu_{,}}{0} - \nu\right)a + \left(\mu + \frac{\mu + \mu_{,}}{0}\right)b + \left(\mu \, . \, \frac{\nu + \nu_{,}}{0} + \nu \, . \, \frac{\mu + \mu_{,}}{0}\right)c$$

$$= (\nu + \nu_{,})a + (\mu + \mu_{,})b + [\mu(\nu + \nu_{,}) + \nu(\mu + \mu_{,})]\,c.$$

$$10 \ldots \frac{\mu - \mu_{,}}{2} \ldots \quad \nu$$

$$2 \ldots \quad \mu \quad \ldots -\nu_{,}\text{, kommt}$$

$$(\nu + \nu_{,})a + \left(\mu - \frac{\mu - \mu_{,}}{2}\right)b + \left(\mu\nu + \frac{\mu - \mu_{,}}{2} \, . \, \nu_{,}\right)c$$

$$= 2(\nu + \nu_{,})a + (\mu + \mu_{,})b + (2\mu\nu + \mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu_{,})\,c$$

$$13 \ldots \quad \mu \quad \ldots \frac{\nu - \nu_{,}}{2}$$

$$3 \ldots -\mu_{,} \quad \ldots \quad \nu\text{, kommt}$$

$$\left(\nu - \frac{\nu - \nu_{,}}{2}\right)a + (\mu + \mu_{,})b + \left(\mu\nu + \mu_{,} \, . \, \frac{\nu - \nu_{,}}{2}\right)c$$

$$= (\nu + \nu_{,})a + 2(\mu + \mu_{,})b + (2\mu\nu + \mu_{,}\nu - \mu_{,}\nu_{,})\,c.$$

Wenn man also den Punkt in der Projection einmal fixirt hat, so ist es für Geübte kaum mehr als ein bloßes Hinschreiben, wir kommen daher zu folgenden nach den Dodecaidflächen geordneten Punkten:

$$8 \, . \, 1 = (\nu + \nu_{,})a + (\mu + \mu_{,})b + (2\mu\nu + \mu\nu_{,} + \mu_{,}\nu)c$$
$$8 \, . \, 4 = (\nu + \nu_{,})a' + (\mu + \mu_{,})b' + (2\mu_{,}\nu_{,} + \mu\nu_{,} + \mu_{,}\nu)c$$
$$9 \, . \, 2 = (\nu + \nu_{,})a + (\mu + \mu_{,})b' + (2\mu\nu_{,} + \mu\nu + \mu_{,}\nu_{,})c$$
$$9 \, . \, 3 = (\nu + \nu_{,})a' + (\mu + \mu_{,})b + (2\mu_{,}\nu + \mu\nu + \mu_{,}\nu_{,})c$$
$$10 \, . \, 2 = 2(\nu + \nu_{,})a + (\mu + \mu_{,})b + (2\mu\nu + \mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu_{,})c$$
$$10 \, . \, 4 = 2(\nu + \nu_{,})a' + (\mu + \mu_{,})b + (2\mu_{,}\nu + \mu_{,}\nu_{,} - \mu\nu_{,})c$$
$$11 \, . \, 2 = (\nu + \nu_{,})a' + 2(\mu + \mu_{,})b' + (2\mu_{,}\nu_{,} + \mu\nu_{,} - \mu\nu)c$$
$$11 \, . \, 1 = (\nu + \nu_{,})a' + 2(\mu + \mu_{,})b + (2\mu_{,}\nu + \mu\nu - \mu\nu_{,})c$$
$$12 \, . \, 1 = 2(\nu + \nu_{,})a + (\mu + \mu_{,})b' + (2\mu\nu_{,} + \mu\nu - \mu_{,}\nu)c$$
$$12 \, . \, 3 = 2(\nu + \nu_{,})a' + (\mu + \mu_{,})b' + (2\mu_{,}\nu_{,} + \mu_{,}\nu - \mu\nu)c$$
$$13 \, . \, 4 = (\nu + \nu_{,})a + 2(\mu + \mu_{,})b' + (2\mu\nu_{,} + \mu_{,}\nu_{,} - \mu_{,}\nu)c$$
$$13 \, . \, 3 = (\nu + \nu_{,})a + 2(\mu + \mu_{,})b + (2\mu\nu + \mu_{,}\nu - \mu_{,}\nu_{,})c.$$

Die **Pyramidenhexaide** verbinden die Hexaidkanten mit den Diagonalzonen, daraus folgen sogleich die vier Flächen des Mittelpunktes: 5 . 6 nach 13 . 3, 10 . 2, 12 . 1, 13 . 4.

$$5 \, . \, 6 \ldots 0 + 0$$

$$13 \, . \, 3 \ldots \frac{N}{P} + \frac{M}{P}\text{, gibt}$$

$$\left(\frac{M}{P} - 0\right)a : \left(0 - \frac{N}{P}\right)b : 0c = Ma : -Nb : 0c,$$

$$= \frac{2(\mu + \mu_{,})}{0}a : -\frac{(\nu + \nu_{,})}{0}b : c,$$

folglich hat die zugehörige Sectionslinie

$$\frac{0}{2\mu + 2\mu'}a : \frac{0}{-(\nu + \nu_{,})}b.$$

Da die Sectionslinie stets in zwei Diagonalzonen fällt, hier außer 13 . 3 noch in 11 . 2, so stehen immer zwei Wege offen. In der zweiten Hexaidkante liegen ebenfalls wieder vier Flächen, die von 5 . 7 nach 13 . 3, 8 . 1, 9 . 2, 13 . 4 gehen:

$$5 . 7 \ldots \frac{2}{\mu - \mu,} + 0$$

$$13 . 3 \ldots\ldots \frac{N}{P} + \frac{M}{P}, \text{ gibt}$$

$$\left(\frac{M}{P} - 0\right) a : \left(\frac{2}{\mu - \mu,} - \frac{N}{P}\right) b : \left(\frac{M}{P} \cdot \frac{2}{\mu - \mu,} - \frac{N}{P} . 0\right) c$$

$$= \frac{M}{P} a : \frac{2P - N(\mu - \mu,)}{P(\mu - \mu,)} b : \frac{2M}{P(\mu - \mu,)} c$$

$$= \frac{\mu - \mu,}{2} a : \frac{2P + N(\mu, - \mu)}{2M} b : c$$

$$\begin{aligned} 2P + N(\mu, - \mu) = {} & 4\mu\nu + 2\mu,\nu - 2\mu,\nu, \\ & \underline{-\mu\nu + \mu,\nu + \mu,\nu, - \mu\nu,} \\ & 3\mu\nu + 3\mu,\nu - \mu,\nu, - \mu\nu, \end{aligned}$$

$$= \mu(3\nu - \nu,) + \mu,(3\nu - \nu,) = (\mu + \mu,)(3\nu + \nu,)$$

$$\text{dividirt durch } 2M = 4(\mu + \mu,) \text{ gibt } \frac{3\nu - \nu,}{4} b.$$

Folglich Pyramidenhexaide 5 . 7 nach 13 . 3 $= \frac{2}{\mu - \mu,} a : \frac{4}{3\nu - \nu,} b.$

In der dritten 6.7 gehen ebenfalls vier nach 12.1, 9.2, 8.4, 12.3.

$$6 . 7 \ldots 0 + \frac{2}{\nu, - \nu}$$

$$12 . 1 \ldots \frac{N}{P} + \frac{M}{P} \text{ gibt}$$

$$\left(\frac{M}{P} - \frac{2}{\nu, - \nu}\right) a : \left(0 - \frac{N}{P}\right) b' : 0 - \frac{N}{P} \cdot \frac{2}{\nu, - \nu} c$$

$$\frac{M(\nu, - \nu) - 2P}{P(\nu, - \nu)} a : - \frac{N}{P} b' : - \frac{2N}{P(\nu, - \nu)} c = \frac{2P - M(\nu, - \nu)}{2N} : \frac{\nu, - \nu}{2} b' : c.$$

$$\begin{aligned} -M(\nu, - \nu) = +(\mu + \mu,)(\nu - \nu,) = {} & \mu\nu + \mu,\nu - \mu\nu, - \mu,\nu, \\ 2P = {} & \underline{2\mu\nu - 2\mu,\nu + 4\mu\nu,} \\ & 3\mu\nu - \mu,\nu + 3\mu\nu, - \mu,\nu, \\ & = \nu(3\mu - \mu,) + \nu,(3\mu - \mu,) \end{aligned}$$

$$2N = 4(\nu + \nu,) \text{ gibt } \frac{3\mu - \mu,}{4} \ldots 12 . 1$$

$$\begin{aligned} 9 . 2 \ldots\ldots\ldots 2P = {} & \underline{2\mu\nu + 4\mu\nu, + 2\mu,\nu,} \\ & 3\mu\nu + \mu,\nu + 3\mu\nu, + \mu,\nu, \\ & = \nu(3\mu + \mu,) + \nu,(3\mu + \mu,) \end{aligned}$$

$$2N = 2(\nu + \nu,) \text{ gibt } \frac{3\mu + \mu,}{2} \ldots\ldots 9 . 2$$

$$(\mu+\mu,)\,(\nu-\nu,) = \mu\nu + 5\mu,\nu + \mu\nu, - \mu,\nu,$$

8 . 4 . . . . $2P = +2\mu,\nu + 2\mu\nu, + 4\mu,\nu,$

$$\mu\nu + 3\mu,\nu + \mu\nu, + 3\mu,\nu,$$
$$= \nu(3\mu, + \mu) + \nu,(3\mu, + \mu)$$

$2N = 2(\nu+\nu,)$ gibt $\frac{3\mu, + \mu}{2}$ . . . . . 8 . 4

12 . 3 . . . . $2P = -2\mu\nu + 2\mu,\nu + 4\mu,\nu,$

$$-\mu\nu + 3\mu,\nu - \mu\nu, + 3\mu,\nu,$$
$$= \nu(3\mu, - \mu) + \nu,(3\mu, - \mu).$$

$2N = 4(\nu+\nu,)$ gibt $\frac{3\mu, - \mu}{4}$ . . . . . 12 . 3

Da alle vier hier, wie auch vorhin, dieselbe allgemeine Formel haben, so darf ich nur gemäß dem Diagonalzonenpunkte die Werthe für N und P setzen, da M in allen gleich ist. Wir erlangen daher folgende Ausdrücke für die

Pyramidenhexaide $\mu=\mu,=\nu=\nu,=1$

5 . 6 . . 13 . 3 = $\frac{0}{\mp 2(\mu + \mu,)}a' : \frac{0}{\pm(\nu + \nu,)}b$; . . . $\frac{1}{2}a' : b : \infty c$

. . . . . 10 . 2 = $\frac{0}{\mp(\mu + \mu,)}a' : \frac{0}{\pm 2(\nu + \nu,)}b$; . . . $a' : \frac{1}{2}b : \infty c$

. . . . . 12 . 1 = $\frac{0}{\mp(\mu + \mu,)}a' : \frac{0}{\pm 2(\nu + \nu,)}b$; . . . $a' : \frac{1}{2}b : \infty c$

. . . . . 13 . 4 = $\frac{0}{\mp 2(\mu + \mu,)}a' : \frac{0}{\pm(\nu + \nu,)}b$. . . . $\frac{1}{2}a' : b : \infty c$

5 . 7 . . 13 . 3 = $\frac{2}{\mu - \mu,}a : \frac{4}{3\nu - \nu,}b$; . . . $\infty a : 2b : c$

. . . . . 8 . 1 = $\frac{2}{\mu - \mu,}a : \frac{2}{3\nu + \nu,}b$; . . . $\infty a : \frac{1}{2}b : c$

. . . . . 9 . 2 = $\frac{2}{\mu - \mu,}a : \frac{2}{3\nu, + \nu}b'$; . . . $\infty a : \frac{1}{2}b' : c$

. . . . . 13 . 4 = $\frac{2}{\mu - \mu,}a : \frac{4}{3\nu, - \nu}b'$. . . . $\infty a : 2b' : c$

6 . 7 . . 12 . 1 = $\frac{4}{3\mu - \mu,}a : \frac{2}{\nu, - \nu}b'$; . . . $2a : \infty b : c$

. . . . . 9 . 2 = $\frac{2}{3\mu + \mu,}a : \frac{2}{\nu, - \nu}b'$; . . . $\frac{1}{2}a : \infty b : c$

. . . . . 8 . 4 = $\frac{2}{3\mu, + \mu}a' : \frac{2}{\nu, - \nu}b'$; . . . $\frac{1}{2}a' : \infty b : c$

. . . . . 12 . 3 = $\frac{4}{3\mu, - \mu}a' : \frac{2}{\nu, - \nu}b'$. . . . $2a' : \infty b : c.$

Für $\mu = \nu = 1$ kommen die Ausdrücke des gewöhnlichen Pyramidenwürfels $a : 2a : \infty a$, was zugleich als Controle für die Richtigkeit der Formeln dienen kann. Man kann nun aber noch weiter gehen, und

gleich andere Pyramidenwürfel a : 3a : ∞a, a : 4a : ∞a suchen. Die Mittelpunktslinien

$$\frac{0}{3(\mu+\mu_,)}a : \frac{0}{-(\nu+\nu_,)}b \text{ und } \frac{0}{4(\mu+\mu_,)}a : \frac{0}{-(\nu+\nu_,)}b \text{ etc.}$$

sind leicht hingeschrieben. Bei den andern handelt es sich immer nur um zwei Ausdrücke, die für

$$3 = \frac{3}{2\mu-\mu_,}a \text{ und } \tfrac{1}{3} = \frac{a}{2\mu+\mu_,}$$

betragen. Für a : 4a : ∞a und a : ¼a : ∞a findet sich $\frac{8}{5\mu-3\mu_,}a=4$, woraus wir auf $\frac{2}{5\mu+3\mu_,}a = \frac{1}{4}$ schließen dürfen. Das zu beweisen, suchen wir uns die Leucitoidfläche $3a : 3a : a = 15 = \frac{3a}{2\mu-\mu_,} : \frac{3b}{2\nu-\nu_,}$ in den Punkten 1 . 4 und 3 . 13, ziehen dann von der Würfelkante 6 . 7 nach Punkt 15 . 12, um einen Schnitt in den Axen $\frac{4b}{5\mu+\mu_,} = \frac{2}{3}$ und $a = \frac{8}{5\mu-3\mu_,}$ zu erhalten; ziehe ich dagegen nach 15 . 8, so kommt $a = \frac{6}{5\mu-\mu_,} = \frac{3}{2}$, folglich um den zweiten zugehörigen Schnitt zu bekommen, muß ich das Leucitoid $16 = \frac{a}{2\mu+\mu_,} : \frac{b}{\nu_,}$ wählen, und von 6 . 7 nach 16 . 9 ziehen, dann kommt $a = \frac{2}{5\mu+3\mu_,}$. Darnach lassen sich die zwei Reihen für die Pyramidenwürfel aufstellen:

$$\frac{4}{3\mu-\mu_,},\ \frac{6}{4\mu-2\mu_,},\ \frac{8}{5\mu-3\mu_,},\ \frac{10}{6\mu-4\mu_,} \text{ etc.}$$

$$\frac{2}{3\mu+\mu_,},\ \frac{2}{4\mu+2\mu_,},\ \frac{2}{5\mu+3\mu_,},\ \frac{2}{6\mu+4\mu_,} \text{ etc.}$$

Es wird das durch folgende Körper immer klarer. Setzen wir einmal das

Leucitoeder a : a : ½a hin, wie es sich unter andern aus den Linien

$$14 = \frac{4a}{3\mu-\mu_,} : \frac{4b'}{3\nu_,-\nu} \text{ und } 18 = \frac{4a'}{3\mu_,-\mu} : \frac{4b'}{3\nu_,-\nu}$$

ergibt, womit man natürlich auch immer die Ausdrücke mit einander controliren kann, so sind diese nach den vier Quadranten geordnet folgende:

	$\frac{2b'}{3\nu, + \nu} : \frac{a'}{\mu,}$	a'	$\frac{a'}{\mu,} : \frac{2b}{3\nu + \nu,}$
	$\frac{b'}{\nu'} : \frac{2a'}{3\mu, + \mu}$		$\frac{2a'}{3\mu, + \mu} : \frac{b}{\nu}$
	$\frac{4b'}{3\nu, - \nu} : \frac{4a'}{3\mu, - \mu}$		$\frac{4a'}{3\mu, - \mu} : \frac{4b}{3\nu - \nu,}$
b'	———————	———————	——————— b
	$\frac{4b'}{3\nu, - \nu} : \frac{4a}{3\mu - \mu,}$		$\frac{4a}{3\mu - \mu,} : \frac{4b}{3\nu - \nu,}$
	$\frac{b'}{\nu,} : \frac{2a}{3\mu + \mu,}$		$\frac{2a}{3\mu + \mu,} : \frac{b}{\nu}$
	$\frac{2b'}{3\nu, + \nu} : \frac{a}{\mu}$	a	$\frac{a}{\mu} : \frac{2b}{3\nu + \nu,}$.

Da sämmtliche Leucitoide in den Oktaidkanten liegen, so haben wir außerdem noch dieselben zwei Ausdrücke, wie beim Pyramidenwürfel. Wollten wir jetzt die Quadranten für $a : a : \frac{1}{3}a$ füllen, so dürfen wir nur aus dem Pyramidenwürfel die beiden Formeln

$$\frac{6a}{4\mu - 2\mu,} = \frac{3}{2\mu - \mu,} \text{ und } \frac{2a}{4\mu + 2\mu,} = \frac{a}{2\mu + \mu,} \text{ etc.}$$

an richtiger Stelle zusetzen, um daraus nach dem Leucitoederschema alle 12 Flächen zu entwickeln.

Jeder Ausdruck kommt im Schema doppelt vor, weil immer je zwei sich in einem Axenpunkte schneiden müssen, in den Mittelreihen laufen die gleichen a, in den äußern die gleichen b parallel; außerdem sind die entgegengesetzten Quadranten entgegengesetzt gestrichelt.

Es wäre zu weitläufig, sollte ich nun alle die vielen Flächenausdrücke suchen, sogar unnöthig: denn es bedarf nur einer guten allgemeinen Figur der drei Körper (Oktaid, Hexaid, Dodecaid), um sich mit dem Lineal die Verhältnisse klar zu machen. Aber schon bei diesen wenigen Linien pflegt die Figur sehr ausgedehnt zu werden, namentlich fallen beim Gerathewohl einige Diagonalzonen ungeschickt. Ich will daher zuvor zeigen,

w i e m a n d i e 3+4+6+12=25 Z o n e n p u n k t e i n j e d e s b e l i e b i g e D r e i e c k 3 . 6 . 12 b r i n g e n k a n n. In diesem Dreieck bildet die Basis 7 eine Hexaidfläche; die beiden andern

$$3 . 12 = \pi = \frac{2b'}{\nu, - \nu} : \frac{4a'}{3\mu, - \mu} \text{ und } 6 . 12 = \lambda = \frac{3b}{2\nu - \nu,} : \frac{3a'}{2\mu, - \mu}$$

sind Hilfslinien, welche der weitern Entwickelung des Systemes angehören. Die Pyramidenfläche π können wir oben beim Pyramidenhexaid ablesen. Das Leucitoid $\lambda = 3b : 3a' : c$ ist in $b = \frac{3}{2\nu - \nu,}$ durch Linie 15 gegeben, darnach können wir durch entgegengesetztes Stricheln von

$a = \frac{3}{2\mu - \mu_,}$ den Ausdruck von $a' \doteq \frac{3}{2\mu_, - \mu}$ sofort hinsetzen. Wenn es jedoch zweifelhaft wäre, ob λ und 15 sich in einem Punkte von b schneiden, darf man die Rechnung nicht scheuen, die sich übrigens elegant systematisch führen läßt. Denn λ liegt in den Zonenpunkten

$$2\,.\,3 = (\nu + \nu_,)a + (\mu + \mu_,)b + (\mu\nu - \mu_,\nu_,)c = Na + Mb + Pc \text{ und}$$
$$10\,.\,4 = 2(\nu + \nu_,)a' + (\mu + \mu_,)b + (2\mu_,\nu + \mu_,\nu_, - \mu\nu_,)c = 2Na' + Mb + P_,c.$$

$$\frac{N}{P} + \frac{M}{P}$$
$$-\frac{2N}{P_,} + \frac{M}{P_,} \text{ gibt}$$
$$\left(\frac{M}{P_,} - \frac{M}{P}\right)a : \left(\frac{N}{P} + \frac{2N}{P_,}\right)b : \left(\frac{MN}{PP_,} + \frac{2MN}{PP_,}\right)c$$
$$= \frac{P - P_,}{3N}a : \frac{P_, + 2P}{3M}b : c$$
$$= \frac{\mu - 2\mu_,}{3}a : \frac{2\nu - \nu_,}{3}b = \frac{2\mu_, - \mu}{3}a' : \frac{2\nu - \nu_,}{3}b.$$

Wir nehmen nun im Dreieck $\lambda\pi 7$ einen beliebigen Punkt Q an, und ziehen dadurch die drei Diagonalen 8, 6 und $\pi_,$, so gehört 8 dem Dodecaide, 6 dem Hexaide an, nur $\pi_, = \frac{0a'}{\mp(\mu + \mu_,)} : \frac{0b}{\pm 2(\nu + \nu_,)}$ bildet eine dritte Hilfslinie.

Zur vierten Hilfslinie

$$y = \frac{12a'}{11\mu_, - \mu} : \frac{3b}{2\nu - \nu_,} = \tfrac{6}{5}a' : 3b : c = \frac{a'}{5} : \frac{b}{2} : \frac{c}{6}$$

muß ich den Punkt $\pi\,.\,8$ suchen:

$$\pi \doteq \frac{4a'}{3\mu_, - \mu} : \frac{2b'}{\nu_, - \nu} \text{ und } 8 = \frac{0a}{-(\mu + \mu_,)} : \frac{0b}{\nu + \nu_,}, \text{ gibt}$$

$$\frac{\nu + \nu_,}{0}a' + \frac{\mu + \mu_,}{0}b' + \left(\frac{\nu + \nu_,}{0} \cdot \frac{3\mu_, - \mu}{4} + \frac{\nu_, - \nu}{2} \cdot \frac{\mu + \mu_,}{0}\right)c$$
$$= 4(\nu + \nu_,)a' + 4(\mu + \mu_,)b' + (\mu_,\nu + 5\mu_,\nu_, + \mu\nu_, - 3\mu\nu)c.$$

Setzen wir wie immer NMP für die Coefficienten, und erwägen, daß y mit λ den Coefficienten $\frac{3}{2\nu - \nu_,}$ in b gemein hat, so ist

$$\begin{matrix} \frac{N}{P} + \frac{M}{P} \\ 0 - \lambda \end{matrix} \qquad -\left(\lambda + \frac{M}{P}\right)a' : \frac{N}{P}b' : -\frac{N\lambda}{P}c = \frac{P\lambda + M}{N\lambda}a' : \frac{b}{\lambda} : c.$$

Axe b behält ihren Coefficienten, und für den von a' kommt durch die Substitution der Werthe obige Zahl.

Durch den neuen Punkt $y\pi_,$ ist das Ziehen der Dodecaidfläche 11 ermöglicht. Dann gibt uns

$$\lambda\,.\,11 = 1\,.\,11 = (\nu + \nu_,)a' + 2(\mu + \mu_,)b + (2\mu_,\nu + \mu\nu - \mu\nu_,)c$$

den neuen Punkt, durch welchen ich die letzte (fünfte) Hilfslinie

$$x = \frac{3a}{2\mu - \mu_,} : \frac{6b}{5\nu - \nu_,}$$

nach $\pi_,$. 7 ziehen kann, welche in 8 den Kantenzonenpunkt des Dodecaides bestimmt. Da für $\mu = \mu_, = \nu = \nu_, = 1$ $x = 3a : \frac{5}{2}b$ wird, so dürfte ich nach den oben beim Pyramidenhexaide für 3 und $\frac{3}{2}$ entwickelten Zahlen den Ausdruck nur hinschreiben. Sonst muß ich ihn auf folgende Weise entwickeln:

Punkt 11 . 1 $= (\nu + \nu_,)a' + 2(\mu + \mu_,)b + (2\mu_,\nu + \mu\nu - \mu\nu_,)c$
$= Na' + 2Mb + P_,c$;

Punkt $\pi_,$. 7 $= 4(\nu + \nu_,)a + 2(\mu + \mu_,)b + (3\mu\nu_, + \mu\nu - 3\mu_,\nu - \mu_,\nu_,)c$
$= 4Na + 2Mb + Pc$.

$$\frac{4N}{P} + \frac{2M}{P} - \left(\frac{2M}{P_,} + \frac{2M}{P}\right)a : \left(\frac{4N}{P} + \frac{N}{P_,}\right)b : \left(-\frac{8MN}{PP_,} + \frac{2MN}{PP_,}\right)c,$$

$$-\frac{N}{P_,} - \frac{2M}{P_,} - (2MP + 2MP_,)a : (4NP_, + NP)b : -6MNc,$$

$$\frac{P + P_,}{3N}a : \frac{4P_, + P}{6M}b : c = \frac{2\mu - \mu_,}{3}a : \frac{5\nu - \nu_,}{6}b : c.$$

Mit der Kantenzone des Dodecaides sind wir erst in den Stand gesetzt, das Bild zu vollenden, und wir bemerken dann, daß keiner der 25 Zonenpunkte über das beliebte Dreieck hinausgeht.

Die Mannigfaltigkeit zu vermehren, rechnen wir etwa noch drei von den gewöhnlichen 48flächnern im Punkte

$$8 . 10 \text{ und } 3 . 9 = 17 = \frac{4a'}{3\mu_, - \mu} : \frac{4b}{5\nu + \nu_,} = 2a' : \frac{2}{3}b;$$

$$2 . 18 \text{ und } 1 . 8 = 19 = \frac{2a}{5\mu + 3\mu_,} : \frac{2b'}{3\nu_, + \nu} = \frac{a}{4} : \frac{b'}{2};$$

$$3 . 13 \text{ und } 1 . 12 = 20 = \frac{5a}{4\mu - \mu_,} : \frac{5b}{3\nu - 2\nu_,} = \frac{5}{3}a : 5b.$$

Jetzt können wir das einfache Entwickelungsgesetz hinschreiben. Was für die $\mu\mu_,$ gilt, gilt natürlich auch für die $\nu\nu_,$, wir brauchen uns daher nur mit einem Buchstaben zu beschäftigen.

1ste Abtheilung:

$$\frac{0}{\mu+\mu_,}, \frac{1}{2\mu+\mu_,}, \frac{2}{3\mu+\mu_,}, \frac{3}{4\mu+\mu_,}, \frac{4}{5\mu+\mu_,}, \frac{5}{6\mu+\mu_,}, \frac{6}{7\mu+\mu_,} \cdots \frac{\infty}{(\infty+1)\mu+\mu_,} = \frac{1}{\mu}$$

$$\tfrac{0}{2}, \quad \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{3}{5}, \quad \tfrac{4}{6} = \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{5}{7}, \quad \tfrac{6}{8} = \tfrac{3}{4} \cdots\cdots \frac{\infty}{\infty+1} = \tfrac{1}{1}$$

$$\tfrac{2}{0}, \quad \tfrac{3}{1}, \quad \tfrac{4}{2} = 2, \quad \tfrac{5}{3}, \quad \tfrac{6}{4} = \tfrac{3}{2}, \quad \tfrac{7}{5}, \quad \tfrac{8}{6} = \tfrac{4}{3} \cdots\cdots \frac{\infty+1}{\infty} = \tfrac{1}{1}$$

$$\frac{2}{\mu-\mu_,}, \frac{3}{2\mu-\mu_,}, \frac{4}{3\mu-\mu_,}, \frac{5}{4\mu-\mu_,}, \frac{6}{5\mu-\mu_,}, \frac{7}{6\mu-\mu_,}, \frac{8}{7\mu-\mu_,} \cdots\cdots \frac{\infty+1}{\infty\,\mu-\mu_,} = \frac{1}{\mu}$$

Mit der Granatoederfläche $\frac{0}{\mu + \mu_,}$ fängt es an und schreitet der Oktaederfläche zu. Mit dem Oktaeder tritt die Wendung ein, die Zahlenbrüche

kehren sich nun um, und finden endlich in der Würfelfläche $\frac{2}{\mu-\mu_{,}}=\frac{2}{0}=\infty$ ihre Grenze. Für $\mu=\mu_{,}=1$ gehören alle Brüche dahin, deren Zähler und Nenner um zwei differiren, die also die Form $\frac{n+2}{n}$ oder $\frac{n}{n+2}$ haben. Oktaeder, Granatoeder und Würfel bilden die Grenzflächen. Alle gewöhnlichen regulären Körper gehören dazu, aber über 3 und $\frac{1}{3}$ geht die Sache nicht hinaus. Daher ist der 48flächner $a:\frac{1}{2}a:\frac{1}{4}a=19$ nicht darunter, dieser beginnt mit der Mittelpunktsfläche die

2te Abtheilung:

$$\frac{0}{2\mu+2\mu_{,}},\ \frac{1}{3\mu+2\mu_{,}},\ \frac{2}{4\mu+2\mu_{,}}=\frac{1}{2\mu+\mu_{,}},\ \frac{3}{5\mu+2\mu_{,}},\ \frac{4}{6\mu+2\mu_{,}}=\frac{2}{3\mu+\mu_{,}},\ \frac{5}{7\mu+2\mu_{,}}\ \cdots\ \frac{1}{\mu}$$

$$\tfrac{0}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{6}=\tfrac{1}{3},\ \tfrac{3}{7},\ \tfrac{4}{8}=\tfrac{1}{2},\ \tfrac{5}{9}\ \cdots\ \frac{n}{n+4}.$$

$$\tfrac{4}{0},\ \tfrac{5}{1},\ \tfrac{6}{2}=\tfrac{3}{1},\ \tfrac{7}{3},\ \tfrac{8}{4}=\tfrac{2}{1},\ \tfrac{9}{5}\ \cdots\ \frac{n+4}{n}$$

$$\frac{4}{2\mu-2\mu_{,}},\ \frac{5}{3\mu-2\mu_{,}},\ \frac{6}{4\mu-2\mu_{,}}=\frac{3}{2\mu-\mu_{,}},\ \frac{7}{5\mu-2\mu_{,}},\ \frac{8}{6\mu-2\mu_{,}}=\frac{4}{3\mu-\mu_{,}},\ \frac{9}{7\mu-2\mu_{,}}\ \cdots\ \frac{1}{\mu}.$$

Die geraden Zahlen lassen sich theilen, fallen daher der ersten Klasse anheim. Im folgenden fällt jede dritte, im vierten wieder jede andere ꝛc. fort, je nachdem sich wegdividiren läßt.

3te Abtheilung:

$$\frac{0}{3\mu+3\mu_{,}},\ \frac{1}{4\mu+3\mu_{,}},\ \frac{2}{5\mu+3\mu_{,}},\ \frac{4}{7\mu+3\mu_{,}},\ \frac{5}{8\mu+3\mu_{,}},\ \frac{7}{10\mu+3\mu_{,}},\ \frac{8}{11\mu+3\mu_{,}}\ \cdots\cdots\ \frac{1}{\mu}$$

$$\tfrac{0}{6},\ \tfrac{1}{7},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{5}{11},\ \tfrac{7}{13},\ \tfrac{4}{7}\ \cdots\cdots\ \frac{n}{n+6}$$

$$\tfrac{6}{0},\ \tfrac{7}{1},\ \tfrac{4}{1},\ \tfrac{5}{2},\ \tfrac{11}{5},\ \tfrac{13}{7},\ \tfrac{7}{4}\ \cdots\cdots\ \frac{n+6}{n}$$

$$\frac{6}{3\mu-3\mu_{,}},\ \frac{7}{4\mu-3\mu_{,}},\ \frac{8}{5\mu-3\mu_{,}},\ \frac{10}{7\mu-3\mu_{,}},\ \frac{11}{8\mu-3\mu_{,}},\ \frac{13}{10\mu-3\mu_{,}},\ \frac{14}{11\mu-3\mu_{,}}\ \cdots\cdots\ \frac{1}{\mu}.$$

4te Abtheilung:

$$\frac{0}{4\mu+4\mu_{,}},\ \frac{1}{5\mu+4\mu_{,}},\ \frac{3}{7\mu+4\mu_{,}},\ \frac{5}{9\mu+4\mu_{,}},\ \frac{7}{11\mu+4\mu_{,}},\ \frac{9}{13\mu+4\mu_{,}},\ \frac{11}{15\mu+4\mu_{,}}\ \cdots\ \frac{1}{\mu}$$

$$\tfrac{0}{8},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{3}{11},\ \tfrac{5}{13},\ \tfrac{7}{15},\ \tfrac{9}{17},\ \tfrac{11}{19}\ \cdots\ \frac{n}{n+8}$$

$$\tfrac{8}{0},\ \tfrac{9}{1},\ \tfrac{11}{3},\ \tfrac{13}{5},\ \tfrac{15}{7},\ \tfrac{17}{9},\ \tfrac{19}{11}\ \cdots\ \frac{n+8}{n}$$

$$\frac{8}{4\mu-4\mu_{,}},\ \frac{9}{5\mu-4\mu_{,}},\ \frac{11}{7\mu-4\mu_{,}},\ \frac{13}{9\mu-4\mu_{,}},\ \frac{15}{11\mu-4\mu_{,}},\ \frac{17}{13\mu-4\mu_{,}},\ \frac{19}{15\mu-4\mu_{,}}\ \cdots\ \frac{1}{\mu}.$$

5te Abtheilung:

$$\frac{0}{5\mu+5\mu},\ \frac{1}{6\mu+5\mu},\ \frac{2}{7\mu+5\mu},\ \frac{3}{8\mu+5\mu},\ \frac{4}{9\mu+5\mu},\ \frac{6}{11\mu+5\mu},\ \frac{7}{12\mu+5\mu},\ \ldots\ldots\ \frac{1}{\mu}$$

$$\tfrac{0}{10},\ \tfrac{1}{11},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{3}{13},\ \tfrac{2}{7},\ \tfrac{3}{8},\ \tfrac{7}{17}\ \ldots\ \frac{n}{n+10}$$

$$\tfrac{10}{0},\ \tfrac{11}{1},\ \tfrac{6}{1},\ \tfrac{13}{3},\ \tfrac{7}{2},\ \tfrac{8}{3},\ \tfrac{17}{7}\ \ldots\ \frac{n+10}{n}$$

$$\frac{10}{5\mu-5\mu},\ \frac{11}{6\mu-5\mu},\ \frac{12}{7\mu-5\mu},\ \frac{13}{8\mu-5\mu},\ \frac{14}{9\mu-5\mu},\ \frac{16}{11\mu-5\mu},\ \frac{17}{12\mu-5\mu},\ \ldots\ldots\ \frac{1}{\mu}.$$

Das Gesetz leuchtet ein, doch will ich die Zahlen der ersten zwölf Abtheilungen zusammenstellen:

1. $\frac{0}{\mu+\mu,}$: $\tfrac{1}{3}.\ \tfrac{1}{2}.\ \tfrac{3}{5}.\ \tfrac{2}{3}.\ \tfrac{5}{7}.\ \tfrac{3}{4}.\ \tfrac{7}{9}.\ \tfrac{4}{5}.\ \tfrac{9}{11}.\ \tfrac{5}{6}.\ \tfrac{11}{13}.\ \tfrac{6}{7}\ ..\ \frac{n}{n+2}\ ..\ \frac{2}{\mu-\mu,}.$

2. $\frac{0}{2\mu+2\mu,}$: $\tfrac{1}{5}.\ (\tfrac{1}{3}).\ \tfrac{3}{7}.\ (\tfrac{1}{2}).\ \tfrac{5}{9}.\ (\tfrac{3}{5}).\ \tfrac{7}{11}.\ (\tfrac{2}{3}).\ \tfrac{9}{13}.\ (\tfrac{5}{7}).\ \tfrac{11}{15}.\ (\tfrac{3}{4})\ ..\ \frac{n}{n+4}\ ..\ \frac{4}{2\mu-2\mu,}.$

3. $\frac{0}{3\mu+3\mu,}$: $\tfrac{1}{7}.\ \tfrac{1}{4}.\ (\tfrac{1}{3}).\ \tfrac{2}{5}.\ \tfrac{5}{11}.\ (\tfrac{1}{2}).\ \tfrac{7}{13}.\ \tfrac{4}{7}.\ (\tfrac{3}{5}).\ \tfrac{5}{8}.\ \tfrac{11}{17}.\ (\tfrac{2}{3})\ ..\ \frac{n}{n+6}\ ..\ \frac{6}{3\mu-3\mu,}.$

4. $\frac{0}{4\mu+4\mu,}$: $\tfrac{1}{9}.\ (\tfrac{1}{5}).\ \tfrac{3}{11}.\ (\tfrac{1}{3}).\ \tfrac{5}{13}.\ (\tfrac{3}{7}).\ \tfrac{7}{15}.\ (\tfrac{1}{2}).\ \tfrac{9}{17}.\ (\tfrac{5}{9}).\ \tfrac{11}{19}.\ (\tfrac{3}{5})\ ..\ \frac{n}{n+8}\ ..\ \frac{8}{4\mu-4\mu,}.$

5. $\frac{0}{5\mu+5\mu,}$: $\tfrac{1}{11}.\ \tfrac{1}{6}.\ \tfrac{3}{13}.\ \tfrac{2}{7}.\ (\tfrac{1}{3}).\ \tfrac{3}{8}.\ \tfrac{7}{17}.\ \tfrac{4}{9}.\ \tfrac{9}{19}.\ (\tfrac{1}{2}).\ \tfrac{11}{21}.\ \tfrac{6}{11}\ ..\ \frac{n}{n+10}\ ..\ \frac{10}{5\mu-5\mu,}.$

6. $\frac{0}{6\mu+6\mu,}$: $\tfrac{1}{13}.\ (\tfrac{1}{7}).\ (\tfrac{1}{5}).\ (\tfrac{1}{4}).\ \tfrac{5}{17}.\ (\tfrac{1}{3}).\ \tfrac{7}{19}.\ (\tfrac{2}{5}).\ (\tfrac{3}{7}).\ (\tfrac{5}{11}).\ \tfrac{11}{23}.\ (\tfrac{1}{2})\ ..\ \frac{n}{n+12}\ ..\ \frac{12}{6\mu-6\mu,}.$

7. $\frac{0}{7\mu+7\mu,}$: $\tfrac{1}{15}.\ \tfrac{1}{8}.\ \tfrac{3}{17}.\ \tfrac{2}{9}.\ \tfrac{5}{19}.\ \tfrac{3}{10}.\ (\tfrac{1}{3}).\ \tfrac{4}{11}.\ \tfrac{9}{23}.\ \tfrac{5}{12}.\ \tfrac{11}{25}.\ \tfrac{6}{13}\ ..\ \frac{n}{n+14}\ ..\ \frac{14}{7\mu-7\mu,}.$

8. $\frac{0}{8\mu+8\mu,}$: $\tfrac{1}{17}.\ (\tfrac{1}{9}).\ \tfrac{3}{19}.\ (\tfrac{1}{5}).\ \tfrac{5}{21}.\ (\tfrac{3}{11}).\ \tfrac{7}{23}.\ (\tfrac{1}{3}).\ \tfrac{9}{25}.\ (\tfrac{5}{13}).\ \tfrac{11}{27}.\ (\tfrac{3}{7})\ ..\ \frac{n}{n+16}\ ..\ \frac{16}{8\mu-8\mu,}.$

9. $\frac{0}{9\mu+9\mu,}$: $\tfrac{1}{19}.\ \tfrac{1}{10}.\ (\tfrac{1}{7}).\ \tfrac{2}{11}.\ \tfrac{5}{23}.\ (\tfrac{1}{4}).\ \tfrac{7}{25}.\ \tfrac{4}{13}.\ (\tfrac{1}{3}).\ \tfrac{5}{14}.\ \tfrac{11}{29}.\ (\tfrac{2}{5})\ ..\ \frac{n}{n+18}\ ..\ \frac{18}{9\mu-9\mu,}.$

10. $\frac{0}{10\mu+10\mu,}$: $\tfrac{1}{21}.\ (\tfrac{1}{11}).\ \tfrac{3}{23}.\ (\tfrac{1}{6}).\ (\tfrac{1}{5}).\ (\tfrac{3}{13}).\ \tfrac{7}{27}.\ (\tfrac{2}{7}).\ \tfrac{9}{29}.\ (\tfrac{1}{3}).\ \tfrac{11}{31}.\ (\tfrac{3}{8})\ ..\ \frac{n}{n+10}\ ..\ \frac{20}{10\mu-10\mu,}.$

11. $\frac{0}{11\mu+11\mu,}$: $\tfrac{1}{23}.\ \tfrac{1}{12}.\ \tfrac{3}{25}.\ \tfrac{2}{13}.\ \tfrac{5}{27}.\ \tfrac{3}{14}.\ \tfrac{7}{29}.\ \tfrac{4}{15}.\ \tfrac{9}{31}.\ \tfrac{5}{16}.\ (\tfrac{1}{3}).\ \tfrac{6}{17}\ ..\ \frac{n}{n+11}\ ..\ \frac{22}{11\mu-11\mu,}.$

12. $\frac{0}{12\mu+12\mu,}$: $\tfrac{1}{25}.\ (\tfrac{1}{13}).\ (\tfrac{1}{9}).\ (\tfrac{1}{7}).\ \tfrac{5}{29}.\ (\tfrac{1}{5}).\ \tfrac{7}{31}.\ (\tfrac{1}{4}).\ (\tfrac{3}{11}).\ \tfrac{5}{17}.\ \tfrac{11}{35}.\ (\tfrac{1}{3})\ ..\ \frac{n}{n+12}\ ..\ \frac{24}{12\mu-12\mu,}.$

Die Zahlen, welche in jeder folgenden Abtheilung wiederkehren, sind eingeklammert. Die Zahl $\frac{1}{3}$ an der Spitze bildet eine Diagonale durch das ganze Viereck. Alle Brüche mit ungeraden Nennern stehen in der Vorderreihe, in der zweiten wechseln gerade mit ungeraden ab, daher gehören die geraden Zahlen in eine spätere Abtheilung: $\frac{1}{13}$ steht schon in der sechsten, während $\frac{1}{12}$ erst in der elften kommt. Jetzt ist es ein Spiel, die allgemeine Formel oben für unsern Feldspath zu finden: wir suchen in unserm Schema blos die Zahl, und können diese sofort in die

Buchstabenformel umsetzen. Beispielshalber wollen wir für die Zahlen von 1 bis 12 die allgemeinen Ausdrücke der Reihe nach hinschreiben:

$$1 \ldots \frac{1}{\mu}\,, \quad 1 \ldots \frac{\infty+1}{\infty\mu-\mu_,}$$

$$\tfrac{1}{2} \ldots \frac{2}{3\mu+\mu_,}\,, \quad 2 \ldots \frac{4}{3\mu-\mu_,}$$

$$\tfrac{1}{3} \ldots \frac{1}{2\mu+\mu_,}\,, \quad 3 \ldots \frac{3}{2\mu-\mu_,}$$

$$\tfrac{1}{4} \ldots \frac{2}{5\mu+3\mu_,}\,, \quad 4 \ldots \frac{8}{5\mu-3\mu_,}$$

$$\tfrac{1}{5} \ldots \frac{1}{3\mu+2\mu_,}\,, \quad 5 \ldots \frac{5}{3\mu-2\mu_,}$$

$$\tfrac{1}{6} \ldots \frac{2}{7\mu+5\mu_,}\,, \quad 6 \ldots \frac{12}{7\mu-5\mu_,}$$

$$\tfrac{1}{7} \ldots \frac{1}{4\mu+3\mu_,}\,, \quad 7 \ldots \frac{7}{4\mu-3\mu_,}$$

$$\tfrac{1}{8} \ldots \frac{2}{9\mu+7\mu_,}\,, \quad 8 \ldots \frac{16}{9\mu-7\mu_,}$$

$$\tfrac{1}{9} \ldots \frac{1}{5\mu+4\mu_,}\,, \quad 9 \ldots \frac{9}{5\mu-4\mu_,}$$

$$\tfrac{1}{10} \ldots \frac{2}{11\mu+9\mu_,}\,, \quad 10 \ldots \frac{20}{11\mu-9\mu_,}$$

$$\tfrac{1}{11} \ldots \frac{1}{6\mu+5\mu_,}\,, \quad 11 \ldots \frac{11}{6\mu-5\mu_,}$$

$$\tfrac{1}{12} \ldots \frac{2}{13\mu+11\mu_,}\,, \quad 12 \ldots \frac{24}{13\mu-11\mu_,}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{1}{\infty} \ldots \frac{0}{\mu+\mu_,}\,, \quad \infty \ldots \frac{2}{\mu-\mu_,}$$

$$= \frac{1}{\infty\mu+(\infty-1)\mu_,}\,, = \frac{2\infty}{(\infty+1)\mu-(\infty-1)\mu_,}.$$

Was für μ und $\mu_,$ gilt, das gilt natürlich auch für ν und $\nu_,$ ganz in der gleichen Weise. Es lauten daher ganz allgemein die gewöhnlichen Flächen vom

Feldspath	Weiß $\mu=\mu_,=\nu=\nu_,=1$	Naumann $\mu=0,\ \mu_,=1,\ \nu=\nu_,=\frac{1}{2}$.
$P = \frac{a}{\mu} : \frac{2b}{\nu_,-\nu}$	$a : \infty b : c$	$\infty a : \infty b : c$
$x = \frac{a'}{\mu_,} : \frac{2b}{\nu_,-\nu}$	$a' : \infty b : c$	$a : \infty b : c$
$T = \frac{0a}{\mu+\mu_,} : \frac{0b}{\nu+\nu_,}$	$a : b : \infty c$	$a : b : \infty c$

Feldspath	Weiß $\mu=\mu_{,}=\nu=\nu_{,}=1$	Naumann $\mu=0,\ \mu_{,}=1,\ \nu=\nu_{,}=\frac{1}{2}$.
$o = \frac{a'}{\mu_{,}} : \frac{2b}{3\nu + \nu_{,}}$	$a' : \frac{1}{2}b : c$	$a : b : c$
$n = \frac{a}{\mu} : \frac{2b}{5\nu + 3\nu_{,}}$	$a : \frac{1}{4}b : c$	$\infty a : \frac{1}{2}b : c$
$y = \frac{a'}{2\mu_{,} + \mu} : \frac{2b}{\nu_{,} - \nu}$	$\frac{1}{3}a' : \infty b : c$	$\frac{1}{2}a' : \infty b : c$
$u' = \frac{a'}{2\mu_{,} + \mu} : \frac{2}{5\nu + 3\nu_{,}}$	$\frac{1}{3}a' : \frac{1}{4}b : c$	$\frac{1}{2}a' : \frac{1}{2}b : c$
$m = \frac{a}{2\mu + \mu_{,}} : \frac{2b}{3\nu + \nu_{,}}$	$\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c$	$a : b : c$
$e = \frac{a}{2\mu + \mu_{,}} : \frac{2b}{7\nu + 5\nu_{,}}$	$\frac{1}{3}a : \frac{1}{6}b : c$	$a : \frac{1}{3}b : c$
$s = \frac{a'}{\mu_{,}} : \frac{2b}{7\nu + 5\nu_{,}}$	$a' : \frac{1}{6}b : c$	$a' : \frac{1}{3}b : c$
$v = \frac{a'}{2\mu_{,} + \mu} : \frac{2b}{9\nu + 7\nu_{,}}$	$\frac{1}{3}a' : \frac{1}{8}b : c$	$a' : \frac{1}{4}b : c$
$i = \frac{a}{\mu} : \frac{2}{13\nu + 11\nu_{,}}$	$a : \frac{1}{12}b : c$	$\infty a : \frac{1}{6}b : c$
$u = \frac{a}{3\mu + 2\mu_{,}} : \frac{2}{5\nu + 3\nu_{,}}$	$\frac{1}{5}a : \frac{1}{4}b : c$	$\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b : c$
$\lambda = \frac{a'}{3\mu_{,} + 2\mu_{,}} : \frac{2b}{7\nu + 5\nu_{,}}$	$\frac{1}{5}a' : \frac{1}{6}b : c$	$\frac{1}{2}a' : \frac{1}{3}b : c$
$t = \frac{a}{3\mu + 2\mu_{,}} : \frac{2b}{\nu_{,} - \nu}$	$\frac{1}{5}a : \infty b : c$	$\frac{1}{2}a : \infty b : c$
$g = \frac{2a}{\mu - \mu_{,}} : \frac{b}{\nu}$	$\infty a : b : c$	$2a : 2b : c$
$q = \frac{3a'}{2\mu_{,} - \mu} : \frac{2b}{\nu_{,} - \nu}$	$3a' : \infty b : c$	$\frac{3}{2}a' : \infty b : c.$

Der Satz findet überall leichte Anwendung, wo man vom Oktaide ausgeht, und die Heraidkanten als Axen nimmt. Jetzt wird auch die Bedeutung der Zeichen für 0 und ∞ klar. Denn es hat z. B.

$$T = \frac{0a}{\mu+\mu_{,}} : \frac{0b}{\nu + \nu_{,}} : c = \frac{a}{\mu+\mu_{,}} : \frac{b}{\nu + \nu_{,}} : \frac{c}{0} = \frac{a}{\mu+\mu_{,}} : \frac{b}{\nu + \nu_{,}} : \infty c.$$

Wird darin $\mu = \mu_{,} = \nu = \nu_{,} = 1$, so geht die Formel in

$$T = \frac{a}{1+1} : \frac{b}{1+1} : \infty c = \frac{a}{2} : \frac{b}{2} : \infty c = a : b : \infty c,$$

d. h. in den gewöhnlichen Säulenausdruck über.

Wie für den Feldspath, so dürfen wir auch für obigen Euklas pag. 391 statt der Zahlen nur die Buchstabenformeln hinschreiben. Wir erhalten

$$n = a : \frac{b}{3} = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{2\nu + \nu,} \qquad = \frac{2a}{m - n} : \frac{2b}{m + n}$$

$$d = \frac{a'}{5} : \frac{b}{3} = \frac{a'}{3\mu + 2\mu,} : \frac{b}{2\nu + \nu,} = \frac{2a'}{m + 3n} : \frac{2b}{m + n} \text{ etc.}$$

Die lateinischen Buchstaben giengen von einer andern Einheit aus als die griechischen. Um diese auseinander zu entwickeln, muß

$$\frac{a}{\mu} = \frac{2a}{m - n} \text{ und } \frac{b}{2\nu + \nu,} = \frac{2b}{m + n} \text{ d. h.}$$

$$\mu = \frac{m - n}{2} \text{ und } 2\nu + \nu, = 2\mu + \mu, = \frac{m + n}{2}$$

gesetzt werden, dann ist

$$m - n = 2\mu$$
$$m + n = 4\mu + 2\mu,.$$

Gibt durch Addition und Subtraction

$$m = 3\mu + \mu, \text{ und } n = \mu + \mu,.$$

Dieses in die allgemeinen Ausdrücke der lateinischen Buchstaben gesetzt, kommt

$$d = \frac{2a'}{3\mu + \mu, + 3(\mu + \mu,)} = \frac{a'}{3\mu + 2\mu,}$$

$$d = \frac{2b}{3\mu + \mu, + \mu + \mu,} = \frac{b}{2\mu + \mu,} = \frac{b}{2\nu + \nu,}.$$

So entpuppt sich aus Weiß der Graßmann. Doch haben wir jetzt die Sache in ihrer größten krystallographischen Allgemeinheit klar auf dem Papier, wir dürfen nur beliebige Zahlen für die Buchstaben setzen, um zu gewissen Anschauungen zu kommen, während der Zonenzusammenhang und damit die wirkenden Kräfte constant bleiben.

Zwilling und Hemiedrie.

Es bildet eine der merkwürdigsten Eigenschaften der Krystalle, daß zuweilen einige Flächen gesetzlich fehlen, andere sich verdoppeln. Das Fehlen drückt man im Allgemeinen durch Meroedrie Theilflächigkeit (μέρος Theil) oder ursprünglich durch Hemiedrie Hälftflächigkeit (ἡμι halb) aus, weil Hälftigkeit das Gewöhnliche ist. Die Sache wird besonders für das Regulärsystem von Wichtigkeit, hier muß das Gesetz erläutert, und dann auf die andern Systeme übergetragen werden. Beim Zwillinge findet das Entgegengesetzte statt, dort kann man in den Systemen öfter das Bestreben erkennen, durch Verwachsen von zwei oder mehreren Individuen einen höhern Grad von Symmetrie hinzustellen. So ist z. B. der Feldspath 2 + 1gliedrig (paarig), der Zwilling dagegen macht die Stücke „zweipaarig" pag. 96, d. h. er stellt eine höhere zweigliedrige Ordnung hin, und diese kann sich dann durch einen Doppelzwilling (Vierling) zur vierpaarigen (viergliedrigen) Ordnung steigern. Ja bei dem neuerlich als „paarig" erkannten Kreuzstein gipfelt sich der Zwölfling sogar zum Zwölfpaarigen, d. h. zur regulären Ordnung. Wenn also einerseits die Materie einen höhern Grad von Symmetrie anstrebt, so ist andererseits auch der gebührende Nachdruck auf das Links oder Rechts der Individuen zu legen, pag. 92: wie Hemiedrie die vollen (holoedrischen, ὅλος) Körper in linke und rechte **trennt**, so **verbindet** der Zwilling dieselben nach bestimmtem eindeutigem Gesetz pag. 117. Man wird hier unwillkürlich, freilich in anderer Weise als Linné, an mas und femina erinnert, und um dies klar zu erkennen, muß man bei der Betrachtung von den Tetraiden pag. 93 ausgehen, die umgestülpt sich wie linker und rechter Handschuh verhalten. Daher bleibt die Definition der

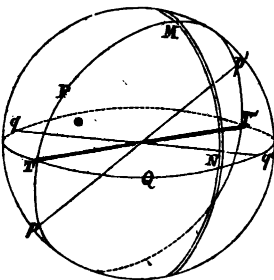
Zwillinge

von Weiß für alle Zeiten so vortrefflich: die **Zwillingsindividuen haben eine Fläche gemein und liegen umgekehrt.** Würde man statt umgekehrt **umgestülpt** sagen, so läge darin zugleich die Anschauung von links und

rechts, wie beim **Bild und Spiegelbilde.** Von einigen gemeinsamen Flächen abgesehen verdoppelt sich die Zahl der übrigen, indem zu jeglicher Fläche des einen Krystalls eine „correspondirende" des andern tritt. In diesem Sinne könnte man im Gegensatz zur Meroedrie von einer Pleoedrie (*πλέος* voll) Mehrflächigkeit sprechen, wenn die Flächen ein gewisses Axensystem immer rational schnitten, wie im regulären und dreigliedrigen Systeme. Die **gemeinsame Fläche** (Zwillingsebene) weist uns (fast ausschließlich) auf die dreigliedrige Stellung hin, wie sie durch die Dreizonenfläche am Vierzonenkörper pag. 125 gegeben ist. Die Durchdringung beider Stücke führt uns daher auf ein **Dirhomboeder** (Dihexaeder) mit sechs gleichschenklichen und **Disealenoeder** mit zwölf ungleichseitigen Dreiecken in einer Ecke. Während das Trigonalpolyeder in der Würfelecke über der Oktaederfläche es nur zu der Zahl sechs brachte, führt uns der Zwilling zur Doppelsechs. An der Oktaederecke mit acht gleichen Flächen ist so etwas nie gesehen, ja eine Vermehrung auf 16=2.8 ist krystallonomisch sogar unmöglich, weil wir da nothwendig zu irrationalen Axenschnitten kämen.

Mathematiker, denen die organische Anschauung fehlt, begnügen sich mit dieser Bestimmung nicht, sondern fügen noch eine **Zwillingsaxe** hinzu, welche auf die Zwillingsebene **senkrecht** steht, also im dreigliedrigen Systeme unserer aufrechten Axe c entspricht. Die beiden Zwillingsindividuen denkt man sich jetzt parallel gestellt oder eingeschachtelt, und spricht dann: Zwillingsebene beiden gemein, und eins 180° gegen das andere um die Zwillingsaxe gedreht. Hauy (Lehrbuch Mineral. ed. Weiß I pag. 166) nannte es daher **Hemitropie** Halbdrehung, da ihm der von de Lisle eingeführte Name mâcle pag. 17 nicht gefiel.

Miller (Treatise of Crystallography 1839 pag. 102) hat das auf der **Kugel** klar zu machen gesucht: der doppellinige größte Kreis MN bezeichne die gemeinsame Zwillingsebene beider Individuen, dann steht senkrecht dagegen die Zwillingsaxe TT', worin T und T' die entgegengesetzten Orte (Pole) der Zwillingsebene bilden. Sind nun P und p, Q und q ꝛc. die Orte correspondirender Ebenen, so müssen dieselben nicht blos mit TT' je in einem Zonenkreise Pp und Qq liegen, sondern auch die Poldistanzen sind gleich:



$$PT = pT \text{ und } QT = qT.$$

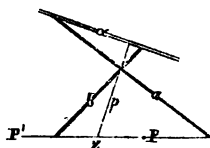
Suche ich nun zu p und q die Gegenpole p' und q', welche die Orte der parallelen Flächen bilden, so stellen dieselben sich nicht blos ebenso symmetrisch gegen den Pol T', denn es ist

$$p'T' = pT \text{ und } q'T' = qT,$$

sondern auch mit den correspondirenden Flächen P und Q symmetrisch gegen die Zwillingsebene MN, da

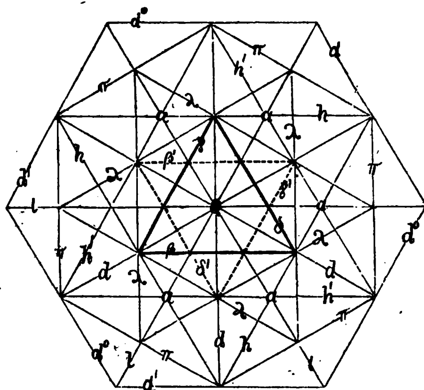
$$PM = 90^0 - PT = p'M = 90^0 - p'T'.$$

Damit ist die Sache für den Rechner vorbereitet. Wie gewöhnlich wird für die Projection auf der Ebene die Sache noch einfacher: nehmen wir



beliebige schiefe Axen abc, und ziehen in der Ebene ab eine Sectionslinie α, welche der gemeinsamen Ebene entspricht, so muss die Zonenaxe z, welche von c nach z strahlt, auf die Ebene α senkrecht stehen. Nehmen wir nun in einem beliebigen Wirtelstrahl dieser Zonenaxe einen beliebigen Zonenpunkt P an, so muss der correspondirende Punkt P' von z um die gleiche Winkeldistanz abliegen, d. h. es muss Winkel Pcz = P'cz sein. Denn der Zwilling entsteht ja, indem ich P durch Drehung um 180° in die Lage von P' bringe. Ist p der Punkt, über welchem das Ende von Axe c senkrecht steht, so muss eine Linie zp auch senkrecht gegen Sectionslinie α stehen, weil Ebene czp in den Perpendikeln pc und zc liegt, die wechselseitig auf der Projectionsebene und gemeinsamen Ebene senkrecht stehen. Schon Herr Oberbergrath Websky (Pogg. Ann. Bd. 118 pag. 240) hat uns das trefflich auseinandergesetzt. Von dieser Allgemeinheit haben wir jedoch nur selten Gebrauch zu machen, sowie man auch die Formeln nachsehen kann, welche seiner Zeit Senarmont, Reusch, Schrauf (Pogg. Ann. 1873 Bd. 148 pag. 488) entwickelten. Ich schlage lieber den anschaulichern

Constructiven Weg ein, wie das in der Methode der Krystallogr. pag. 375 auseinander gesetzt ist: wir projiciren den Zwilling in seiner dreigliedrigen Stellung auf die Oktaederfläche, und gehen dabei vom regulären Dreieck $\beta\gamma\delta$ aus. Um nun das zweite Dreieck $\beta'\gamma'\delta'$ in seine natürliche Stellung zu bringen, müssen wir es um 180° um das Centrum Q drehen, dann fallen die Medianlinien d beider Dreiecke wieder zusammen, und $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ liegen correspondirend parallel einander



gegenüber. Betrachtet man die beiden Dreiecke $\beta\gamma\delta$ und $\beta'\gamma'\delta'$ als reguläre, so können sie schon durch eine Drehung von 60° in die Kreuzlage gebracht werden, daher sagt man auch wohl, die Stücke seien blos um 60° gegen einander verdreht; organisch aufgefaßt ist diese Anschauung

nicht richtig, weil dann ungleichnamige Flächen (γ' mit β ꝛc.) zur Correspondenz kommen.

Entwickeln wir jetzt die drei Granatoederflächen ddd des Mittelpunktes, so gehören dieselben beiden Dreiecken $\beta\gamma\delta$ und $\beta'\gamma'\delta'$ an, sie können daher im Zwillinge nicht auseinander treten, sondern bleiben beiden Individuen gemein. Dasselbe gilt für die zwischenliegenden Leucitoeder lll, welche die horizontalen Axen aaa geben. Die Würfelflächen hhh und h'h'h' fallen dagegen nicht zusammen, sondern bilden ein Dihexaeder 2a : 2a. In der Natur müssen sich daher die beiden Würfel im Zwillinge kreuzen, wie das beim Flußspath, künstlichen Salmiak ꝛc. so ausgezeichnet vorkommt. Auch die Dodecaeder d'd'd' und d°d°d° bilden ein Dihexaeder 4a : 4a, sie müssen sich daher ebenfalls zu je drei zu einem Rhomboeder gruppiren. Daraus folgt, daß im Zwilling des Granatoeders eine der vier sechsseitigen Säulen bei beiden Individuen einspielt, während die aufgesetzten Rhomboeder von 120° in den Endkanten sich kreuzen. Vom Pyramidenwürfel sind dagegen sechs Flächen $\pi\pi\pi\pi\pi\pi$ so gelegen, daß sie die Kanten beider Oktaederdreiecke je in gleicher Weise zuschärfen, sie fallen also wieder zusammen. Es folgt das schon aus der Gleichheit der Kanten des Pyramidenwürfels 012 in den Würfelecken, weil dadurch die dihexaedrischen Ecken entstehen, durch die Drehung der Hälften weder bei 60° noch 180° aus ihrer gegenseitigen Parallelstellung herauskommen. Auch sechs Flächen des Leucitoeders $\lambda = 113$ haben die merkwürdige Eigenschaft. Sie gehen $\frac{3}{2}a : \frac{3}{2}a : \frac{3}{2}a$, und nehmen zu beiden Dreiecken dieselbe Lage ein. Eine leichte Rechnung nach pag. 234 gibt

$$\cos B = \frac{2\mu\pi + \mu^2}{2\mu^2 + \pi^2} = \frac{6+1}{2+9} = \frac{7}{11},$$

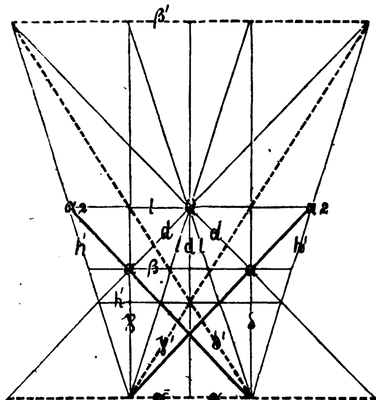
$$\cos D = \frac{-2\mu^2 + \pi^2}{2\mu^2 + \pi^2} = \frac{-2+9}{2+9} = \frac{7}{11},$$

woraus hervorgeht, daß unter dem obern stumpfen Rhomboeder der Dreikantner ein Dihexaeder bildet, während darunter dann nochmals ein scharfes Rhomboeder folgt. Gerade dieser Körper kommt beim Silber so gern als Zwilling vor, was bei ungleicher Ausdehnung der Flächen dihexaedrisches Ansehen erzeugen kann. Das Leucitoeder 112 liefert dagegen durch seine Centrumflächen eine zweite reguläre sechsseitige Säule, welche beiden Zwillingsindividuen gemein ist, während die Rhomboeder und Dreikantner sich kreuzen müssen. Im letztern Falle gelangen wir zum Maximum der Zahl, zu 12 gleichen Flächen, die ein gebrochenes Dihexaeder geben. Alles das läßt sich mit wenigen Strichen sofort an unserer Figur klar machen. In der Erscheinung haben die **gemeinsamen** Flächen öfter einige Bedeutung vor den andern, weil die Zwillingsindividuen aus der Zwillingsebene parallel herausrückend sich mit ihnen aneinander legen können, sie heißen dann **Zusammensetzungsfläche.** Ich

pflege mich darum bei der Betrachtung wenig zu kümmern, denn wer das Gesetz scharf im Auge behält, sieht über das Zufällige leichter hinweg.

Da wir es lediglich mit einer doppelt-dreigliedrigen Figur zu thun haben, so sind die Linien mit derselben Leichtigkeit auf die Kugel gebracht, wie die einfachen. Jede weitere Bemerkung darüber erscheint mir jetzt überflüssig. Wollen wir die Linien auf der

Würfelfläche darstellen (Methode Kryst. pag. 377), so kann ein Geübter sie mit ein Paar Federstrichen hinwerfen: denn die Zwillingsaxe muß senkrecht auf die gemeinsame Fläche α stehen, also fällt sie nach Q. Oder drehen wir uns im Gedanken das gemeinsame α (das Papier) um die Queraxe l, so wird das Dreieck $\beta\gamma\delta$ bei gleichbleibender Basis β immer länger und länger, bis es sich an seiner Spitze öffnet, und Linie γ dem δ parallel geht. Dann bildet das quer gelagerte h die Projectionsebene, und da alles durch den neuen Endpunkt der Axe c gelegt werden muß, so kann der Centralpunkt Q zwar nicht aus der Medianebene treten, er fällt aber hinter β, worin die Flächen ddd und lll ihren Zonenconnex behalten müssen. Da die Granatoeder zum Oktaeder gehören, so kann ich sie auch ohne diese Betrachtung ziehen. Dann ergeben sich für lll außer Q noch die Zonenpunkte $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$.



Vom zweiten Oktaeder fällt beider α zusammen, es sind also noch drei Linien $\beta'\gamma'\delta'$ zu ziehen. Sectionslinie β' fällt nach α/β, muß also der β parallel bleiben, und liegt zugleich in $\gamma/$l und δ/λ; γ' fällt nach α/γ, $\beta/$l, $\delta/$l; δ' fällt nach α/δ, $\beta/$l, $\gamma/$l. Schon die Buchstabenordnung bewahrt uns vor Irrthümern, und in der Ausführung findet nicht die geringste Schwierigkeit statt. Die Axenschnitte werden $\beta' = 5a : 5a : c$ und $\gamma' = \delta' = a : c : \frac{1}{3}a$, so daß also alle drei auf die Axen des ersten Oktaeders bezogen dieselben Zeichen bekommen. Eben so ist es mit den Würfeln h', wovon die Querlinie $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : c$ und das Paar $a : c : 2a$ geht. Sie müssen also mit drei Pyramidenoktaederflächen $a : a : 2a$ zusammenfallen. Wenn es unser Interesse erforderte, so könnten wir mit Leichtigkeit die Ausdrücke sämmtlicher gestrichelten Flächen des zweiten Oktaeders auf die des ersten zurückführen.

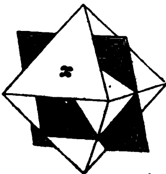
Der Tieferblickende bemerkt sogleich, daß Alles von der Lage des Zonenaxenpunktes Q abhängt, der einer der vier Granatoederkanten entsprechen muß: Die einfache Aufgabe besteht also darin, in der Projection auf eine beliebige Fläche die Zonenaxe unter den Vieren gleich

herauszufinden. Bleiben wir bei unsern griechischen Buchstaben $\alpha\beta\gamma\delta$ stehen, so ist es **stets diejenige Granatoederkante, welche in dem Dreiecke der nichtgemeinsamen Flächen** liegt. In unserm Falle nehmen wir α gemein, also mußte Q zwischen $\beta\gamma\delta$ liegen, welche ein zwischen $\gamma\delta$ offenes Dreieck bilden. Wäre γ gemein gewesen, so müßte der Punkt Q rechts zwischen $\alpha\beta\delta$ fallen. Da nun die Strahlen ddd und lll von Q aus ihre Lage nicht ändern, so kann man ohne klügelndes Nachdenken alles sofort hinzeichnen, denn mit Q, α und dem Mittelpunkte sind die nothwendigen vier Punkte zur Entwickelung des zweiten Oktaeders gegeben.

Nehmen wir die Projection auf das Granatoeder tab. 5 fig. 1 zur Hand, so bildet das Oktaeder ein aufrechtes Kreuz: ist der horizontale Strich o = 2a : c : ∞b die gemeinsame Fläche, so liegt die Zonenaxe im hintern Dreieck im Punkt a' + 0b; ist es der hintere o = 2a' : c : ∞b, so liegt sie im vordern Dreieck a + 0b. Nähme man dagegen eine der Kreuzlinien a : b : ∞c zur gemeinsamen Fläche, so bilden die übrigen drei ein schiefliegendes offenes Dreieck, aber die beiden andern Granatoederkanten schneidet es, weil sie der Projectionsebene parallel gehen. Die Zonenaxe liegt dann natürlich in der Flucht derjenigen Granatoederflächen, welche senkrecht gegen die gemeinsame Fläche stehen.

In allen diesen Fällen liegt die gemeinsame Fläche α außerhalb des Axenmittelpunktes. Wollen wir sie dahin verlegt haben, so müssen beide Oktaeder auf die **Leucitoederfläche** projicirt werden, wie man sogleich aus der Projection tab. 6 fig. 1 ersieht. Der Axenzonenpunkt liegt dann im Unendlichen, und wir dürfen blos durch die Kanten der nicht gemeinsamen Flächen $\beta\gamma\delta$ die Dodecaederlinien ddd und durch α/γ und α/δ die Leucitoederlinien ll ziehen, so ergeben sich sofort die gestrichelten Sectionslinien $\beta'\gamma'\delta'$ des zweiten Oktaeders. Die Figur wird in diesem Falle symmetrisch wie ein zweigliedriges Projectionsbild. Selbst in der **allgemeinsten** Figur, im vollständigen Vierseit pag. 131, dürfen wir nur eine Linie vor den übrigen dreien auszeichnen, um sofort zwischen letztern den Punkt der Zonenaxe ausfindig gemacht zu haben.

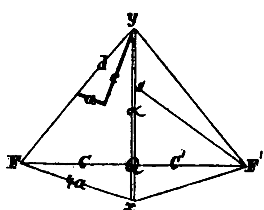
Manche legen ein großes Gewicht darauf, ob die beiden Individuen blos an einander liegen (Juxtapositio) oder sich durchdringen (Penetratio), wie nebenstehende Oktaeder, wo die Ecken des schwarzen aus den Flächen des weißen, und die Ecken des weißen aus den Flächen des schwarzen hervorstechen. Denkt man sich von den schwarzen blos die Unterhälfte vom weißen die obere, so ist es Juxtaposition. Auf das Wesen der Zwillinge hat



die Sache keinen Einfluß, so verschieden auch die Erscheinung sein mag.

Der **dreigliedrige** Zwilling, welcher am Rhomboeder die Geradendfläche gemein hat, ist dem regulären vollständig analog, nur daß das Verhältniß der Axe c zu a ein anderes ist. Will man denselben auf den Basalschnitt des dreigliedrigen Oktaeders projiciren, so haben wir statt des Quadrats im regulären jetzt nur ein Oblongum $\alpha\beta\gamma\delta$ mit gleichen aber schiefwinklichen Axen zu zeichnen, und alles ganz gleich zu entwickeln, wie oben in Figur pag. 414. Alle homologen Flächen bekommen den gleichen Axenausdruck, nur daß sie sich wegen des schiefen Winkels ihrer physikalischen Beschaffenheit nach zu dreigliedrigen Gruppen zertheilen. Schon der zweite Zwilling, welcher die gleichschenklichen Flächen des Oktaeders gemein hat, verhält sich anders. Hier fällt nemlich die Zwillingsaxe nicht mit dem Mittelpunkte der Zwillingsebene zusammen. Wir wollen uns das zunächst am

Viergliedrigen Zwillinge klar machen. Denken wir uns zwei viergliedrige Tetraeder in Zwillingsstellung, d. h. haben sie ein Dreieck α gemein, und liegen umgekehrt, so machen wir dadurch nebenstehenden Medianriß. Dann geht die Diagonale $d = a : c$ und die Basis der Dreiecke wird $Fx = F'x = 4a$. Denn die viergliedrigen Oktaeder (Zinnstein, Rutil, Scharfmangan) haben in Zwillingsstellung das nächste stumpfere Oktaeder $a : c : \infty a$ gemein, daher müssen auch die Tetraederflächen $a : c : \infty a$ lauten. Axen a und c fallen aber in den Medianschnitt. Linie FF' senkrecht auf die gemeinsame Diagonale α bildet die Zwillingsaxe, während die Kanten des zugehörigen Dodecaeders von F und F' nach dem Schwerpunkte s gehen, also antiparallel sind. Nennen wir neben der Zwillingsaxe C die Stücke x und y, so ist



$$x + y = 2d = 2\sqrt{1 + a^2},$$
$$C^2 = 16a^2 - x^2 = (x + y)^2 - y^2 = x^2 + 2xy$$
$$16a^2 = 2x^2 + 2x\,(2d - x) = 2x^2 + 4xd - 2x^2$$
$$x = \frac{4a^2}{\sqrt{1 + a^2}},\ y = \frac{2 - 2a^2}{\sqrt{1 + a^2}},\ C = \frac{4a}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{x}{a}.$$

Wenn Axe a in Hauy'scher Weise als Wurzelgröße aufgefaßt wird, so stehen die Schnitte

$$x : y = \frac{4a^2}{\sqrt{1 + a^2}} : \frac{2 - 2a^2}{\sqrt{1 + a^2}} = 2a^2 : 1 - a^2$$

in einem rationalen Verhältniß, zu C verhalten sich dagegen beide irrational. Prüfen wir die Richtigkeit der Formel mit den regulären Tetraedern, so ist $a = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, denn die Tetraederfläche geht hier nicht von $a : c : \infty a$, sondern von $a : a : c$, d. h. $\tfrac{1}{2}d : c : \infty d$, wenn wir $d = \sqrt{2}$

als Mittelaxe betrachten. Diesen Werth von a in die Formeln gesetzt, gibt

$$x = 2\sqrt{\tfrac{2}{3}},\ y = \sqrt{\tfrac{2}{3}},\ C = \sqrt{6}.$$

Die Zonenaxe geht also durch den Mittelpunkt des Dreieckes, da sich $x : y = 2 : 1$ verhält, denn der Mittelpunkt drittelt die Dreiecksdiagonalen.

Lassen wir nun die viergliedrigen Tetraeder sich in ihrer Zwillingsstellung durchdringen, so kommt kein zweigliedriges Dihexaeder, wie man leicht erwarten könnte, sondern ein Rhombenoktaeder $bxb'x'$, dessen Medianaxe durch δ und δ' irrational geschnitten wird, aber so daß

$$Qy = Qy' = y = \frac{2 - 2a^2}{\sqrt{1 + a^2}}$$ ist. Denn fixiren wir die Tetraeder in ihrer Aneinanderlagerung, so gehen

$$\begin{array}{lll} \delta = y : C : \infty b, & \gamma = x : b' : C, & \beta = x : b : C \\ \delta' = y : C' : \infty b, & \gamma' = x : b' : C', & \beta' = x : b : C' \\ \quad = y' : C : \infty b, & \quad = x' : b : C, & \quad = x' : b' : C. \end{array}$$

Ich komme zu dieser Figur, wenn ich das eine Tetraeder um die Zwillingsaxe C auf der gemeinsamen Fläche α um 180° drehe. Es wird dadurch eine zweigliedrige Ordnung hingestellt, nicht nur bei dem viergliedrigen, sondern auch bei dem 3gl., 2gl. und 2+1gliedrigen. Letzteres

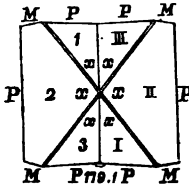
das **Zweiundeingliedrige** System scheint auf den ersten Anblick wesentlich abzuweichen, da sowohl das Carlsbader als das Bavenoer Gesetz gewöhnlich keine symmetrische Fläche aus der Verticalzone gemein haben. Allein das beruht nur auf dem zufälligen Eintreten in die Erscheinung, oder wenn man will auf Verschiebungen. Beim

Carlsbader Gesetz legen sich die Individuen mit dem zweiten Blätterbruch $M = b : \infty c : \infty a$ (Medianebene) aneinander, und liegen umgekehrt, d. h. das eine Individuum kehrt sein P nach hinten, das andere nach vorn. Nach Naumann (Lehrbuch der Mineralogie 1828 pag. 398) „Zusammensetzungsfläche parallel dem klinodiagonalen Hauptschnitte, Umdrehungsaxe parallel der Hauptaxe;“ während es daselbst beim Augit pag. 465 heißt: „Zusammensetzungsfläche parallel, Umdrehungsaxe „normal einer Fläche $\infty P\infty$.“ Man meint bei solcher Darstellung es mit einem ganz andern Gesetze zu thun zu haben, denn das eine Mal tanzt der Zwillingsbruder um diese, das andere Mal um jene Linie, während krystallonomisch erfaßt beide Gesetze genau zusammenfallen, d. h. dasselbe bedeuten: die Zwillingskrystalle haben eine Querebene $k = a : \infty b : \infty c$ gemein, und liegen umgekehrt, wodurch die zweigliedrige Ordnung hingestellt ist. Augit, Hornblende, Gyps, Borax rc., verschieben sich gewöhnlich nicht seitlich, sondern die Medianebene halbirt beide Individuen gleichmäßig. Beim Feldspath kommen dagegen Fälle

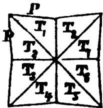
vor, wo links der Medianebene das eine, rechts das andere liegt, obwohl auch hier entfernt nicht an mathematische Schärfe gedacht werden darf. Die Zwillingsindividuen haben eben die Säule gemein, verschieben und durchdringen sich darin, wie sie nur mögen, ohne daß dadurch das Gesetz, Gemeinsamkeit der Symmetrieebene, gestört wird.

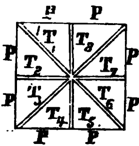
Es ist nun höchst interessant, zu sehen, wie bei den zweiundeingliedrigen Krystallen noch andere Symmetrieebenen der Verticalzone zur Zwillingsebene werden können. Beim Gyps sind zwei bekannt; beim Epidot ist es nicht k, sondern der zweite Blätterbruch $T = \frac{1}{5}a : c : \infty b$. Um dieses Gesetz mit dem gewöhnlichen in Uebereinstimmung zu bringen, hat man daher auch die T als Querfläche $a : \infty b : \infty c$ genommen. Allein damit ist nichts gewonnen, da ja auch beim Sphen und Feldspath oftmals die Symmetrieebene $P = a : c : \infty b$ den umgekehrt liegenden Zwillingsindividuen gemein ist. Da nun jedes symmetrische Tetraeder des zweiundeingliedrigen Systems als aus einem augitartigen Paar und zwei beliebigen Einzelflächen der Verticalzone bestehend gedacht werden kann, so ist damit ein wesentlicher Schritt zur Allgemeinheit des Zwillingsgesetzes pag. 117 gethan. Nur das

Bavenoer Gesetz, wornach die Zwillingsindividuen eine Fläche $n = a : c : \frac{1}{4}b$ gemein haben, kann auf den ersten Anblick unter diesen Gesichtspunkt nicht gebracht werden. Aber wenn man bedenkt, daß den Zwillingen noch häufig Spuren von Drillingen und Vierlingen anhängen, so könnte man das Bavenoer Gesetz als eine Folge des Zwillinges nach P ansehen. Schon Hr. Dr. Klein (Ueber Zwillingsverbindungen und Verzerrungen 1869 pag. 43) setzte das genügend auseinander. Seit nun Hr. Prof. Blum die P-Zwillinge im verwitterten Porphyr von Manebach am Thüringer Walde (N. Jahrb. Mineral. 1863. 343) und Hr. Dr. Cohen im Porphyr des Raubschlößchens bei Weinheim an der Bergstraße ohne alle weitern Anhänge aufgefunden hatten, und namentlich seit durch Hrn. Des Cloizeaux (Ann. Chim. Phys. 1868 4 ser. XIII) auf optischem Wege bewiesen wurde, daß das, was man bisher beim Kreuzstein als Zwilling ansah, ein vollständiger Vierling analog dem Feldspath sei, dürfen wir solche Erscheinungen mit genügenden Gründen als Kreuzungen von P-Zwillingen ansehen. Dann würde der Bavenoer Zwilling, umgekehrt von der Weiß'schen Ansicht, nur eine Folge des allgemeinern Gesetzes sein. Durch Messung läßt sich bei der Rohheit der Krystalle die Sache kaum bestimmt nachweisen, zumal da n die rechtwinkliche Kante zwischen den Blätterbrüchen P/M fast gerade abstumpft. Dennoch war Hr. vom Rath (Poggend. Annal. 1868 Bd. 135 pag. 476) so glücklich, an einem Peruanischen Sanidinzwilling mit aller Sicherheit das Einspiegeln beider M nachweisen zu können. Später fand Scacchi (Pogg. Ann. 1869 Bd. 138 pag. 539) einen merkwürdigen Sanidinkrystall „aus zwei Drillingen nach „dem Bavenoer Gesetze gebildet, welche wiederum so mit einander „zwillingsverwachsen sind, daß die P-Flächen der mittlern Individuen



„(II und 2) parallel sind, diesen also die Zwillings„ebene entspricht." Die Messung gab daher zwischen P3/PI und P1/PIII 179° 1', woraus statt der geraden Abstumpfung der Kante P/M durch n die Winkel n/P = 135° 14' 30" und n/M = 134° 45' 30" folgen würden. Es könnten dann auch M/P auf den gegenüberliegenden Seiten nicht einspiegeln, sondern sie müßten einen ausspringenden Winkel von 179° 30' 30" machen. Würden die einspringenden Winkel von 179° 1' nicht sein, so müßten die x von 1 und III und I und 3 einspiegeln, wir hätten einen Vierling, so aber läßt sich die Sache nur durch sechs verwachsene Individuen erklären. Unerwartet genug fand Hr. vom Rath (Pogg. Ann. Bd. 138 pag. 539) unter den im Kupferofen zu Sangerhausen entstandenen kleinen Kalifeldspäthen **Achtlinge**, die auch auf diese Weise ihre Erklärung finden könnten, dann müßten auf allen vier Seiten einspringende Winkel von P/P vorhanden sein. Es wären also in Wahrheit Achtlinge, die sofort in **Vierlinge** übergehen müßten, sobald die einspringenden Winkel zwischen den P-Flächen wegfielen, d. h. sobald n die Kante P/M gerade abstumpfte. Neuerlich sind solch scheinbare Achtlinge in Schlesien (Dr. Becker, Mineralvorkommen im Granit von Striegau 1868. Inaugur.-Diss. pag. 19) in außerordentlicher Pracht vorgekommen, und von den Herren Dr. Hessenberg und Prof. v. Rath besprochen worden. Wenn wir dennoch öfter von einer gemeinsamen Fläche n sprechen, so geschieht das nicht aus „Irrthum", sondern nach althergebrachter Gewohnheit, da eine Winkeldifferenz von sechs Minuten noch manche Bedenken zuläßt, alte Anschauungen aufzugeben. Nur das Eingliedrige System ist aller Symmetrie baar, man macht sich daher die





Eingliedrigen Zwillinge bei den **Feldspäthen** am besten mit dem Vierzonenkörper PMTl pag. 48 klar. Lege ich denselben mit der Medianebene M = b : ∞a : ∞c auf den Spiegel, so gibt **Bild** und **Spiegelbild** (ἐναντίος gegenüber) den Zwilling (Albitzwilling). Es wird dadurch der Unterschied zwischen links und rechts ausgeglichen, und auf P entsteht ein aus- oder einspringender Winkel. Der Kalifeldspath kann auf diese Weise keinen Zwilling geben, weil daselbst ein Unterschied zwischen links und rechts nicht stattfindet. Wohl aber bekommen wir beim Kalifeldspath einen Zwilling, wenn wir k = a : ∞b : ∞c auf den Spiegel legen, weil dadurch der Unterschied zwischen Hinten und Vorn ausgeglichen wird. Durch den Zwilling wird die Albitsäule rhombisch, k hat also wie beim Kalifeldspath seine bestimmte Lage, es stumpft eben die Zwillings-Säulenkante gerade ab. Lege ich diese auf den Spiegel, so gibt Bild mit Spiegelbild den **Vierling** (Albitvierling).

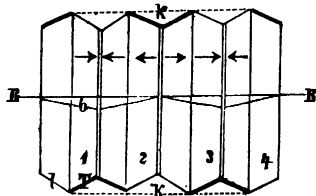
Beim Albitzwilling spiegelt M ein, und Axe c nebst Klinodiagonale a bleiben parallel. Daraus geht sofort

der **Periklinzwilling** hervor, wenn wir P einspiegeln und die Klinodiagonalen parallel sein lassen. Schieben wir in dieser Lage die Zwillingsindividuen über einander, so daß P auf P' liegt, und die Klinodiagonalen zusammenfallen, so kommt nicht auf P, sondern auf M der aus- oder einspringende Winkel. Legen wir in dieser Stellung eines der P auf den Spiegel, so gibt Bild mit Spiegelbild den **Periklinvierling**, welcher zum Bavenoergesetz hinüberführt.

Nach dieser Art der Anschauung sind die Albit- und Periklinzwillinge dem eingliedrigen Systeme eigenthümlich, die Vierlinge dagegen den Zwillingen des Orthoklases analog. Der strenge Beweis kann freilich nur durch die genauesten Messungen geführt werden, wozu ein passendes Material nicht leicht gefunden wird. Begeht man bei der Rohheit des Materials in der Deutung wirklich einen Irrthum, so darf man sich zur Zeit noch diesen »error insensibilis« gefallen lassen.

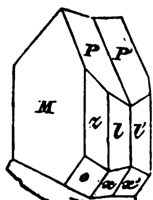
Zur Demonstration mache ich am Vierzonenkörper PMTl den Säulenbruch T schwarz, und die scharfe Kante P/M roth. Die Schiefe der Winkel übertreibt man, damit die Ungleichheit um so besser in die Augen fällt.

1. **Albitzwilling:** Die Medianfläche M = b : ∞a : ∞c bildet ein Rhomboid mit schiefen Winkeln und ungleichen Seiten. Der einen Parallelseite liegt der stumpfe, der andern der scharfe Winkel P/M an. Diese Rhomboide decken sich in zweierlei Weise: entweder fällt Parallelseite mit stumpfem Winkel auf Parallelseite mit scharfem Winkel P/M, oder Parallelseite mit stumpfem Winkel auf Parallelseite mit stumpfem Winkel. In jenem Falle stehen beide Individuen parallel, in diesem werden sie Zwillinge. Also auch hier ist die Weiß'sche Sprache treffend und unzweideutig. **Naumann** (Lehrbuch Mineral. 1828 pag. 395) sprach: „Zusammensetzungsfläche parallel, Umdrehungsaxe normal dem brachydiagonalen Hauptschnitt.“ Der **Albit** des Schmirner Thales in Tyrol liefert vortreffliche Beispiele. Da sie die Fläche M nach beiden Kantenrichtungen M/T und M/P gemein haben, so fallen beide Individuen in die gleichen Zonen, wie M, d. h. die Säulenzone und die Diagonalzone sind ihnen gemein. Uebrigens sollen nach Hr. Des Cloizeaux auch häufig Unregelmäßigkeiten vorkommen, indem die Summe der Zwillingssäule nicht immer genau 720° gäbe, sondern bis auf 1° 40' abweiche. Hr. vom Rath (Pogg. Ann. 147 pag. 38) fand dagegen beim Vesuvschen **Anorthit** die Anlagerung an M vollkommen.



Gewöhnlich sind die Individuen **an einander** gewachsen, doch ge-

wahrt man an der Zwillingsgrenze nicht selten auch beim Albit mehrere Streifen, die auf Wiederholung der Individuen hindeuten. Beim Oligoklas und Labrador vermehren sich die Streifen dergestalt, daß man die Individuen nicht mehr zählen kann. Man hat das **polysynthetische** Zwillinge, auch wohl **Vielling**e genannt. Es kommen solche Wiederholungen auch beim Dreigliedrigen (Kalkspath) und Zweigliedrigen (Aragonit) vor, und in allen solchen Fällen stehen immer die geraden und ungeraden Stücke unter einander parallel. Wenn sich dabei die äußern Stücke gegen die innern vergrößern, so kann man leicht verführt werden, die Exemplare für einfach zu halten, wie wir es beim isländischen Doppelspath so häufig finden, was Hr. Prof. v. Reusch sogar künstlich durch Druck darstellte (Monatsbericht Berl. Akad. Wiss. 1867 pag. 223). Beim



Albit und Anorthit tritt die Sache meist so in die Erscheinung, daß ein Individuum sich nach der Medianebene M gespalten hat und seine gleichwerthigen Seiten nach außen kehrt. Dann muß auf den blättrigen Brüchen P einerseits ein einspringender Winkel P/P', andererseits ein ausspringender entstehen. Denken wir in der vorhergehenden Figur zwischen den Individuen 1 und 2 die innern Hälften weg, so verschwinden vorn die blättrigen Säulenbrüche T, und die unblättrigen *l* bilden die neue Säule; hinten dagegen verschwinden umgekehrt die *l* und die blättrigen T machen sich geltend. Daraus folgt, daß wenn der einspringende Winkel auf dem blättrigen P sichtbar wird, darunter in der Säule die Flächen *ll'* stehen, wie Figura zeigt. Von der physikalischen Verschiedenheit von T und *l* kann man sich im Schmirner Thale nur schwer überzeugen. Dagegen wird die Sache bei Baveno und im Hirschberger Thale des Riesengebirges klar: dort schwitzten aus den Säulen des 2 + 1gliedrigen Kalifeldspathes

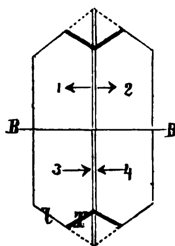


kleine Albite hervor, die fest auf den Säulen T/T sitzen, sogar wie Schmarotzer sich in den Kalifeldspath einnagten. Auf den andern Flächen gewahrt man davon nicht eine Spur. Alle diese unzählbaren Krystalle kehren an unserm Stücke ihre blättrigen Säulenbrüche T nach innen, ihre unblättrigen gestreiften *l* nach außen, sie befinden sich also wie die Individuen 1 und 2 in Zwillingsstellung. Da der Kalifeldspath uns die Hinterseite zeigt, so sind die blättrigen P auch wie an ihm nach unten gekehrt. Wir haben dabei

dreifaches zu bemerken: 1) die gesetzmäßige Verwachsung ungleichwerthiger Krystalle, was uns an Perthit, überhaupt an die Hypothese von Verwachsung von Kalk- mit Natronfeldspathen erinnert; 2) die eingliedrigen Stücke schwitzen in einer gegenseitigen Stellung aus, die

mit dem Albitzwilling vollständig übereinzustimmen scheint; 3) Albit und Feldspath haben wahrscheinlich die Medianebene M und darin die aufrechte Axe c, welche der Säulenkante entspricht, mit einander gemein. Letztere Bestimmung ist noch zweideutig, sie läßt eine Parallelstellung oder einen Zwilling zu. Gewöhnlich ist die Parallelstellung mit dem als Unterlage dienenden Feldspathe. Die Axen und Flächen des Kalifeldspathes haben daher ohne Zweifel einen Einfluß auf die Stellung der Albitkrystalle ausgeübt, es ging das aber nicht anders, als daß die eingliedrigen Albite ebenfalls in eine 2 + 1gliedrige Ordnung traten. Es könnte die Frage entstehen, ob es Erfunde gibt, woran der Albitzwilling mit seiner Unterlage, dem Kalifeldspath, in Zwillingsstellung nach dem Karlsbader Gesetz vorkommt?

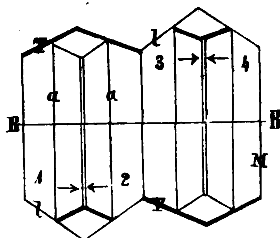
Durch den Albitzwilling, sei es mit oder ohne Wiederholung, ist die Axe B pag. 420, welche rechtwinklich auf a steht, und damit die Parallele $k = a : \infty B : \infty c$ gewonnen, ja gleichsam deducirt. Mit dieser k können wir uns die **Durchwachsung** klar machen, welche so ausgezeichnet im Kalkstein des Col de Bonhomme am Mt. Blanc steckt, und von Hrn. Hessenberg (Abh. Senckenb. Nat. Gesellschaft 1858 II pag. 10) schon richtig dargestellt wurde. Später hat G. Rose (Pogg. Ann. Bd. 125 pag. 457) die kleinen Krystalle ausführlicher beschrieben. Man kann sich das Gesetz dieser complicirten Krystalle mit Leichtigkeit an unserm obigen Querschnitte der vier Säulen klar machen. Daselbst geht 1 der 3 und 2 der 4 parallel. Drehen wir jetzt den Zwilling 1 . 2 in seine Lage zurück, so kommt der ausspringende Winkel 1/2 oben hin, und es geht nun 2 der 3 und 1 der 4 parallel. Ich darf in dieser Stellung den ausspringenden Winkel nur hinten hinschieben. Bei allen diesen Manipulationen bleibt den vier Individuen die Medianfläche M gemein, und die Drehung geht um die Linie BB, welche senkrecht auf M der sogenannten Zwillingsaxe entspricht. Der Zwilling wird nun in nichts verändert, wenn wir die beiden Theile 1.2 und 3.4 gegenseitig parallel unter sich verrücken, sie können dann unter andern auch ihre Grenze in B haben, und das ist ihre gewöhnliche Erscheinungsweise. Denken wir uns nun den einspringenden Winkel von T weg, und lassen *l* sich ausdehnen, so entsteht eine vollständige zweiundeingliedrige Ordnung, vorn anders als hinten, aber links wie rechts.

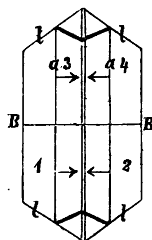


Wollte man es als besonderes Gesetz auffassen, so würde die Umdrehungsaxe, wie vorhin, normal auf dem brachydiagonalen Hauptschnitt bleiben, nur die Zusammensetzungsfläche ihre Lage ändern, und mit $a : \infty B : \infty c$ zusammenfallen, woraus immer wieder die Parallelität der zwei Gruppen bewiesen ist. Der

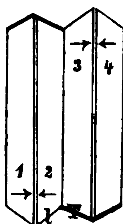
2. **Albitvierling** knüpft an die Querfläche $k = a : \infty B : \infty c$ an, denn legen wir den Zwilling mit dieser Fläche auf den Spiegel, so kam oben

der gesuchte Vierling. Wie beim ersten Gesetz spiegelt auch hier M noch ein, während aber dort c und die Klinodiagonalen zusammenfielen, fällt jetzt nur noch die aufrechte Axe c zusammen, und die Klinodiagonalen kreuzen sich. Man sagt daher, einer der beiden Zwillinge drehe sich 180° um c, und M sei die Verwachsungsfläche (Verbindungsebene), was freilich nur zufällige Erscheinungsweise ist. Verbindungsfläche könnte ebenso gut jede homologe Fläche der Säule, sogar die Geradendfläche sein. Man kann sich das alles wieder an demselben **Säulenquerschnitte** klar machen, denn von der Säulenflächenlage hängt im wesentlichen das Verständniß ab, da die Enden ihr folgen müssen. Will man die Sache noch verständlicher machen, so säge man die beiden Holzzwillinge 1.2 und 3.4 so ab, daß sie senkrecht auf dem Tische stehen, dann wird alles durch Parallelbewegung klar. Diese Querschnitte stellen wir dar, sie stehen senkrecht gegen die Zwillingsebene, aber etwas schief gegen die Säulenflächen T*l*. Allein auf die Größe des Winkels kommt es bei dem Verständniß nicht an, sondern lediglich auf ihre Gleichheit und Ungleichheit. Wie bei den Zwillingen, so steht auch jetzt noch BB rechtwinklich gegen sämmtliche M, verlängern wir $T_1 T_2$, $T_3 T_4$, $l_1 l_2$, $l_3 l_4$ zu Säulen, so müssen diese rhombisch sein, und durch $k = a : \infty B : \infty c$ wie bei den Zwillingen gerade abgestumpft werden. Damit ist uns der Schlüssel für alle Parallelbewegungen gegeben. Es gehen jetzt T_1 mit T_4 und T_2 mit T_3, und eben so l_1 mit l_4 und l_2 mit l_3 parallel, während $k = a : \infty B : \infty c$ die rhombischen Säulen gerade abstumpft. Die Individuen haben also in Wirklichkeit auch die Säule gemein und wenden ihre Endflächen nur entgegengesetzt. Rücken wir jetzt den linken Zwilling 1.2 parallel mit sich selbst dergestalt gegen den rechten 3.4, daß ihre Säulenkanten T_1/T_2 und T_3/T_4 sich berühren, so haben wir Bild und Spiegelbild, die eigentliche Normallage, und drücken wir sie in dieser Lage gegen einander, so kann man den vordern auf der Hinterseite, und den hintern auf der Vorderseite immer mehr verkürzen, bis sie mit ihren Hälften, wie Figura zeigt, ins Gleichgewicht gelangen. Denkt man sich dann die Endflächen dazu, so kommen wir zu Formen, die den Schwalbenschwanz-Zwillingen des Gypses analog sind: wir haben damit das Gesetz, Bild und Spiegelbild.

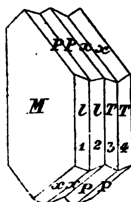


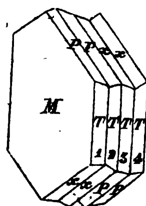


Die **Erscheinung** ist freilich sehr verschieden, und dürfte von manchen Zufälligkeiten abhängen. Gewöhnlich sind es beim **Albit** nicht vier vollständige Individuen, sondern zwei halbirte. Denkt man sich an jedem Zwilling die innern Hälften der Zwillingsindividuen nach der Richtung

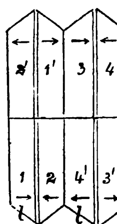


B verkürzt oder ganz weg, so wird der Vierling bedeutend verschmälert. Man kann dazu aber auch die volle Figur benutzen, indem man durch Punktirung der Säulen dasselbe aber breitere Bild erhält. Man muß sich dann blos die Axen a wegdenken. Im **Schmirner** Thale kommen diese Hälften öfter ganz vorzüglich vor. Wie beim Kalifeldspath, so kann man sich auch hier aus solch halbirten zwei Individuen zwei Zwillinge hinstellen, indem man die Hälfte 1 an die Hälfte 4 rückt, und die Hälfte 2 mit ihrer langen Seite an die lange Seite der Hälfte 3 legt. Wir haben dann wie beim Orthoklas einen Zwilling, der links (1 . 4), und einen andern, der rechts (2 . 3) seinen Blätterbruch P zeigt. Diese Zwillinge sind natürlich gänzlich anders als jene ersten, denn jetzt ist vorn gleich hinten aber links von rechts verschieden. Hr. vom Rath (Pogg. Annal. 1872 Bd. 147 pag. 55 fig. 20) bildet sie ganz vortrefflich am Vesuv'schen Anorthit ab. Da der Anorthit pag. 48 zu denjenigen gehört, welche ihren Säulenblätterbruch T jenseits der stumpfen Kante haben, so muß man bei der Vergleichung mit Albit dieses Unterschiedes gebührende Rechnung tragen. Legen wir zwei Krystalle mit M an einander, und drehen den einen 180° um c, so ist die Stellung mathematisch fest, denken wir uns dann an jedem nach außen ein Zwillingsstück angehängt, so ist der Vierling, von dem wir ausgingen, wieder da. Bei unserm Schmirner Krystall liegt der einspringende Winkel P/P mit der Säule *l/l* links und der einspringende x/x über den blättrigen Brüchen T/T rechts. Es ist nun leicht einzusehen, daß ein rechter kommen muß, sobald wir mit den beiden Zwillingen PP und xx wechseln. Dagegen finden sich nun Fälle, wo sämmtliche Blätterbrüche T der Säule vorn liegen, es bildet dann P/P oben einen ausspringenden, und x/x einen einspringenden Winkel. Dies herauszubringen, dürfen wir nur Zwilling 1 . 2 mit T/T nach vorn zur Hand nehmen, und den zweiten 3 . 4 in der gleichen Stellung um k=a : ∞B : ∞c 180° drehen, d. h. umgekehrt legen und dann an M hinanschieben. Das Gegenstück mit allen *l* vorn bekommen wir, wenn wir 1.2 mit *l/l* nach vorn zur Hand nehmen, und den zweiten 3.4 gegen k umgekehrt legen, dann springt oben x/x aus und P/P ein. Schreiten wir nun zur



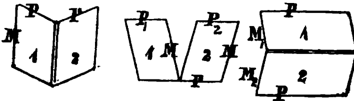


Durchwachsung, wie sie nach G. Rose (Pogg. Ann. 125 tab. 4 fig. 3) an den Vierlingen des Col de Bonhomme so ausgezeichnet vorkommt, so haben wir an den Säulenquerschnitt, hinten oder vorn, die parallele Fortsetzung kreuzweis anzusetzen, wir können dann, wie in



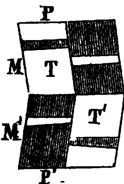
nebenstehendem Falle vorn und hinten mit l endigen, so werden die Bonhommer gezeichnet. Wir haben da das Fortwachsen an der Seite von TT angebracht. Würden wir es an ll anbringen, so blieben die TT als Säulenflächen. Wir könnten auch den einen Zwilling mit TT den andern mit ll endigen lassen, Erscheinungsweisen, die alle unmittelbar aus dem Gesetz fließen. Den

3. **Periklinzwilling** machen wir uns am besten am Querschnitt der beiden Hauptblätterbrüche P/M klar.



Entgegen dem Albitzwilling spiegelt jetzt P ein, und die aus- und einspringenden Winkel erscheinen auf dem gestreiften M, wo man sie leichter übersieht, als auf dem perlmutterglänzenden P: Zusammensetzungsfläche die Basis P, Zwillingsaxe die in der Basis liegende Normale der Brachydiagonale P/M. Folge davon würde sein, daß die durch die Winkelbildung M/M′ entstehenden Streifen der Brachydiagonale P/M parallel gehen, wie es auch gewöhnlich trotz der ungünstigen Streifung den Anschein hat. Auf der Säule ragen dagegen die eingeschobenen Zwillingsstücke über, werden keilförmig und unsicher. Albit- und Periklinzwilling haben eine gewisse innere Verwandtschaft: denn läßt man den Albitzwilling in die mittlere Figur so auseinander fallen, daß statt M nun P, mit P_2 spiegelt, und schiebt in dieser Lage das Stück 1 über Stück 2, so kommt der Periklinzwilling; und läßt man umgekehrt die Periklinstücke auf M_1 und M_2 fallen, und über einander schieben, so kommt der Albitzwilling. Das eine Mal scheint also M, das andere Mal P die größere Anziehungskraft ausgeübt zu haben, ohne daß dabei die Stücke aus der Axe a herausrückten. Von vorn gesehen liegt der einspringende Winkel über T, und es gibt linke und rechte, je nachdem ich das obere oder untere Individuum drehe.

Wie beim Albit der Albitzwilling, so überwiegt beim Periklin der Periklinzwilling bei weitem. In den Alpen verräth sich fast jeder



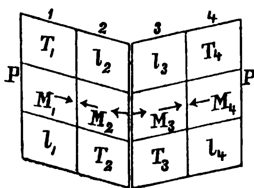
Krystall namentlich auf der Säule durch eingeklemmte Keile, die stets einen andern Glanz haben, als die durchbrochene Fläche, weil nemlich T mit Perlmutterglanz und innern Farbenflecken ausgezeichnet blättrig ist, während das gestreifte l nichts von Blättrigkeit verräth. Wir dürfen uns nur die Säulenflächen Tl und T′l′ auf den Querschnitt eintragen, so müssen die gleichwerthigen Flächen gekreuzt liegen, denn lägen sie nicht gekreuzt, so giengen beide Individuen parallel und wären keine Zwillinge. Aber außer P geht keine der Flächen MTl des Vierzonenkörpers der andern parallel, wenn sie daher bei Wiederholung der Individuen erscheinen, so treten sie auf TT′ll′ keilförmig und mit überragenden Linien hervor, blos auf M und M′ neigen sich die Linien immer zur entschiedenen Parallelität, wenn diese

auch oft durch Streifung und Zusammenwachsungsfläche gestört wird. Wenn dagegen die Fläche k = a : ∞b : ∞c beobachtet würde, so könnte sie nicht einspiegeln.

Beim **Anorthit** spiegelt aber k vollständig ein, wie das erst neuerlich Hr. vom Rath (Pogg. Ann. 1872 Bd. 147 pag. 40 tab. 2 fig. 10) klar bewiesen hat. Im großen bleibt zwar dieselbe Lage, d. h. die Zwillings-Stücke haben P gemein, und sind von der Säule her gesehen 2 + 1-gliedrig geordnet, aber die Zwillings-axe steht nicht mehr normal auf M, sondern die einspiegelnden k und k′ gehen jetzt der Macrodiagonale b parallel. Eine Folge davon ist, daß alle Zwillingskanten des Vierzonenkörpers sich kreuzen, doch wird die Kreuzung theilweis so gering, daß sie bei rohen Krystallen leicht verkannt wird. Es bedarf folglich nur der geringsten Drehung auf P, um aus der normalen Lage auf a in die schiefe der Axe b zu gelangen. Bei dieser **Zweideutigkeit** hat daher Hr. Schrauf (Sitzungsber. Wien. Akad. Math. Cl. 1869 Bd. 60. 1 pag. 1006) gemeint, daß auch am Periklinzwillinge nicht die Normale B sondern die Macrodiagonale b einspiele. Der

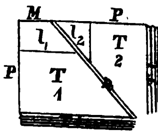
Oligoklas, der seinen Säulenblätterbruch T an den Albitzwillingen unterhalb der einspringenden Winkel von P/P′ hat, also dem Anorthit analog ist, soll nach Hrn. vom Rath (Pogg. Annal. 1869 Bd. 138 pag. 468) in den Sommaauswürflingen meßbare Krystalle zeigen, woran $\gamma = 90^\circ\ 4'\ 12''$ wird. Die Axen ab in der Basis P würden dann nur vier Minuten vom rechten Winkel abweichen, und diklin im linearen Sinne sein. Fläche P bildet daher einen Rhombus, dessen Kanten durch k : a : ∞b : ∞c und M = b : ∞a : ∞c gerade abgestumpft werden. Daraus folgt, daß am Zwillinge Macro- und Brachydiagonale fast zusammenfallen, und sämmtliche Zwillinge M/M′ und T/T′ respective den Kanten P/M, P′/M′ und P/T, P′/T′ parallel gehen. Wenn Oligoklas eine Verwachsung von Albit und Anorthit wäre, so sieht man freilich nicht ein, wie solche Winkelverschiedenheiten in den Axen entstehen können.

4) **Periklinvierling**, das Spiegelbild vom Periklinzwilling, hat die Senkrechte auf P zur Zwillingsaxe, und P zur Zwillingsebene. Oder kurz, die Zwillingsindividuen innen haben P gemein, und liegen umgekehrt. Die Sechsecke der Vierzonenkörper $P_2M_2T_2l_2$ und $P_3M_3T_3l_3$ decken sich vollständig, die sechs Zwillingskanten gehen daher mit den sechs Kanten der Basen P parallel, folglich müssen in unserm Profil

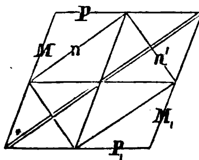


oben die l_2l_3 und unten die T_2T_3 correspondiren. Denken wir uns jetzt links an Individuum 2 Individuum 1, rechts an Individuum 3 Individuum 4 als Periklinzwillingsglied angehängt, woran die Säulenflächen alterniren, so haben wir das Bild unseres Vierlings. Wie Ind. 2 und Ind. 3 sich mit ihren Sechsecken decken, so decken sich auch Ind. 1 und Ind. 4. Der Periklinvierling besteht also aus zwei Correspondenzzwillingen, wovon der eine seine l_2l_3 zeigt, wo der andere seine T_1T_4 hat, sie verhalten sich deshalb wie links und rechts. Vertausche ich dagegen Ind. 1 mit Ind. 3 oder Ind. 2 mit Ind. 4, so kommen innen wie außen Alternanzzwillinge, die in Beziehung auf die Lage von T und *l* sich gegensinnig verhalten. Diese Lage wird gewöhnlich fälschlich als ein besonderer Zwilling angesehen, worin a die Zwillingsaxe bildet, während es lediglich eine Folge des Periklinvierlinges ist, aus dem es durch Parallelbewegung der Individuen hervorgeht.

Wenn sich nun zwei solcher Periklinvierlinge kreuzen, wie Anlagerungen eines dritten Zwillingsstücks (Hdb. Mineral. 1863 pag. 231) wirklich vorkommen, so führt das wie beim Orthoklase zur **Bavenoer** Stellung, was Neumann (Abhandl. Berl. Akad. 1830 pag. 218) am Albit schon dargestellt hat. Die Zwillinge haben hier, wie bei Baveno, Fläche $n = a : c : \frac{1}{4}b$ gemein, welche die stumpfe Kante P/M abstumpft, und die Zwillingsaxe steht senkrecht darauf, d. h. die Hälften sind auf n 180° gegen einander verdreht, die Linien n_1/P und n/P, bleiben einander parallel. An unserm Tyroler Albit liegen, wie bei dem Neumann'schen, die blättrigen Säulenbrüche von T_1 und T_2 nach außen, die nicht blättrigen l_1l_2 nach innen der Zwillingsgrenze zu. An beiden Individuen kommen jedoch auf den äußern Flügeln Tl eine Menge Streifen sowohl auf T als auf M vor, die auf den gewöhnlichen Albitzwilling pag. 420 hindeuten, so daß auch hier, wie beim Periklin, zweierlei Zwillingsgesetze auftreten, was einen **Albitvierling** zweiter Art gibt. Natürlich kann man bei solchen eingliedrigen Formen zweierlei Fälle unterscheiden, je nachdem T nach außen oder innen fällt. Fällt es nach außen, wie in unserer Figur, so ist die Diagonalfläche $n = a : \frac{1}{4}b : c$, welche die stumpfe Kante P/M abstumpft, gemein; fällt es nach innen, so ist $e = n' = a : \frac{1}{4}b' : c$ gemein, welche die scharfe Kante P/M abstumpft. Letzterer Fall scheint ungewöhnlicher zu sein.



Neumann fand, daß die beiden Diagonalflächen n/n' sich unter 90° schnitten, Hr. vom Rath (Pogg. Annal. 1871 Ergänzungsb. V pag. 430) hat das bestätigt. Folge davon wäre, daß M des einen Zwillingsindividuums mit P des andern einspiegelte, und auch an unserm Stücke kann der Winkel zwischen P und M nur sehr unbedeutend sein. Man macht sich das leicht



durch vorstehenden **Querschnitt** klar. Denn wenn n und n' sich rechtwinklich schneiden, also ein Oblongum bilden, so müssen die blättrigen Brüche MP einen Rhombus darum beschreiben. Denke ich nun diese Säule nach der Doppellinie (Zwillingsebene n) halbirt, und drehe die eine Hälfte 180° um die andere, so muß M nach P fallen, also M der P, parallel gehen, d. h. einspiegeln. So lassen sich mit der einfachsten Construction selbst verwickelte Fälle leicht begreifen.

Zu einer nochmaligen **Uebersicht** ist Dr. Kayser's (Pogg. Ann. 1835 Bd. 34 pag. 109) gründliche Abhandlung „über einen Cyclus von zwölf „Zwillingsgesetzen, nach welchen die Krystalle der einundeingliedrigen „Feldspathgattungen verwachsen", zu vergleichen. Der Cyclus 12=3.4 bezieht sich auf das Hexaid mit den drei Axenebenen

$$ac = M = b : \infty a : \infty c,$$
$$ab = P = c : \infty a : \infty b,$$
$$bc = k = a : \infty b : \infty c.$$

Fassen wir davon die Fläche M = ac ins Auge, so finden daran vier Fälle statt, je nachdem die Normale auf Fläche ac, oder die Normalen in Fläche ac auf die einzelnen Axen a oder c, endlich b als Zwillingsaxe genommen werden. Ganz analoge vier Fälle kann man auf P und k denken. Wir haben daher als Zwillingsaxen die Normalen auf die drei Flächen MPk, die drei diesen Flächen der Reihe nach correspondirenden Axen bca und die 2+2+2=6 Normalen in den drei Ebenen ac, ab, bc. Bei näherer Betrachtung geben aber letztere sechs Gesetze nur drei neue, weil der aus zweierlei Zwillingsgesetzen gebildete Vierling noch ein drittes Zwillingsgesetz involvirt. Nehmen wir drei Stücke, Nro. 1, Nro. 2, Nro. 3, setzen links an Nro. 2 einen Albitzwilling Nro. 1, rechts dagegen einen Albitvierling Nro. 3, und denken nun das Mittelstück Nro. 2 möglichst dünn, oder lassen es herausfallen, so geben Nro. 1 und Nro. 3 ein drittes durch die Stellung involvirtes Zwillingsgesetz. Die Sache ist abstract genommen zwar rein gegenseitig, in einem solchen Drillinge involviren beliebige zwei stets ein drittes Gesetz, so daß jedes als das involvirte genommen werden könnte. Aber die Natur scheint doch mit einer gewissen Auswahl zu verfahren: der Albitvierling macht sich so, daß wie sein Zwilling Bild und Spiegelbild eines Einzelindividuums ist, so ist sein Vierling Bild und Spiegelbild eines solchen Zwillings. Daraus folgt dann erst das dritte Zwillingsgesetz Nro. 1 gegen Nro. 3: die Individuen haben eine Senkrechte auf Axe c in ac = M. Ganz ähnlich entwickelt sich der **Periklinvierling**: setzen wir Fläche P senkrecht und Axe a parallel der Spiegelfläche, so liefert Bild und Spiegelbild den Zwilling. Legen wir diesen Zwilling mit dem gemeinsamen P auf den Spiegel, so geben Bild und Spiegelbild wieder den Vierling. Haben wir einen gewöhnlichen Zwilling Nro. 1 und Nro. 2 mit Zwillingsaxe in ab = P senkrecht auf a, legen dagegen Nro. 3 mit Zwillingsaxe senkrecht auf P, und denken Nro. 2 wieder

weg, so treffen sich Nro. 1 und Nro. 3 in der Lage mit Zwillingsaxe a. Aus zweien ist also wieder diese dritte gefolgert. Daher habe ich immer statt der sechs Gesetze bei Gustav Rose (Pogg. Ann. Bd. 129 pag. 13 Separatabdr.) nur vier angenommen, weil die dortigen Nro. 3 und Nro. 6 nur Folgesätze sind. Dasselbe gilt natürlich nun auch von der dritten Ebene k = a : ∞b : ∞c, doch spielen diese, wenn sie überhaupt vorhanden sein sollten, in der Natur keine Rolle.

Sonderbarer Weise können sich diese verschiedenen Zwillingsgesetze nun auch unter einander verbinden: so zeigen die derben Labradorstücke häufig Zwillingsstreifen auf P und M zugleich, es scheint hier der Periklinzwilling mit dem Albitzwilling sich zum **Labradorvierling** verbunden zu haben. Solche Vierlingsstücke vereinigen sich dann wieder nach der Ordnung des Karlsbader- oder Bavenoerzwillings, so daß die Erscheinung der Sache sich schwierig auf die möglichen Gesetze zurückführen läßt.

Hemiedrie.

Wie ich schon in meiner Methode der Kryſtall. 1840 pag. 191 auseinandersetzte, entstehen die hemiedrischen Körper, wenn ich auf eine Fläche 0 und auf die anliegenden 1 schreibe. Die Zahlen 1 und 0 stehen gegen einander dann symmetrisch: den 1 liegen 0 und den 0 liegen 1 an. Lasse ich dann die Nullen oder die Eins wachsen, so kommen die hemiedrischen Körper. Bekanntlich gibt

Oktaeder die **Tetraedrie** pag. 91 mit **geneigten** Flächen; dazu gesellen sich die oktaedrischen Umrisse der Pyramidenoktaeder, Leucitoeder und Achtundvierzigflächner. Die gleichschenklichen Dreiecke der abwechselnden Oktanten im **Pyramidenoktaeder** geben 12 Deltoide pag. 116, daher heißt es **Deltoiddodekaeder.** Die Deltoide der **Leucitoeder** geben dagegen **Pyramidentetraeder** mit 12 gleichschenklichen Dreiecken; folglich müssen die **Achtundvierzigflächner gebrochene Pyramidentetraeder** mit 24 ungleichseitigen Dreiecken (Hexakistetraeder) erzeugen, den allgemeinsten Körper der Tetraedrie, woraus man die andern drei Körper durch Wegfall der Kanten entwickeln kann. Die

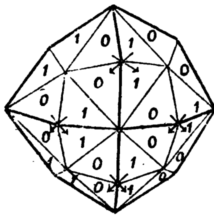
Pyramidenwürfel müssen dagegen vollflächig auftreten, weil sie schon einen tetraedrischen Umriß zeigen, sie liefern die **Pyritoedrie** mit **parallelen** Flächen. Dazu gehört das **Pyritoeder** mit 12 symmetrischen Petagonen, welches man nicht mit dem Platonischen Dodecaeder pag. 7 verwechseln darf, denn in dieses kann man fünf Mal einen Würfel, in jenes nur einen einzigen einschreiben. Da man den **Achtundvierzigflächner** als einen gebrochenen Pyramidenwürfel ansehen kann, so muß er als hälftiger Körper auch **gebrochene Pyritoeder** (Diploeder) mit 24 Trapezen (Trapezoeder) geben. Vermöge ihrer Zahl gleicher Glieder treten daran alle andern fünf Körper vollzählig auf. Zum dritten Mal kommt das

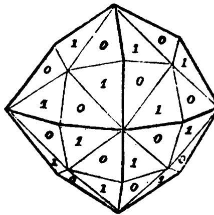
Achtundvierzigflach, welches noch der **Gyroedrie** mit **geneigten** Flächen fähig ist. Das **Gyroeder** mit 24 unsymmetrischen Fünfecken pag. 232 wurde zwar im regulären Systeme noch nicht beobachtet, desto wichtiger ist es aber für das dreigliedrige, wo die spirale Anordnung der Molecüle als der wahrscheinliche Grund für die Circularpolarisation angesehen wird. Wenn die Flächen Resultanten ziehender Kräfte pag. 165 sind, die nur nach bestimmten Symmetriegesetzen different werden, so darf man mit Grund erwarten, daß was einem Systeme widerfährt, bei dem andern möglicher Weise gefunden werden kann. So dürfen wir auf das merkwürdige Gesetz auch im regulären Systeme hoffen. Aber selbst als abstrakter Körper, auf den schon Weiß pag. 31 die Aufmerksamkeit lenkte, verbreitet er Licht über die thatsächliche Erscheinung. Wie das Achtundvierzigflach in seiner

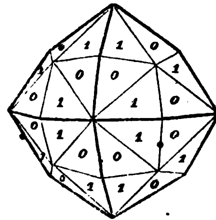
dreigliedrigen Stellung das Scalenoeder mit sechs ungleichseitigen Dreiecken gibt, so erhalten wir durch die gyroedrische Hemiedrie eine rhomboedrische Ecke, zu deren Flächen an der Gegenecke die Parallelen fehlen, statt dessen findet sich unten die gleiche Ecke, welche aber gegen die obere im Azimuth verdreht ist. Im Allgemeinen entstehen dadurch **trigonale Trapezoeder** mit rhomboedrischen Enden aber ungleichen Zickzackkanten. Die Flächen müssen Trapeze sein. Haidinger (Hdb. bestimm. Mineral. 1845 pag. 126) nannte sie Plagieder (πλάγιος schief), woraus dann durch den Zwilling ein Diplagieder mit dihexaedrischen Enden entsteht. Natürlich verhalten sich die beiden Körper von Null und Eins in Beziehung auf die Drehung immer wie links und rechts. Wenn nun aber, wie beim Pyramidengranatoeder und andern pag. 169, die Winkel in der trigonalen Ecke gleich werden, also ein Dihexaeder entsteht, so geht das Plagieder in ein **Trigonoeder** (Ditetraeder) über, das aus sechs gleichschenklichen Dreiecken besteht, wie wenn ich zwei dreigliedrige Tetraeder mit ihrer gleichseitigen Basis gegen einander kehre. Der gewöhnliche Zwilling des Kalkspathes, wo die Stücke die Geradendfläche gemein haben, gibt die gleiche Figur. Dr. Brezina (Sitzungsb. Wien. Akad. Band 64 Juli 1871) führt neun 3 + 1axige Substanzen an, wo sich das „Gesetz der Trigonoeder an circularpolarisirenden Krystallen" bestätigt. Von hohem Interesse würde es nun sein, wenn auch für die

viergliedrige Stellung sich Beispiele fänden. Schreibe ich auf die ungleichseitigen Dreiecke eines viergliedrigen Dioktaeders $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu}$ pag. 279 1 und auf die anliegenden 0 ꝛc., lasse dann die Eins wachsen und die Null verschwinden, so bekomme ich an den zwei Enden Hälften viergliedriger Oktaeder, die in der Basis gegen einander verdreht sind, daher sie auch wieder ungleiche Zickzackkanten machen, und damit **viergliedrige Trapezoeder** erzeugen. Zippe wollte sie zwar beim Skapolit beobachtet haben, doch zweifelte schon Haidinger daran. Es beruht das wahrscheinlich auf Verwechselung mit

Cycloedrie (κύκλος Kreis). Das Viergliedrige, was dem Regulären am nächsten steht, zeigt im Kupferkiese und Edingtonit eine tetraedrische Hemiedrie mit viergliedrigen Tetraedern (Sphenoide) und gebrochenen Tetraedern (Disphene) aus acht ungleichseitigen Dreiecken aufgebaut, und daher von Naumann tetragonale Skalenoeder genannt, während das viergliedrige Gyroeder (Trapezoeder) bis jetzt lediglich eine Abstraction blieb. Dagegen kommen nun beim Tungstein, Gelbbleierz, Fergusonit ꝛc. mehrere Oktaeder von Zwischenstellung vor, die Hälftner von Dioktaedern bilden mit horizontalen Seitenkanten. Haidinger (Hdb. best. Miner. 1845 pag. 136) zählte sie zur pyritoedrischen Hemiedrie, allein damit kann man sie auf keine Weise in Uebereinstimmung bringen. Sie verfallen einer besondern Regel, die nach Zonen Null und Eins aufschreibt, und darnach passend Cycloedrie genannt werden kann. Nehmen wir ein Pyramidengranatoeder zur Hand, schreiben auf die Flächen irgend einer 4 + 4-kantigen Ecke abwechselnd Null, Eins ꝛc., so gehört jedes Null Eins zu einer der vier Säulenzonen. Fahren wir nun in diesen vier Zonen abwechselnd Null Eins zu schreiben fort, so ist die vierundvierkantige Ecke oben und an ihrer Gegenecke in zwei Oktaeder Null und Eins von Zwischenstellung zerlegt, und der nur im viergliedrigen bekannte Fall gleichsam auf sein Gesetz zurückgeführt. Wie innig das gyroedrische und pyritoedrische mit dem cycloedrischen verbunden ist, zeigen nachstehende drei Figuren.


cycloedrisch

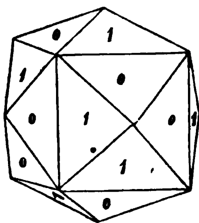

gyroedrisch


pyritoedrisch

Bei der mittlern gyroedrischen Figur wechseln 0 und 1 vereinzelt mit einander ab, daher müssen die tetragonalen Ecken 4flächig, die trigonalen 3flächig, und die digonalen 2flächig werden; bei der hintern pyritoedrischen Figur wechseln 00 und 11 paarweis mit einander ab, entsprechend dem gebrochenen Pyramidenwürfel, daher stimmen nur die trigonalen Ecken mit dem gyroedrischen, doch so, daß wenn die eine (rechts oben) gleichsinnig, die anliegende (links oben) gegensinnig läuft, dadurch werden die hälftigen Körper parallelflächig; bei der vordern cycloedrischen Figur stimmt dagegen nur die tetragonale Endecke mit der gyroedrischen überein, die seitliche Region mit keiner von beiden, weil eben der ganze Körper sich in dreierlei Oktaeder von Zwischenstellung zerlegt, was aus der Zahlenvertheilung sogleich einleuchtet. Oben nehmen nemlich die gleichen Zahlen entsprechend dem Pyramidenoktaeder die langen Hälften

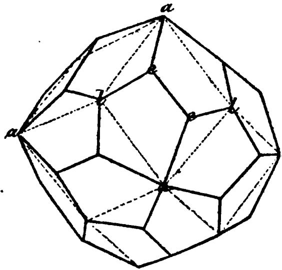
der Pyramide auf der Granatoederfläche ein, das gibt zwei Oktaeder von gleicher Stellung, ein oberes und ein unteres; seitlich liegen dagegen die gleichen Zahlen entsprechend dem Pyramidenwürfel auf den kurzen Hälften, was das dritte Oktaeder von entgegengesetzter Lage mit den beiden ersten gibt. Die ganze Anordnung ist keine reguläre mehr, sondern in eine viergliedrige umgeschlagen. Das **cycloedrische Gesetz** läßt sich auf doppelte Art, auf vier- und dreigliedrige, ausführen. Bei der **viergliedrigen**, vorzugsweise Cycloedrie zu nennen, schreibe ich um eine tetragonale Ecke auf die acht Flächen dem Kreise nach 01 2c., und führe dann entsprechend den vier Säulen, welche die Pfeile andeuten, das Zahlengesetz weiter; bei der **dreigliedrigen** schreibe ich um eine trigonale Ecke auf die sechs Flächen dem Kreise nach 01 2c., verfolge die drei Säulen, so ergibt sich dann die vierte Säulenzone von selbst. Es findet sich sogleich, daß die Einzeichnung mit der pyritoedrischen zusammenfällt, wie die hintere Figur zeigt. Wie wir dort Oktaeder, so haben wir hier Rhomboeder von Zwischenstellung. Das gebrochene Pyritoeder kann man daher auch als ein dreigliedriges Cycloeder ansehen.

Der Pyramidenwürfel mit seinen drei Zonen eignet sich besonders für Cycloedrie. Denn schreibe ich auf die drei Zonen 1 und 0, indem ich in beliebigster Weise einsetze, so geben zwei gegenüberliegende Ecken Zwischenrhomboeder (111 oder 000), zwischen welchen ein zweites liegt. Jede vierseitige Pyramide zerlegt sich in zwei anliegende 11 und anliegende 00, es wechseln also ganz wie beim Pyramidengranatoeder die Zahlen 00 und 11 paarweis mit einander ab. Die Cycloedrie greift auch in die Tetraedrie ein: Das Leucitoeder a : a : ½a besteht bekanntlich aus vier sechsseitigen Säulen, schreibe ich auf die vier Flächen um eine tetragonale Ecke 0101, und fahre dann so über die Säulen fort, so werden je die drei Flächen in den abwechselnden Oktanten mit 0 und 1 bezeichnet, sie geben also das Pyramidentetraeder.

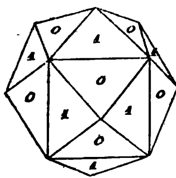


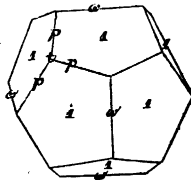
Würfel und Granatoeder sind bekanntlich keiner Hemiedrie fähig, weil an allen hemiedrischen Körpern drei und sechs gleiche Orte bleiben, welche sie einnehmen müssen. Aber damit bleiben sich diese Körper nicht gleich, sondern sie nehmen auch an den Veränderungen Theil: der Würfel des Flußspathes ist ein anderer, als der Würfel des Schwefelkieses und Fahlerzes. Blicken wir auf eine Würfelfläche, so bleiben beim Flußspath Flächen und Kanten physikalisch gleich und symmetrisch; beim Schwefelkies dagegen zerlegen sich die Kanten in 2+2 gemäß der Streifung pag. 4, worauf schon Steno die Aufmerksamkeit lenkte, in Folge dessen bleiben die vier Ecken zwar gleich, werden aber unsymmetrisch. Auch Aetzfiguren bestätigen das. Beim Fahlerz zerlegen sich dagegen die Ecken in 2+2, und die vier gleichen Kanten sind unsymmetrisch.

Am Gyroeder treten alle übrigen sechs Körper vollständig auf, man orientirt sich darin leicht durch das eingeschriebene Granatoeder. Wir haben dreierlei Ecken a l e, und dreierlei Kanten, welche wir oben pag. 232 bei der Berechnung ee = G (Dachkante), ae = H und el = F nannten. Der Würfel stumpft a, das Oktaeder l und das Granatoeder die Dachkante ee = G ab, wie die Zahlen 3, 4, 6 erweisen. Jetzt bleiben noch die Ecken e, und die Kanten ae = H und el = F übrig, welche je 24mal erscheinen, entsprechend den drei übrigen Körpern. Das Leucitoeder a : a : $\frac{1}{2}$a muß die Granatoederkante al gerade abstumpfen, die Ecken e folglich schief treffen. Auf derselben Ecke liegt zugleich das Gegengyroeder. In die Kanten von ae fällt ein Pyramidenwürfel 9a : 5a : ∞a, und in die Kanten von el ein Pyramidenoktaeder a : a : $\frac{1}{4}$a. Da alles vollzählig auftritt, so muß das Gyroeder, wenn es wirklich wo vorkommen sollte, sich leicht der Beobachtung entziehen. Aber trotzdem müßten alle Flächen gyroedrisch afficirt sein. Ueber links und rechts ist bei ihnen kein Zweifel, man darf dabei nur auf die eingeschriebene Granatoederkante sehen, die bei unserer Abbildung zur Rechten der fünfeckigen Flächen liegt, während sie bei der andern zur Linken fällt. In der dreigliedrigen Stellung nimmt die Ecke l den Gipfel ein, dann fällt die Granatoederkante zur Linken, so daß die Drehungen bei der vier- und dreigliedrigen Stellung sich entgegengesetzt verhalten. Am Tetraeder und Pyritoeder lassen sich die Gegenstücke nicht so leicht bestimmen, weil sie symmetrisch sind, und Stück mit Gegenstück in die gleiche Lage gebracht sich decken. Schon oben pag. 93 wurde gezeigt, wie man selbst beim regulären Tetraeder durch Umkrempeln das Links und Rechts verdeutlichen könne. In der Natur kann man zwar zuweilen, wie z. B. am Borazit, beide unterscheiden, da das eine glänzende, das andere matte Flächen zu haben scheint, allein bei allen geht das nicht, und namentlich wird es schwierig, das



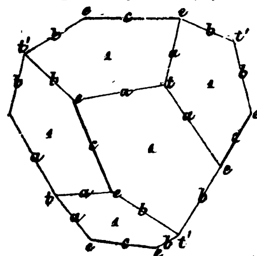
Pyritoeder vom **Gegenpyritoeder** (Antipyritoeder) zu unterscheiden, zumal da beide so selten an ein und demselben Stücke vorkommen. Mag ich die 1 oder die 0 wachsen lassen, so entstehen an sich genau dieselben Körper, die nur durch ihre Stellung am holoedrischen Krystalle verschieden sind. Um links und rechts zu begreifen, muß das Pyritoeder in seine dreigliedrige Stellung gebracht werden, mit seiner trigonalen Ecke t nach oben, dann hat man ein Hauptrhomboeder und darunter ein zweites Rhombo-

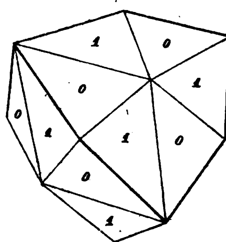




eder von Zwischenstellung: Cycloedrie fällt mit Pyritoedrie zusammen. Machen wir uns jetzt vom Pyritoeder ein Netz, numeriren die Flächen, und krempeln es um, so haben wir ein linkes und rechtes Pyritoeder hingestellt. Bezeichnet man solche mit den Zahlen 1 bis 6 und die Gegenflächen 1′ bis 6′, so kann man die Individuen parallel stellen, wenn die gestrichelten in die Lage der ungestrichelten gebracht werden.

Das **gebrochene Pyritoeder** (Diploeder) gibt den allgemeinsten Körper, der durch mediane Brechung der Fünfecke entsteht, daher in 24 Trapeze zerfällt. Die Zahlen 3(a), 4(t) und 6(e) zeigen sogleich, daß Würfel, Oktaeder, Granatoeder vollzählig auftreten müssen, und aus den 12 gleichen Kanten p in den Oktanten folgt, daß auch Leucitoeder und Pyramidenoktaeder vollständig zu erscheinen haben. Dreigliedrig genommen zerlegt er sich im Allgemeinen in vier Rhomboeder von Zwischenstellung. Nur in besondern Fällen, wie z. B. beim Pyramidengranatoeder $a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a$ bildet das obere ein Hauptrhomboeder und das untere eine reguläre sechsseitige Säule. Das **gebrochene Pyramidentetraeder** (Hexakistetraeder) liefert im tetraedrischen den allgemeinsten Körper. An ihm müssen nicht blos Würfel und Granatoeder vollflächig auftreten, sondern auch die Pyramidenwürfel, denn man darf dieselben nur mit vier Fingern an den abwechselnden Ecken halten, so leuchtet daraus der tetraedrische Umriß hervor. Ich kann daher das Pyramidentetraeder durch Einschreiben von 0 und 1 einer nochmaligen Hemiedrie unterwerfen, dann entsteht eine doppelte Hemiedrie



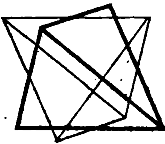


Tetartoedrie (Viertelflächigkeit) genannt. Man kommt auch dazu, wenn man das Gyroeder oder Diploeder nochmals einer tetraedrischen Hemiedrie unterwirft, d. h. die Flächen der abwechselnden Octanten verschwinden läßt. Das **Tetartoeder** mit seinen 12 fünfseitigen Flächen kann daher als ein allgemeiner Körper betrachtet werden, wovon das Pyritoeder nur ein besonderer Fall ist. Wie am Gyroeder die sechs übrigen vollflächigen Körper, so treten am Tetartoeder die tetraedrischen ungetheilt auf. Nur der Pyramidenwürfel, da er selbst als ein gebrochenes Tetraeder angesehen werden kann, muß hälftflächig erscheinen. Damit ist die Möglichkeit erwiesen, daß mit dem Tetraeder auch das Pyritoeder zugleich auftreten kann, wie das Hr. Rammelsberg (Pogg. Ann. 90. 15) am chlorsauren Natron $Na_2Cl_2O_6$ fand, und woran Dr. Marbach (Pogg. Ann. 91. 482) auch Circularpolarisation nachwies. Denn das Tetra-

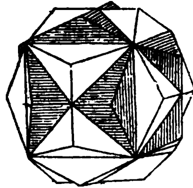
eder wie Pyritoeder müssen in diesem Falle von der Drehung des Tetartoeders erregt sein, ohne daß man es ihnen äußerlich ansieht. Erst das Licht und die Thermoelectricität geben darüber genügenden Aufschluß. Hier hat der Physiker dem Krystallographen die Hand zu bieten. Die Zahl hierher gehöriger Körper wächst immer mehr an (Brezina, Tschermak Miner. Mitth. 1871 1. Heft pag. 23). Durch den

Zwilling suchen sich nun alle diese Hälftflächner wieder ins Gleichgewicht zu setzen: zwei Hälften oder vier Viertel müssen eben wieder das Ganze geben. Natürlich bleiben dabei die Axen beider Körper parallel, wodurch sie sich wesentlich von den eigentlichen Zwillingen pag. 410 unterscheiden. Die

Tetraeder durchkreuzen sich rechtwinklich mit ihren Kanten, wodurch ein gemeinsamer oktaedrischer Kern pag. 91 wieder hergestellt wird. Dabei muß aber nothwendig ein linkes und rechtes Individuum mit einander verbunden sein, weil man sonst die gleichartigen Flächen nicht einander gegenüber legen kann, wie man sich leicht mittelst Farben und Umstülpung pag. 93 klar macht. Beim



Pyritoeder ist wegen der parallelen Gegenflächen eine solche Rücksichtnahme zwar nicht nothwendig, aber im Hinblick auf die rhomboedrischen Ecken wahrscheinlich, denn der gemeinsame Kern muß jetzt der Pyramidenwürfel sein. Die Dachkanten kreuzen sich auch hier rechtwinklich, und die Ausgleichung ist so zierlich, daß sie schon Romé de l'Isle (Essai de Crist. pag. 306) mit einem Maltheserkreuz (Croix de Malthe) verglich, Weiß (Magazin Berl. Ges. Naturf. Freunde VIII. 24) Zwillinge des Eisernen Kreuzes nannte. Nun gibt es zwar beim Schwefelkiese und Glanzkobalte (G. Rose, Monatsb. Berl. Akad. 1870 pag. 338) Pyritoeder, die sich thermoelektrisch positiv und negativ verhalten, was auf linke und rechte Individuen hinweisen würde, aber unerwarteter Weise sind die Individuen der Zwillinge beide entweder elektrisch positiv oder negativ; zu letztern gehören namentlich die schönen Krystalle aus dem obern Keupermergel von Vlotho in Westphalen. Nur als Seltenheit kommen in Italien (Elba, Brosso, Traversella) scheinbar einfache Pyritoeder vor, die sich stellenweis auf den Flächen positiv und negativ verhalten, und sich dadurch erst als Zwillinge ergeben haben. Für die



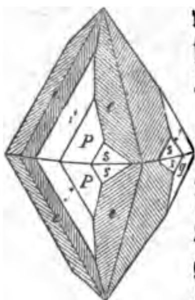
Cycloedrie liefert Tungstein Ca$\dot{\text{W}}$ das beste Beispiel. Wir haben daran ein scharfes Hauptoktaeder

P = a : a : c mit 100° 40′ in den Endkanten,

und ein Nebenoktaeder

e = a : ∞a : c mit 108° 12′ in den Endkanten,

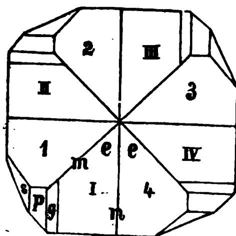
28 *



welches dem regulären Oktaeder außerordentlich nahe steht. Sodann aber kommen noch ziemlich oft zwei Zwischenoktaeder

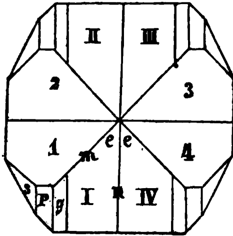
$$s = a : c : \tfrac{1}{3}a \text{ und } h = a : c : 3a,$$

an deren Stelle zuweilen g = a : c : 2a tritt. Diese Zwischenoktaeder finden sich gewöhnlich hälftig nach dem Cycloedriegesetz, und erst durch den Zwilling mit parallelen Axen wird diese Hälftigkeit wieder ausgeglichen. Die Erscheinungsweise ist dabei sehr mannigfaltig, wie man aus den Figuren von Dr. Max Bauer (Württemberg. Naturw. Jahresheft 1871 tab. I und II) ersehen kann. Da es sich bei der Zwillingslage um parallele Axen handelt, so müssen natürlich alle vollflächigen Formen einspiegeln, also Haupt- (P) und Nebenoktaeder (e), beide Quadratsäulen m = a : a : ∞c, n = a : ∞a : ∞c, die Geradendfläche ꝛc.; nur die Hälftflächner der Dioktaeder liegen umgekehrt. Auch der Unterschied von Anlagerung (juxtapositio) und Durchwachsung (penetratio) ergibt sich hier am klarsten, jene wird mit **einem** Individuum, diese mit **zweien** zu Stande gebracht. Denn an einem Individuum habe ich blos die acht Flächen des Zwischenoktaeders, gruppire ich diese zu zweigliedriger Ordnung, so ist der Juxtapositionszwilling fertig; zur vollständigen viergliedrigen Ordnung gelange ich dagegen nur mit zwei Individuen, weil ich 2 . 8 = 16 Flächen zum ganzen Vierkantner (Dioktaeder) bedarf. Am besten macht man die Sache mit einer **Horizontalprojection** klar, und copirt dieselbe auf durchsichtiges Papier: drehe ich das Papier um, und decke die Horizontalprojection, so sind die Zwischenoktaeder vollzählig. Solche Uebereinanderschiebungen mit gemeinsamer Geradendfläche und Wiederholung der Individuen werden bei Zinnwalde gefunden, alle liegen parallel über einander, aber die geradzähligen kehren ihre Zwischenoktaeder nach der einen, die ungeradzähligen nach der andern Seite.

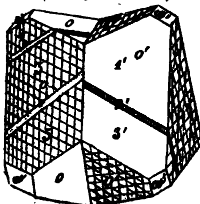


Da wir zwei getrennte Individuen haben, weil die geraden und ungeraden Stücke parallel laufen, so ist die Horizontalprojection vollflächig, denn P und e sammt den Säulen m und n spiegeln ein, und g und s müssen auf beide Seiten von m fallen. Schlagen wir dagegen blos die rechte Hälfte 3 III und 4 IV herum, so kommt eine zweiundeingliedrige Ordnung, vorn liegen sich I und III mit ihrem g, und hinten 2 und 4 mit ihrem s gegenüber, der Krystall ist vorn anders als hinten, aber links wie rechts. Die eingliedrige Anordnung der Zwischenoktaederflächen muß ja durch den Zwilling zur zweiundeingliedrigen werden. Hr. Dr. Bauer (l. c. pag. 157) meinte solche einfachen Zwillinge gefunden zu haben, gesteht aber, daß sich in der Natur nie die Hinterseite beobachten lasse. Es war das gleich von vornherein zu

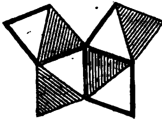
erwarten, denn ein solcher Fall würde gegen das Symmetriegesetz verstoßen, da im Viergliedrigen der andern Seite geschehen muß, was der einen geschieht. Mit Drehung gelangt man dabei überhaupt nicht gut zum Ziele, sondern der Zwilling setzt sich durch innere Kräfte der Art ins Gleichgewicht, daß die möglichst größte Symmetrie entsteht, was in diesem Falle die zweigliedrige Ordnung ist. Man kann dabei I. 1 und III. 3 in ihrer alten Lage lassen, und blos die Ecken IV. 4 und II. 2 dergestalt drehen, daß der Krystall vorn wie hinten, und links wie rechts wird. Wir gelangen damit zu obigem Zwilling, den schon Mohs erkannte. Er zeigt auf den Flächen e zarte Federstreifung parallel der Kante e/s. Nothwendige Folge der zweigliedrigen Ordnung ist dann, daß die gegenüberliegenden Quadranten gleiche Streifenrichtungen haben, die in den Quadranten s/s die Winkelspitze vom Gipfel ab, in den Quadranten g/g dem Gipfel zukehren. Ganz dieselbe Ordnung muß sich wiederholen, wenn Säule m die Zwillingsgrenze (Zusammenwachsungsfläche) wird, dann zeigen die Flächen e keine federartige, sondern blos schiefe Streifung. In diesem Falle gruppiren sich die s auf die einen gegenüberliegenden Ecken, die g auf die andern, und wenn zwischen den s noch g oder zwischen den g noch s auftreten, so müssen sie einspringende Winkel bilden. Erst wenn zwei solcher Exemplare durchwachsen, kann der volle Vierundvierkantner s oder g an allen vier Ecken erscheinen. Man macht sich das leicht an obigen Horizontalprojectionen klar. Theile ich zu dem Ende zwei solcher nach den Säulen m und n in acht Stücke, und lege die lateinischen Zahlen an einander, so liegen die g nach außen, geben also ausspringende Winkel, die s dagegen nach innen springen ein. So finden sich die Krystalle zu Zinnwalde und Schlaggenwalde. Die Oktaeder P und e spiegeln ein, zeigen aber beide Zwillingsgrenzen. Natürlich wird der Habitus ein anderer, je nachdem P oder e vorherrscht. Das Gegenstück von den lateinischen bilden die deutschen Zahlen, hier muß s aus- und g einspringen. Alles das fließt wie von selbst aus dem Gesetz, ist dabei so elementar, daß ich es nicht weiter verfolgen will.



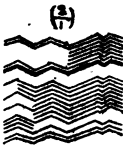
Die **Anhäufung** (cumulatio) der Individuen ist oft eine außerordentliche. Ich wähle im **Tetraedrischen** die **Blende** von Rodna, wo insonders die Oktaeder mit kleinen Würfelflächen lehrreich sind. Das Tetraedrische ist daran übrigens so wenig ausgebildet, daß wenn man es von vorn herein nicht wüßte, man die Differenz der Oktaederflächen leicht übersehen würde. Wir haben hier das Zwillingsgesetz zweimal angewendet: jedes der Hauptindividuen links und rechts zeigt Lamellen



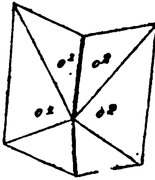
von unbegrenzter Zahl eingeschoben, wobei die Gerad- und Ungeradzähligen je einander parallel gehen; sodann sind diese Gruppen wieder zu einem Hauptzwilling verbunden. Nehmen wir die weißen Flächen als Haupttetraeder, so bilden die gestreiften die Gegentetraeder. Rechts richtet dann das Haupttetraeder seine Basis zur Zwillingsgrenze, links das Gegentetraeder, es haben also, wie wir es oben ausdrückten, linke und rechte Flächen sich angezogen: beim Aneinanderwachsen müssen daher ungleiche, beim Durchwachsen gleiche Tetraederflächen zusammenstoßen. Dasselbe gilt nun auch jederseits von den eingeschobenen Lamellen, sie gehören ebenfalls aus zwei Tetraedern zusammengesetzten Oktaedern an, die ganz wie beim Hauptzwilling die Flächen ihres Gegentetraeders den Flächen des Haupttetraeders zukehren, daher sind die Bänder an unserer Figur rechts im weißen Felde gestreift, links im gestreiften Felde weiß. Am Zwillinge konnten wir uns die Oktaeder als Säulen pag. 117 denken, die eine Fläche gemein haben und umgekehrt liegen. Gehen wir mit dieser Vorstellung heran, so bilden die beiden Hauptindividuen je eine Säule mit entgegengesetzter Flächenbeschaffenheit, die sich angezogen haben, und jede dieser Säulen zog mit der freien Fläche abermals eine ihr ungleichartige Säule an. Ist einmal das Gesetz erkannt, so bleibt für den Geübtern keine Schwierigkeit, dasselbe **elementar** aufzufassen: wir haben hier vier aus linken und rechten Tetraedern gebildete Oktaeder, welche sich im Kreise mit ihrem scharfen Säulenwinkel von $70\frac{1}{2}$ Grad an einander legen, und daher im Azimuth $4 \cdot 70\frac{1}{2} = 282^0$ ausfüllen. Beim Zweigliedrigen, wo eine Zone so gern vorherrscht, kommen die Folgen des Gesetzes zu ihrer höchsten Ausbildung, wie Aragonit, Weißblei, Binarkies, Kupferglas ꝛc. beweisen. Ueberall herrscht dasselbe Gesetz und dieselbe Harmonie.



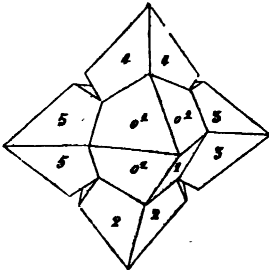
Wenn nun schon die Oberfläche der Verschränkungen so viele bietet, so steigert sich das noch bei Durchschnitten, wozu öfter der **blättrige Bruch** des Granatoeders genügenden Einblick gibt: man sieht die zartesten fortificationsartigen Streifen von senkrechten Linien durchzogen, welche den Zwillingsebenen entsprechen und die Zickzackwinkel halbiren. Die Zickzacklinien gehen den Oktaederflächen parallel, wodurch es den Anschein bekommt, als beständen die Stücke aus lauter übereinander gelagerten Blättchen.



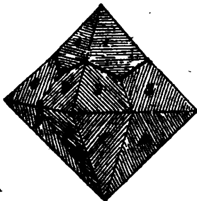
Fünf Individuen gehören beim Oktaeder zum vollständigen Symmetriebilde. Denn da wir vier Krystallräume haben, und jeder Krystall eins anzieht, so geben diese mit dem Centralindividuum die Fünfzahl. Da sich die vier Krystallräume zu zwei Zonen 1/2 und 3/4 (1/3 und 2/4, 1/4 und 2/3) gruppiren, so können sich nur in zwei solchen Richtungen Kreislager ausbilden, welche die Zahl gemäß des Säulenwinkels mög-



licher Weise vergrößern. Im **viergliedrigen Systeme** liefert vorstehendes **Scharfmangan** M_3O_4 ein ausgezeichnetes Beispiel. Hier ziehen sich die Krystalle mit ihrem stumpferen Oktaeder a : c : ∞a an, ich betrachte sie daher als eine Säule mit augitartigem Paare, welche nach dem Gesetze der Schwalbenschwanzzwillinge mit einander verwachsen. Es haben dann beide Individuen die Säule gemein (untere $0^1 0^2$) und die augitartigen Paare (obere $0^1 0^2$) liegen umgekehrt. Dies nun auf den **Fünfling** übertragen zeigt, daß je zwei Säulenflächen der an 0^1 angelagerten Oktaeder je einer dieser Oktaederflächen 0^1 parallel gehen müssen: es müssen daher z. B. die unterhalb 4 . 4 folgenden Säulenflächen den gegenüberliegenden $0^1 1$ parallel gehen, ebenso 5 . 5 den gegenüberliegenden $0^1 1$; beide 4 und 5 gehen also der 1 parallel, daher müssen die Säulen von 2 . 3, 3 . 4, 4 . 5, 5 . 2 einspielen, die Gegenspitze des centralen Oktaeders 0^1 bilden, und damit fünf Individuen abschließen. Das viergliedrige System ist durch seinen Fünfling wieder zur viergliedrigen Ordnung zurückgeführt.

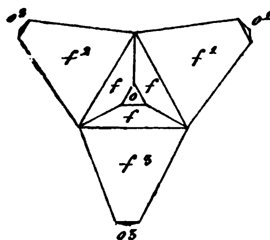


Kupferkies, welches durch seine Winkel dem Regulären so nahe steht, zeigt dem entsprechend auch häufig die gleichen Zwillinge: sie haben die Fläche des Hauptoktaeders gemein und liegen umgekehrt. Die Oktaeder zeigen dabei eine entschiedene Neigung zum Tetraedrischen. Der Theorie gemäß müssen, wenn man auf Oktaeder Null und Eins schreibt und halbirt, nach der Drehung sich Null und Eins gegenüber liegen: auf Friedrich Christian in der wilden Schappach auf dem Schwarzwalde kamen einfache Zwillingskrystalle vor, woran deutlich die entgegengesetzten Tetraeder, wie bei obiger Blende ihre Flächen gegen einander kehren. Die **Fünflinge** von Neudorf auf dem Unterharze haben zwar nur sehr schwach einspringende Winkel, aber bestimmt genug, um zu zeigen, daß die einfachen Oktaeder (Ditetraeder) nicht regulär sein können. Da die Kupferkiesoktaeder nicht schärfere, sondern stumpfere (109° 53′) Endkanten als das reguläre Oktaeder haben, so sollte man analog dem Scharfmanganerz, ausspringende Winkel erwarten, die man aber nur äußerst selten wahrnimmt. Wir bekommen daher, entgegen dem Scharfmanganerz, immer die andere Seite zu Gesicht, denn es muß ja, was auf der Vorderseite ausspringt, auf der Hinterseite einspringen. So könnten auch beim Scharfmangan einmal Funde erscheinen, wo alle Winkel auf den Zwillingsebenen ausspringen würden.



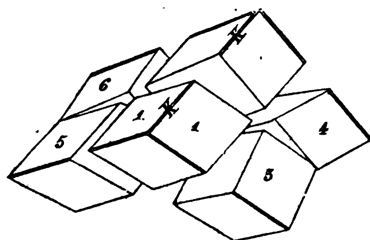
Bei Tetraedrischen ist dann noch die weitere Frage, ob in der Zwillingsgrenze sich gleichartige oder ungleichartige Flächen gegenüber liegen. Nach der Theorie müßten es auch hier ungleichartige sein, dagegen hat es bei den Neudorfern den Anschein, als wenn sie gleichartig wären. Wollte man das durch Hemitropie zu Stande bringen, so müßten die Oktaeder (Ditetraeder) bei ihrer Parallelität so stehen, daß das eine seine Null hinwendet, wo das andere seine Eins hat. In dieser Stellung um die Zwillingsaxe gedreht, welche senkrecht auf die Zwillingsebene (a : ∞a : c) fällt, liegen in der Zwillingskante gleichartige Flächen sich gegenüber. Für den Mineralogen ganz unerwartet kommt die Entdeckung des Hr. vom Rath (Monatsber. Berl. Akad. 1872 pag. 623) am Leucit, der seiner diagonalen Streifung nach nicht mehr zum regulären, sondern zum viergliedrigen Systeme gehört. Ohne diese Fünflinge würde man noch lange auf der alten Ansicht beharrt sein.

Auch das **Dreigliedrige** zeigt ähnliche Cumulationen, aber hier ist natürlich der Kreis schon mit vier Individuen geschlossen, wovon der **Tetradymit** seinen Namen erhielt. Das Resultat davon ist wieder eine dreigliedrige Ordnung, denn würden sich die Blätterbrüche $0^1 0^2 0^3$ ausdehnen, so gäben sie ein vollständiges Rhomboeder. Wenn wir das Rhomboeder $f = \frac{1}{2}a' : \frac{1}{2}a' : \infty a : c$ als das erste schärfere ansehen, so muß das Hauptrhomboeder $a : a : \infty a : c$ dessen Endkanten gerade abstumpfen. Die Endkanten der vier Hauptrhomboeder liegen aber so, daß die der drei Seitenindividuen mit je einer des Centralindividuums in eine Flucht fallen, die „Zusammensetzungsflächen", welche den drei Linien f^1/f, f^2/f, f^3/f correspondiren, stehen senkrecht gegen die Flucht der Endkanten des Hauptrhomboeders, die drei Individuen befinden sich daher gegen das mittlere in der gewöhnlichen Zwillingsstellung: d. h. sie haben die Fläche des nächsten stumpferen Rhomboeders gemein, und liegen umgekehrt. Aehnliche Gruppen finden sich beim Rothgülden ꝛc. Beim Doppelspath, wo auch an allen drei Endkanten solche Zwillingserscheinungen vorkommen, wiederholen sich die Individuen in zahllosen Streifen, wobei dann, wie immer, die gerad- und ungeradzähligen parallel liegen.



Der einfache Zwilling gibt davon eine zweigliedrige Ordnung, denn von den 2 . 3 = 6 Blätterbrüchen fallen je zwei zusammen, wir haben also im Ganzen noch vier. Merkwürdiger Weise hat Hr. Prof. v. Reusch (Monatsber. Berl. Akad. 1867 pag. 223) solche Zwillingslamellen künstlich durch Druck erzeugt, zum Theil so täuschend, daß man versucht wird, eine Menge solcher Dinge durch mechanischen Einfluß zu erklären. Aber daß die Natur dabei auch freier verfahre, zeigen namentlich unsere Cumulationen, die im

Antimon ihren Höhenpunkt erreichen. Denn dort liegen nicht nur an dem Centralindividuum 1 die drei Nebenstücke 2, 3, 5 mit einer ihrer (dickgezeichneten) Kanten den Endkanten k parallel oder in einer Flucht, während zugleich zwei Krystallräume, welche diese Kante bilden, einspiegeln, sondern das Individuum 2, dessen Endecke nach außen fällt, wie die drei Doppellinien anzeigen sollen,

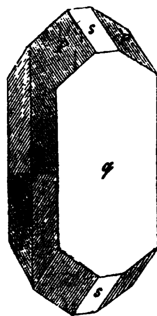


zieht nochmals die Stücke 4 und 6 mit einer Endkante und deren zwei Seiten in eine Flucht. Die sechs Stücke bilden auf diese Weise wieder eine zweigliedrige Ordnung, denn stellen wir die beiden Kanten k k horizontal, so müssen links (1256) und rechts (1234) davon die Ebenen bei gehöriger Ausfüllung je zu einem einzigen Spiegel zusammenfließen; ebenso die Flächen vorn (135) und hinten (246). Es sind die vier Flächen eines Oblongoktaeders. Nehmen wir dagegen die Individuen 4 und 6 heraus, so haben wir dieselbe dreigliedrige Ordnung, wie bei obigem Tetradymit, nur daß jetzt an die Stelle der schärfern die Hauptrhomboeder getreten sind.

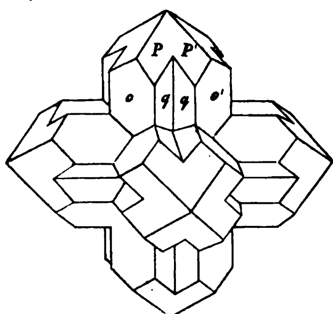
In solchen Cumulationen liegt unverkennbar ein Bestreben der Dinge, nach gewissen Seiten hin in ein möglichst symmetrisches Gleichgewicht zu gelangen, namentlich wenn es einseitig durch Zwillingsbildung gestört ist. Das führte dann Weiß weiter auf die

Meroedrie (μέρος Theil). Freilich darf man es dabei mit den Winkeln nicht zu genau nehmen, sondern muß etwa so freigebig sein, wie der Chemiker beim Isomorphismus, aber dann ist es auch eine schlagende Erscheinung, die tief in die Organisation der Materie einzugreifen scheint. Es machen das besonders die Krystallisationen des Kreuzsteins und Stauroliths klar.

Der **Kreuzstein** wurde schon von Weiß (Hauy, Lehrb. Mineral. 1806 Bd. III pag. 240) bestimmt für einen Zwilling erklärt, zu einer Zeit, wo der Meister im Fach Hauy noch nicht ganz entschieden war. Da nun die Winkel P/P nur unwesentlich von 120° abweichen, und s/s über dem blättrigen Bruche q sich dem Tetraederwinkel von 70° 30′ nähern, so gab Weiß unsern vermeintlich einfachen Krystall geradezu für ein reguläres Granatoeder aus, dessen eine Fläche q durch ihre Blättrigkeit sich von den übrigen fünfen bestimmt unterscheide, und damit dem Krystalle eine hectoedrische (sechstelflächige) Eigenschaft aufpräge. Hectoedrisch sind auch die Flächen s, welche die Granatoederkanten gerade abstumpfen, und damit dem Leucitoeder angehören. Erst in unsern

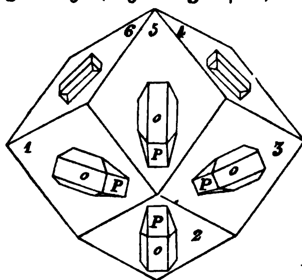


Zeiten hat Hr. Descloizeaux (Compt. rend. 1866 tom. 66 pag. 199) optisch nachgewiesen, daß der Krystall nicht einfach, sondern bereits ein Zwilling von zwei zweiundeingliedrigen Individuen sei, die sich mit ihrem Blätterbruch wie beim Feldspath gegenüber gelegt und durchwachsen haben, so daß die vordere Oberseite PsP ihr Gegenstück unten hinten, und die vordere Unterseite oben hinten durch Kreuzung hervortreten läßt, wie die federartige Streifung auf o beweist, die erst durch diese Entdeckung ihre richtige Deutung fand. Die durch s gerade abgestumpfte 2 + 1gliedrige Säule P/P mißt 120° 1′, kommt also dem Granatoeder ausnehmend nahe. Der gewöhnliche **Kreuzzwilling**, wobei die federartige Streifung o sich dem Blätterbruch q parallel legt, und woran Weiß zuerst das Zwillingsverhältniß erkannte, ist demnach schon ein Vierling, analog dem Vierlinge des Feldspathes pag. 418, welcher eine viergliedrige Ordnung hinstellt. Der Feldspath bringt es aber nicht weiter, während Köhler (Ueber die Naturgesch. des Kreuzsteins, Schulprogramm. Berlin 1831) auf einer Stufe vom Samson bei Andreasberg an nebenstehendem dreifachen Vierling, der ½ Zoll groß sich fast ringsum betrachten ließ, die reguläre Ordnung zuerst nachwies. Zwar hatte schon Prosector Wernekinck (Gilberts Annal. 1824 Bd. 76 pag. 185) aus den Hohlräumen des Mandelsteines von Annerode bei Gießen dreifache einem rechtwinklichen Axenkreuze ähnliche vierseitige Strahlen mit je vier Rhombenflächen am Ende nachgewiesen, allein diese hätte man bei ihrer Dünne und Undeutlichkeit mit Wernekinck noch für Drillinge halten können, die bei dem Kalkkreuzstein (Phillipsit) in den vulkanischen Gebirgsarten von Deutschland und Italien gar keine Seltenheiten sind. Jetzt war der Sechsling erwiesen, durch ihn gleicht sich, um die Worte Köhlers zu gebrauchen, „die innere Structur zu der dem regulären Typus gehorchenden Symmetrie aus, die Spaltungsrichtungen in den Säulenflächen fallen in die Flächenrichtungen des Granatoeders.“ Wenn nun auch jetzt die Sache durch Descloizeaux zu einem Zwölfling erhoben ist, so ändert das in der Grundanschauung nichts, wir müssen dann blos noch einen Schritt weiter gehen, und statt der Hectoedrie eine Dodekaedrie annehmen, denn auch die Leucitoederfläche s wird in diesem Falle ein Zwölftel, kurz das paarige System hat sich zu einem Zwölfpaarigen, zur höchst möglichen Symmetrie erhoben. Selbst nach den schärfsten Messungen scheinen die sechs blättrigen Brüche ein tadelfreies Granatoeder zu bilden, während die Flächen P nicht genau in das Niveau fallen können, sondern längs ihrer beiden Diagonalen nach Art des Pyramidengranatoeders geknickt sein müssen. Versteckter liegt die Sache zwar beim

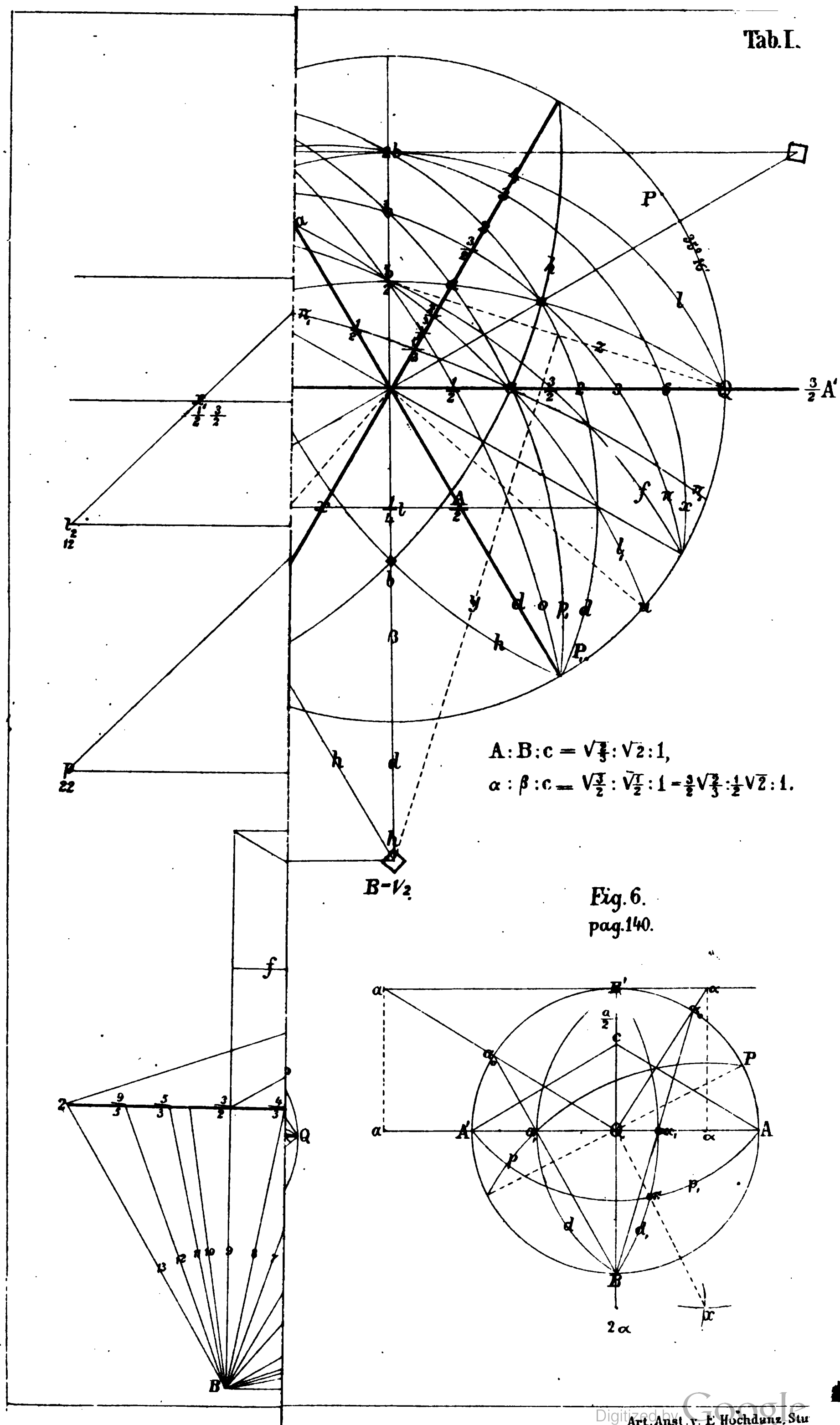


Staurolith, aber um so ingeniöser war die Weiß'sche Deutung seiner Zwillinge (Abh. Berl. Akad. 1831 pag. 313). Er ging dabei von der Ansicht aus, daß r/r sich über der Geradendfläche P unter dem Tetraederwinkel von $70\frac{1}{2}$ Grad und die Säulen M/M unter 129° 31′ dem Winkel des Leucitoides a : a : $\frac{1}{3}$a schneiden, dann würden letztere beiden wieder ein Sechstel des ganzen Leucitoides bilden. Aber auch die beiden r würden als ein Sechstel des gewöhnlichen Leucitoeders a : a : $\frac{1}{2}$a angesehen werden können, und da o und P differente Flächen sind, so wären sie ebenfalls je ein Sechstel vom Granatoeder, kurz alle hectoedrisch. Um nun die beiderlei Zwillinge, recht- und schiefwinklich gekreuzte, zu begreifen, muß man sie in gehöriger Stellung mit der hectoedrischen Granatoederfläche o auf ein vollständiges Granatoeder legen, dann würden, wenn alle sechs Individuen durch einander wüchsen, die o und P ein vollständiges Granatoeder, die r ein Leucitoeder und die M ein Leucitoid geben, dem Kreuzsteine ganz analog. Das ist nun zwar bis jetzt noch nicht so vollständig vorgekommen, allein wenn je zwei (1 und 3, 2 und 5, 4 und 6) in dieser bestimmten Lage mit einander verwüchsen, so gäben sie den gewöhnlichen Zwilling, wobei sich die Hauptaxen d. h. die Seitenkanten M/M rechtwinklich kreuzten. Der ungewöhnlichere schiefwinkliche erscheint dagegen, wenn zwei einer Granatoederkante anliegende, z. B. 1 und 2, 2 und 3, 3 und 4 rc. sich kreuzen, es kommt dann eine so eigenthümliche Verschränkung zum Vorschein, die kaum auf eine andere Weise, als nach der Weiß'schen Anschauung, begriffen werden kann, wie ich das schon im Handbuche der Mineralogie 1855 pag. 236 auseinander setzte. Hr. Oberbergrath v. Websky (Pogg. Annal. Bd. 118 pag. 249) hat diesen schwierigen Zwilling ausführlich behandelt.



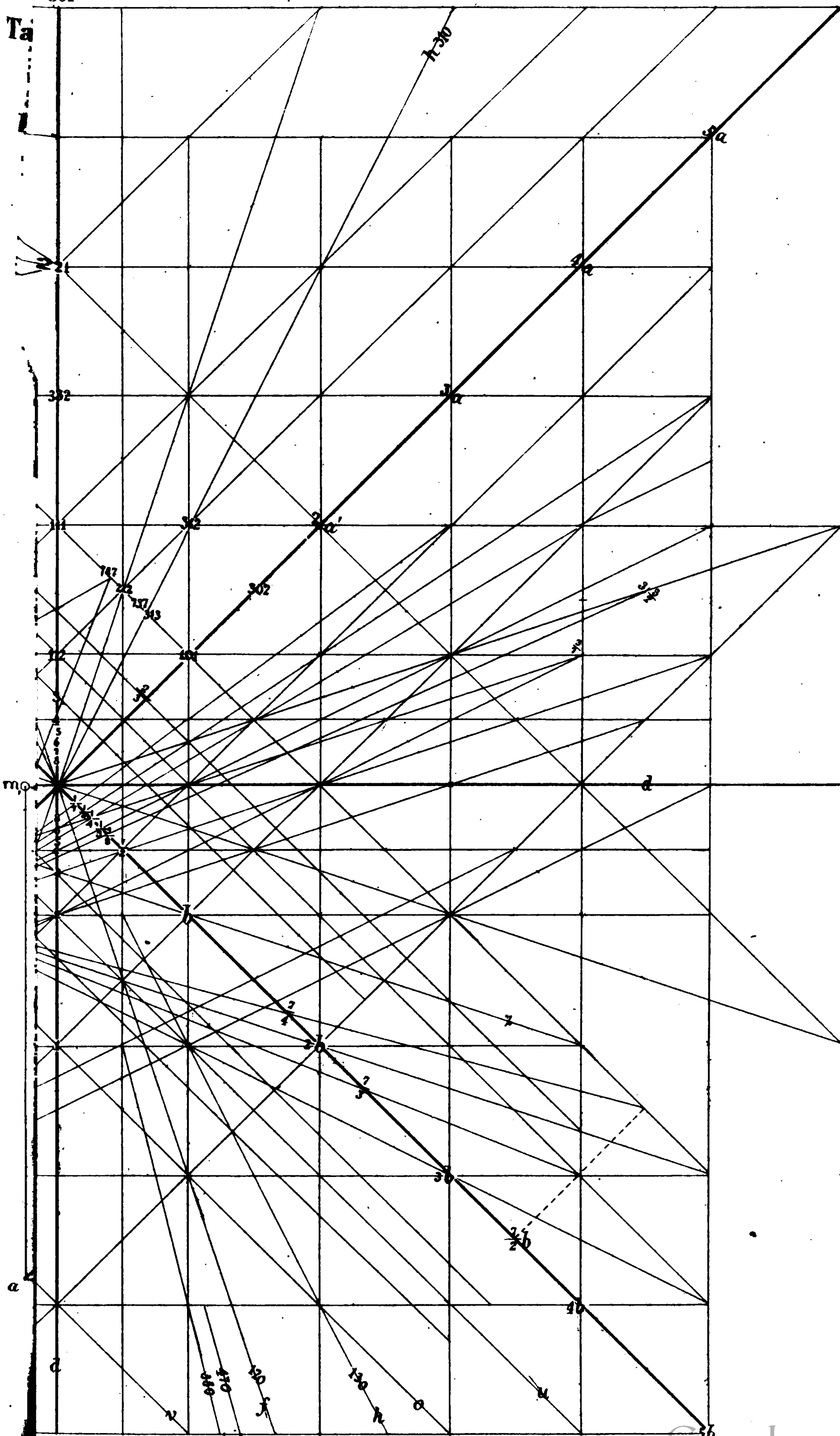


Tab. I.



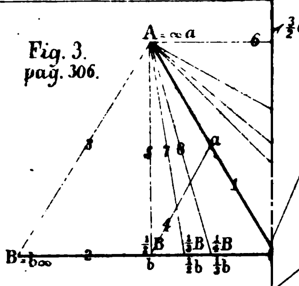
Art. Anst. v. E. Hochdanz, Stu

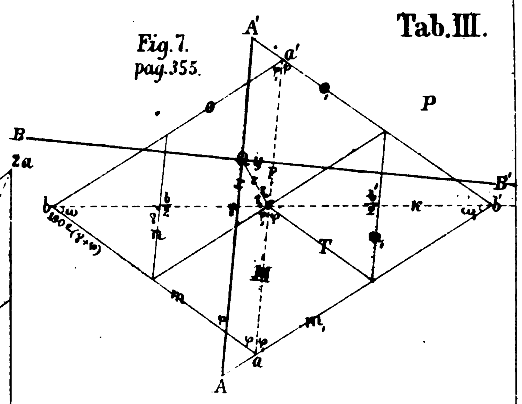


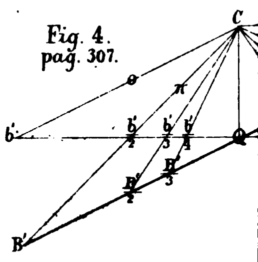


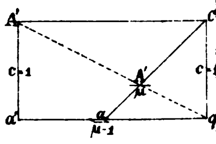
Art. Anst. v. E. Hochdanz, Stuttgart

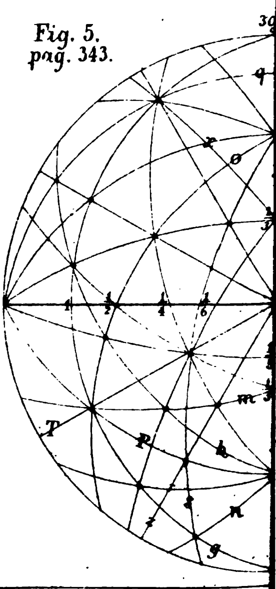
Tab. III.

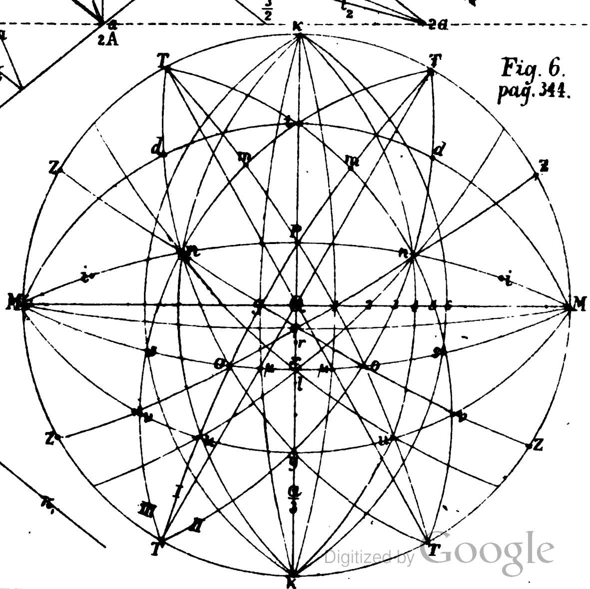

Fig. 3. pag. 306.


Fig. 7. pag. 355.


Fig. 4. pag. 307.


Fig. 2. pag. 305.


Fig. 5. pag. 343.


Fig. 6. pag. 344.

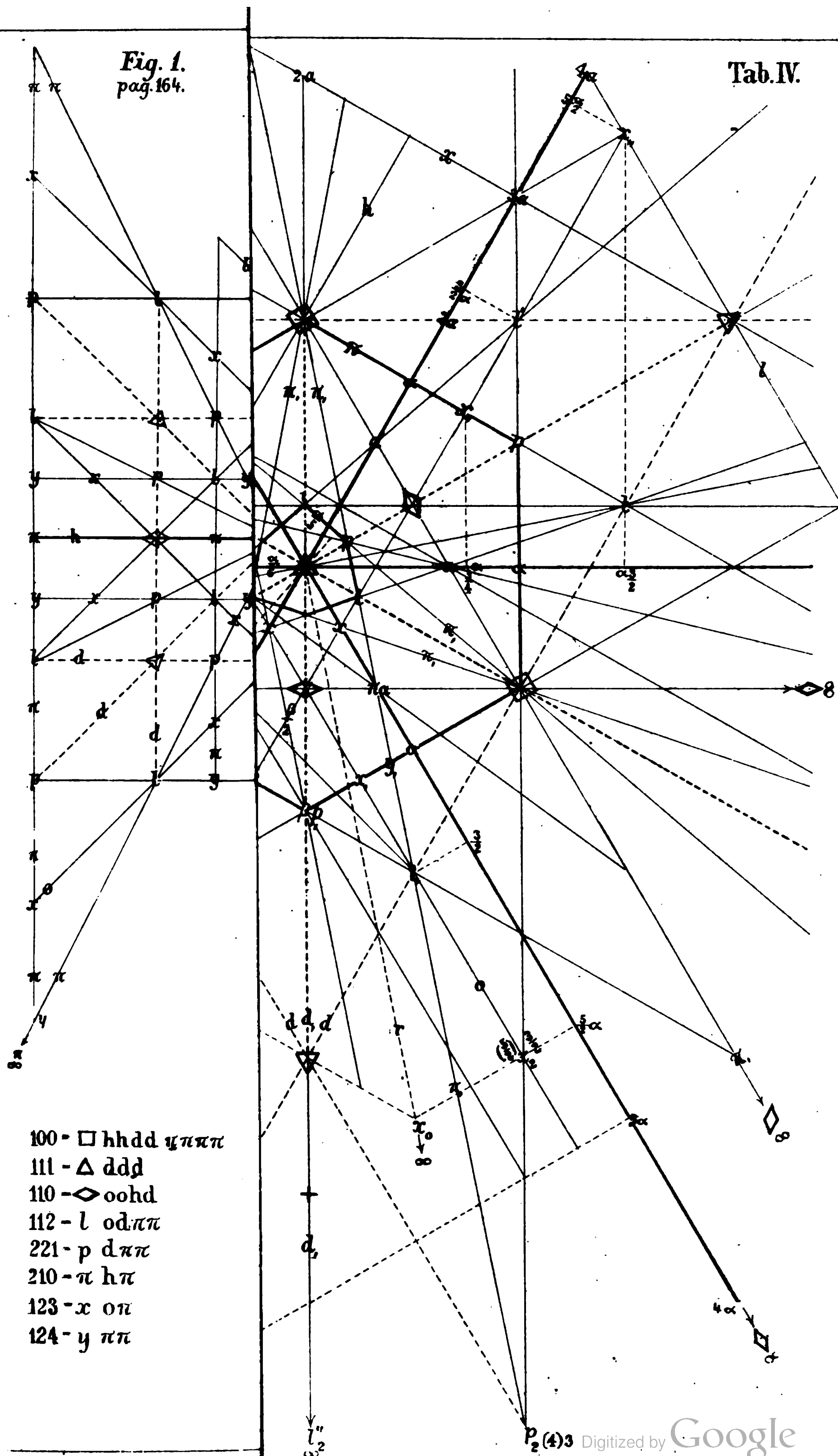
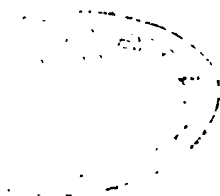


Fig. 1.
pag. 164.
Tab. IV.
100 - □ hhdd yππ π
111 - △ ddd
110 - ◇ oohd
112 - l odππ
221 - p dππ
210 - π hπ
123 - x oπ
124 - y ππ



Tab. V.

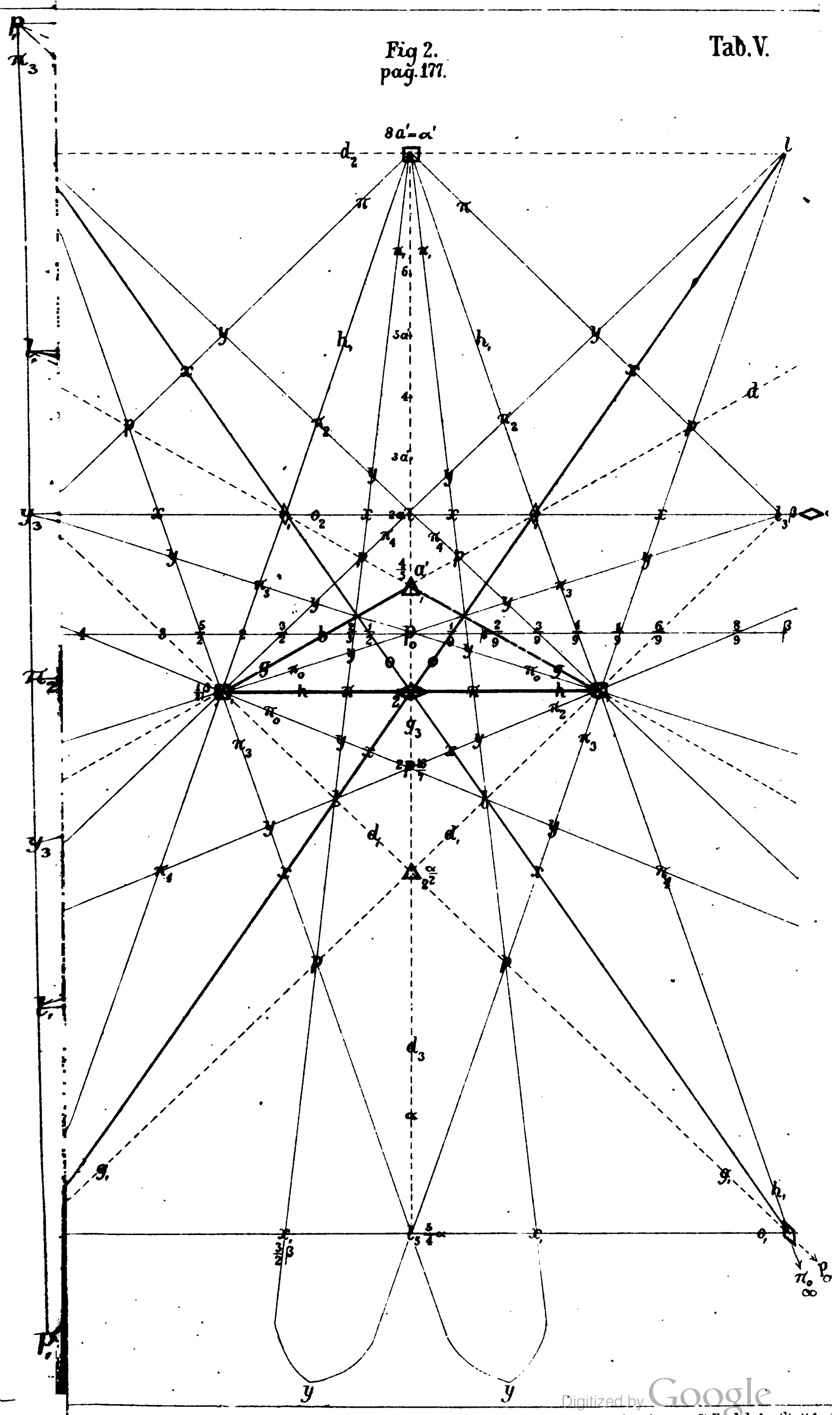
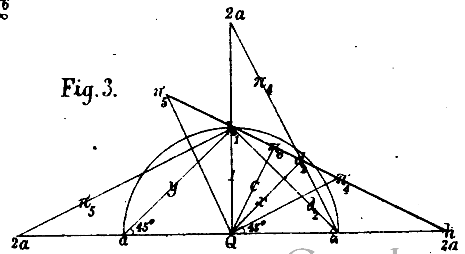
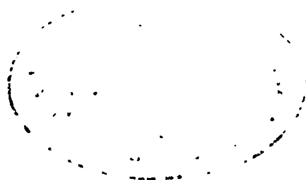
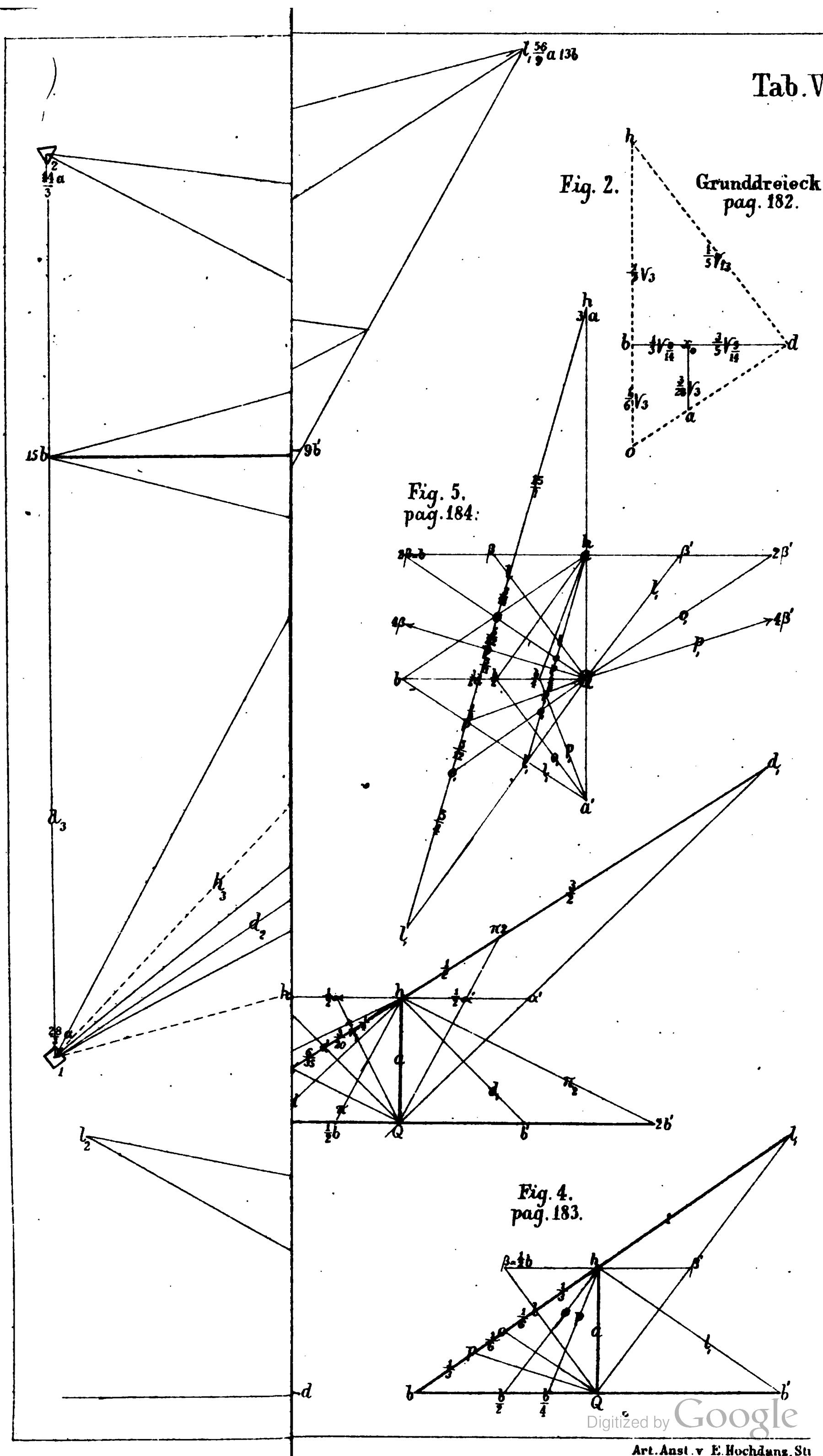


Fig. 2.
pag. 179.

Fig. 3.






Tab. VII.
Fig. 2.
Grunddreieck
pag. 182.
Fig. 5.
pag. 184.
Fig. 4.
pag. 183.
Art. Anst. v. E. Hochdanz, Stu



Tab. VIII.

Fig. 3.
pag. 373.

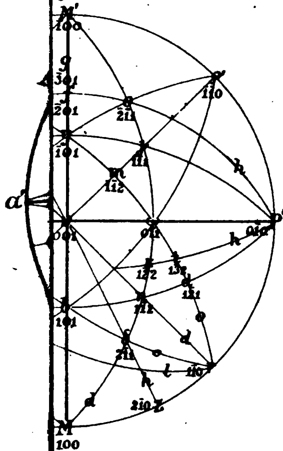


Fig. 5.
pag. 376.

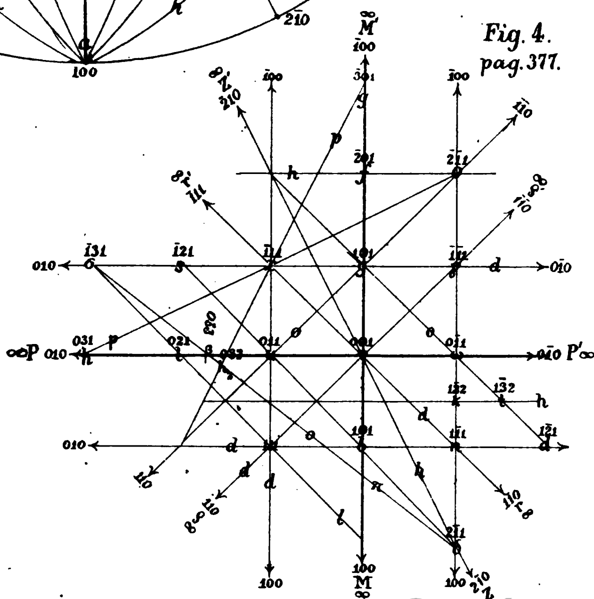


Fig. 4.
pag. 377.








MAYER & MÜLLER
BUCHHANDLUNG
&
ANTIQUARIAT
BERLIN

